ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, № 5, 1971 Математика

Г. С. МИКАЕЛЯН

О СИЛОВСКИХ LQ-БАЗАХ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП

В статье вводится понятие силовской LQ-базы (обобщение понятия силовской Σ-базы, см. [7]), доказываются некоторые теоремы о сопряженности таких баз. Часть из этих теорем является обобщением известных результатов о сопряженности силовских Π и θ-баз, полученных ранее другими авторами.

Автор приносит глубокую благодарность профессору А. Г. Курошу за руководство работой.

1°. Пусть $Q=\langle\Sigma_\alpha|\alpha\in M\rangle$ — расщепляемая система силовских классов (см. [2]). Легко показать (см. [7]), что в этом случае, если мощность $|M|$ множества M больше единицы, то силовский класс $\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}$, порожденный всеми классами Σ_α, $\alpha\in M$, т. е. минимальный силовский класс, содержащий все классы Σ_α, $\alpha\in M$, будет некоторым классом периодических групп. Следовательно, если $|M|>1$, то ставя в соответствие силовскому классу, порожденному расщепляемой системой силовских классов $Q=\langle\Sigma_\alpha|\alpha\in M\rangle$, множество тех простых чисел, которые входят в порядок хотя бы одного $\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}$ — элемента*, мы получаем однозначное соответствие между указанными системами силовских классов и множествами простых чисел. Такое соответствие не является взаимно однозначным. Если множество простых чисел, соответствующих классу $\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}$ указанным выше образом есть Π, то обозначим через $\overline{\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}}$ класс всех Π-групп. Ясно, что всегда $\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}\subset\overline{\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}}$. Теперь для всякого $N\subseteq M$, $|N|>1$ берем такой силовский класс L_N, что

$$\{\Sigma_\beta|\beta\in N\}\subseteq L_N\subseteq\overline{\{\Sigma_\beta|\beta\in N\}}. \tag{1}$$

Обозначим $L=\langle L_N|N\subseteq M,\ |N|>1\rangle$. Пусть задана некоторая группа G. Систему подгрупп $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ группы G назовем ее **силовской LQ-базой**, если

1). A_α является силовской Σ_α-подгруппой группы G для всех $\alpha\in M$;

2). для всякого $N\subseteq M$, $|N|>1$, $\{A_\beta|\beta\in N\}\in L_N$.

Если кроме указанных двух свойств имеет место еще

3). $G=\{A_\alpha|\alpha\in M\}$,

то заданную силовскую LQ-базу будем называть **полной силовской LQ-базой** группы G.

Если для всякого $N\subseteq M$, $|N|>1$, $L_N=\overline{\{\Sigma_\beta|\beta\in N\}}$ ($L_N=\{\Sigma_\beta|\beta\in N\}$), то силовскую LQ-базу будем называть **верхней** (**нижней**) **силовской Q-базой**.

* Для произвольного класса Σ элемент a называется Σ-элементом, если $\{a\}\in\Sigma$.

Понятие Σ-базы из работы [7] совпадает с понятием верхней силовской Q-базы.

Как уже отмечалось, силовские классы L_N из (1) можно взять не однозначным образом. Следовательно, для заданной расщепляемой системы силовских классов Q соответствующая ей система L также определяется неоднозначно. Упорядочим множество $\mathfrak{M}_Q$ всех таких L следующим образом: если L', $L'' \in \mathfrak{M}_Q$, то положим $L' \leqslant L''$ тогда и только тогда, когда для всех $N \subseteq M$ $L'_N \subseteq L''_N$, где L'_N (L''_N)—силовский класс из L' (L''), соответствующий множеству N. Очевидно, что при $L' \leqslant L''$ каждая силовская $L'Q$-база будет силовской $L''Q$-базой данной группы. Приведем пример, показывающий, что обратное утверждение не всегда верно.

Сначала сформулируем одну лемму.

Лемма 1.1. *Если* Π-*произвольное множество простых чисел, то*

1) *класс всех локально конечных* Π-*групп будет силовским.*

2) *класс всех локально конечных и локально разрешимых* Π-*групп будет силовским.*

Доказательство просто. Оно проводится проверкой свойств силовского класса.

Берем теперь знакопеременную группу A_5 порядка 60, в которой содержатся подгруппы A и B порядков 5 и 12 соответственно. Обозначим через $L_{<2,3,5>}$ и $L'_{<2,3,5>}$ соответственно классы локально конечных и локально разрешимых $<2, 3, 5>$-групп. По лемме 1.1 эти классы силовские и для них выполняется условие (1). Обозначим далее $L = <L_{<2,3,5>}>$, $L' = <L'_{<2,3,5>}>$. Система $<A, B>$ будет силовской $L<5, <2, 3>>$-базой и не будет $L'<5, <2, 3>>$-базой группы A_5, так как $A_5 = \{A, B\}$ и A_5 неразрешима.

2°. Лемма 2.1. *Пусть* Σ—*некоторый силовский класс,* G—*периодическая группа,* A—*ее силовская* Σ-*подгруппа,* B—*нормальная в* G *подгруппа, содержащаяся в нормализаторе подгруппы* A. *Тогда, если в группе* $\overline{G} = G/B$ *каждая* Σ-*подгруппа является* N-*группой (см.* [1]), *то* $A = AB/B$ *будет силовской* Σ-*подгруппой в ней.*

Доказательство. Пусть $\overline{A}$ — собственная подгруппа некоторой Σ-подгруппы $\overline{A}^*$ группы $\overline{G}$. Тогда по условию существует такой элемент $\overline{a}^* \in \overline{A}^*$, $\overline{a}^* \notin \overline{A}$, что $\overline{a}^{*-1}\overline{A}\,\overline{a}^* = \overline{A}$. Отсюда для всякого элемента a из A получаем

$$a^{*-1}aa^* = a_1 b, \tag{2}$$

где $a_1 \in A$, $b \in B$, a^*—некоторый прообраз элемента $\overline{a}^*$ при естественном гомоморфизме $G \to \overline{G}$. Учитывая следствие 2 из [7], можно считать, что $|a^*| \in \Sigma$. Из равенства (2) следует, что элемент a^* содержится в нормализаторе подгруппы A в G и, следовательно в A. Таким образом $\overline{a}^* \in \overline{A}$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.2. *Пусть Σ—некоторый силовский класс, G—периодическая группа, A—ее силовская Σ-подгруппа, B—нормальная в G подгруппа, содержащейся в нормализаторе подгруппы A в G. Тогда, если в группе $\overline{G}=G/B$ каждая Σ-подгруппа является N-группой, то из сопряженности в группе $\overline{G}$ силовских Σ-подгрупп следует сопряженность таких подгрупп в группе G.*

Доказательство. Пусть C—любая силовская Σ-подгруппа группы G. Обозначим $\overline{C}=CB/B$. Так как $\overline{A}$ — силовская Σ-подгруппа группы $\overline{G}$ (по лемме 2.1), то ясно, что для некоторого $\overline{g}\in\overline{G}$, $\overline{g}^{-1}\overline{C}\overline{g}\subseteq\subseteq\overline{A}$ или $g^{-1}cg=ab$, где $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, g — некоторый прообраз элемента $\overline{g}$ в G при естественном гомоморфизме $G\to\overline{G}$. Из последнего равенства следует, что $g^{-1}cg\in A$, т. е. $g^{-1}Cg=A$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.3. *Если периодическая группа G обладает силовской LQ-базой $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ с таким силовским нормализатором S (см. [4], [7]), что $\{\overline{A}_\alpha|\alpha\in M\}$, где $\overline{A}_\alpha=A_\alpha S/S$ является силовской L_M-подгруппой группы $\overline{G}=G/S$, то $\{A_\alpha|\alpha\in M\}$—силовская L_M-подгруппа группы G.*

Доказательство. Предположим, что $\{A_\alpha|\alpha\in M\}\subseteq A$, где A—некоторая L_M-подгруппа группы G. Обозначим $S'=S\cap A$. Имеем $AS/S\simeq A/S'$. Отсюда следует, что $\{A_\alpha|\alpha\in M\}\,S'/S'$— силовская L_M-подгруппа группы A/S'. Но $A\in L_M$. Следовательно $\{A_\alpha|\alpha\in M\}\,S'=A$.

Пусть теперь $a\in A$. Тогда $a=a's'$, где $a'\in\{A_\alpha|\alpha\in M\}$, $s'\in S'$. Покажем, что

$$\{s'\}=\{\{s'\}\cap A_\alpha|\alpha\in M\}. \tag{3}$$

Из $\{s'\}\in L_M\subseteq\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}$ следует, что группа $\{s'\}$ разлагается в прямое произведение циклических подгрупп, содержащихся в классах Σ_α, $\alpha\in M$. Но каждая A_α содержит все Σ_α-элементы своего нормализатора. Следовательно (3) верно. Из него получаем $s'\in\{A_\alpha|\alpha\in M\}$ или $a\in\in\{A_\alpha|\alpha\in M\}$. Лемма доказана.

3°. Теорема 3.1. *Если периодическая группа G обладает силовской LQ-базой $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ с таким силовским нормализатором S, что в группе $\overline{G}=G/S$ для всякого $\alpha\in M$ каждая Σ_α-подгруппа является N-группой и имеет место сопряженность силовских Σ_α-подгрупп, то из сопряженности в $\overline{G}$ силовских LQ-баз следует сопряженность таких баз в группе G.*

Доказательство. Пусть $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$—произвольная силовская LQ-база группы G. По лемме 2.2 подгруппы A_α и B_α сопряжены для всех $\alpha\in M$. Следовательно S будет силовским нормализатором силовской LQ-базы $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$. По лемме 2.1 $\langle\overline{B}_\alpha|\alpha\in M\rangle$, где $\overline{B}_\alpha=B_\alpha S/S$, будет силовской LQ-базой группы $\overline{G}$. По предположению существует такой элемент $\overline{g}$ из $\overline{G}$, что $\overline{g}^{-1}\overline{B}_\alpha\,\overline{g}=\overline{A}_\alpha$ для всех $\alpha\in M$. Отсюда легко получается, что $g^{-1}B_\alpha g=A_\alpha$, где g—некоторый

прообраз элемента $\bar{g}$ в G при естественном гомоморфизме $G \to \bar{G}$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Пусть группа G обладает некоторой полной силовской LQ-базой с таким силовским нормализатором S, что для всякого $\alpha \in M$ в группе $\bar{G} = G/S$ имеет место сопряженность силовских Σ_α-подгрупп, и каждая Σ_α-подгруппа является N-группой. Тогда из сопряженности в группе $\bar{G}$ полных силовских LQ-баз следует сопряженность таких баз в группе G.

Действительно, если мощность $|M|$ множества M равна единице, то все очевидно, если же $|M|>1$, то группа G будет периодической, а ее полные силовские LQ-базы переходят в полные в $\bar{G}$ и здесь достаточно требовать сопряженности полных силовских LQ-баз группы G (см. доказательство теоремы 3.1).

Следствие 3.2 (П. А. Гольберг [4]). Если группа G обладает полной силовской базой с таким силовским нормализатором S, что группа G/S локально конечна с условием минимальности, то в G имеет место сопряженность полных силовских баз.

Действительно, в локально конечной группе с условием минимальности, обладающей полной силовской базой, имеет место сопряженность полных силовских баз и силовских p-подгрупп (см. [4]), а локально конечная p-группа с условием минимальности будет p-группой Черникова.

Пусть Π_i — некоторое множество простых чисел, $i=1, 2, \cdots$ и $\Pi_i \cap \Pi_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Следствие 3.3. Если периодическая группа G обладает силовской $\theta = \langle \Pi_1, \Pi_2, \cdots \rangle$-базой с таким силовским нормализатором S, что группа G/S конечна, разрешима и каждая ее Π_i-подгруппа, $i=1, 2, \cdots$, нильпотентна, то в G имеет место сопряженность силовских θ-баз.

Действительно, в группе G/S имеет место сопряженность силовских Π_i-подгрупп, $i=1, 2, \cdots$, по известной теореме Ф. Холла (см. [8]). С другой стороны, в каждой конечной разрешимой группе имеет место сопряженность силовских (холловских) θ-баз. Действительно, пусть $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ и $\langle B_1, \cdots, B_n \rangle$ — силовские (холловские) θ-базы конечной разрешимой группы A. Ясно, что $\{A_1, \cdots, A_n\}$ и $\{B_1, \cdots, B_n\}$ будут силовскими (холловскими) $(\Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_n)$-подгруппами группы A. По упомянутой теореме Холла эти подгруппы сопряжены, т. е. $g^{-1}\{A_1, \cdots, A_n\} g = \{B_1, \cdots, B_n\} = B$, где $g \in A$. По лемме 2.2 из [5] в разрешимой группе B имеет место сопряженность полных силовских (холловских) θ-баз $\langle g^{-1} A_1 g, \cdots, g^{-1} A_n g \rangle$ и $\langle B_1, \cdots, B_n \rangle$.

Теорема 3.2. *Пусть периодическая группа G обладает силовской LQ-базой $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$ с таким силовским нормализатором S, что в группе $\bar{G} = G/S$ имеет место:*

1) *сопряженность силовских L_M-подгрупп и Σ_α-подгрупп для всех $\alpha \in M$,*

2) *Σ_α-подгруппы являются N-группами для всех $\alpha \in M$,*

3) *подгруппы каждой ее силовской LQ-базы порождают силовскую L_M-подгруппу.*

Тогда из сопряженности полных силовских LQ-баз группы $\{\bar{A}_\alpha|\alpha\in M\}$, где $\bar{A}_\alpha = A_\alpha S/S$, следует сопряженность силовских LQ-баз группы G.

Доказательство. Берем произвольную силовскую LQ-базу $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$ группы G. По лемме 2.2 ее силовский нормализатор совпадает с S и согласно лемме 2.1 $\langle\bar{B}_\alpha|\alpha\in M\rangle$, где $\bar{B}_\alpha=B_\alpha S/S$, является силовской LQ-базой группы $\bar{G}$. Следовательно $\{\bar{B}_\alpha|\alpha\in M\}$ — силовская L_M-подгруппа группы $\bar{G}$. По предположению подгруппы $\{\bar{A}_\alpha|\alpha\in M\}$ и $\{\bar{B}_\alpha|\alpha\in M\}$ сопряжены в $\bar{G}$, т. е. существует такой элемент $\bar{x}\in\bar{G}$, что

$$\bar{x}^{-1}\{\bar{B}_\alpha|\alpha\in M\}\,\bar{x}=\{\bar{A}_\alpha|\alpha\in M\}.$$

Отсюда следует, что для всякого $b\in\{B_\alpha|\alpha\in M\}$ существуют такие $a\in\{A_\alpha|\alpha\in M\}$, $s\in S$, что $x^{-1}bx=as$, где x—прообраз элемента $\bar{x}$ в G.

Покажем, что

$$S\subseteq N_G(\{A_\alpha|\alpha\in M\}). \tag{4}$$

Действительно, пусть $a\in\{A_\alpha|\alpha\in M\}$. Тогда существуют такие $a_k\in A_{\alpha_k}$, $k=1,\cdots,m$, что $a=a_1\cdots a_m$. Отсюда, для всякого $s\in S$ имеем

$$s^{-1}as=s^{-1}a_1s\cdots s^{-1}a_ms. \tag{5}$$

Но для всех $\alpha\in M$ $s\in N_G(A_\alpha)$. Следовательно правая часть равенства (5) содержится в $\{A_\alpha|\alpha\in M\}$ и, тем самым, (4) доказано. Теперь из (4) следует, что as и следовательно $x^{-1}bx$ содержатся в нормализаторе подгруппы $\{A_\alpha|\alpha\in M\}$ в G. Но по лемме 2.3 $\{A_\alpha|\alpha\in M\}$ — силовская L_M-подгруппа в G и $\{b\}\in L_M$ (значит и $\{x^{-1}bx\}\in L_M$). Отсюда следует, что $\{x^{-1}bx\}\subseteq\{A_\alpha|\alpha\in M\}$, т. е. $x^{-1}\{B_\alpha|\alpha\in M\}\,x=\{A_\alpha|\alpha\in M\}$. Обозначим

$$A=\{A_\alpha|\alpha\in M\}=x^{-1}\{B_\alpha|\alpha\in M\}\,x=\{x^{-1}B_\alpha x|\alpha\in M\}.$$

В группе $\bar{A}=AS/S$ полные силовские LQ-базы $\langle\bar{A}_\alpha|\alpha\in M\rangle$ и $\langle\bar{x}^{-1}\bar{B}_\alpha\bar{x}|\alpha\in M\rangle$, где $\bar{x}=xS$, сопряжены. Отсюда, как и в теореме 3.1, нетрудно вывести сопряженность силовских LQ-баз $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ и $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$ в группе G. Теорема доказана.

Следствие 3.4. Если периодическая группа G обладает силовской П-базой с таким силовским нормализатором S, что группа G/S конечна и в ней имеет место сопряженность силовских П-подгрупп, то в G имеет место сопряженность силовских П-баз.

Действительно, во всякой конечной группе имеет место сопряженность силовских p-подгрупп и полных силовских баз, а подгруппы силовской П-базы порождают силовскую П-подгруппу.

4°. Пусть $Q=\langle\Sigma_\alpha|\alpha\in M\rangle$ — расщепляемая система силовских классов. В работе Б. И. Плоткина [2] группа названа Q-разложимой, если она разлагается в прямое произведение своих Σ_α-подгрупп, $\alpha\in M$. В этой же работе (для более широких классов групп), показано, что подгруппа и фактор-группа Q-разложимой группы также Q-разложимы. С другой стороны, произведение двух Q-разложимых инвариантных подгрупп произвольной группы опять Q-разложима. Q-разложимо и объединение возрастающей последовательности Q-разложимых подгрупп. Следовательно, в любой группе G существует единственная максимальная Q-разложимая нормальная подгруппа, которую назовем Q-радикалом данной группы и обозначим через $R_Q(G)$.

Как известно (см. [9], [2]), максимальная нормальная Σ-подгруппа (Σ-радикал) произвольной группы, где Σ — некоторый силовский класс, совпадает с пересечением всех силовских Σ-подгрупп этой группы. Отсюда следует, что Q-радикал $R_Q(G)$ группы G совпадает с подгруппой, порожденной всеми подгруппами R_α, где R_α Σ_α-радикал группы G. Но Q—расщепляемая система силовских классов. Следовательно $R_Q(G)$ совпадает с прямым произведением подгрупп R_α, т. е.

$$R_Q(G)=\prod_{\alpha\in M} R_\alpha.$$

Для дальнейшего полезно заметить, что если группа G обладает силовской LQ-базой $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$, то

$$R_Q(G)\subseteq\{A_\alpha|\alpha\in M\}.$$

Лемма 4.1. *Если группа G обладает Q-разложимой подгруппой конечного индекса, то она обладает и Q-разложимой инвариантной подгруппой конечного индекса.*

Доказательство. Пусть A—Q-разложимая подгруппа конечного индекса группы G. Обозначим

$$S=\bigcap_{x\in G} x^{-1}[N_G(A)]\,x.$$

Ясно, что подгруппа S нормальна в G и имеет конечный индекс в ней. Подгруппа $C=A\cap S$ Q-разложима и нормальна в S. Следовательно $C\subseteq R_Q(S)$. Но C обладает конечным индексом в G, такой будет и $R_Q(S)$. С другой стороны, $R_Q(S)$ нормальна в G и, тем самым, будет искомой инвариантной подгруппой.

Лемма 4.2. *Пусть $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ и $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$ — силовские LQ-базы группы G, а $G'=\{A_\alpha, B_\alpha|\alpha\in M\}$ и $\overline{G}'=G'/R_Q(G)$ — соответственно локально конечная и конечная группы. Тогда из сопряженности силовских LQ-баз во всех конечных подгруппах группы G' следует сопряженность в ней заданных силовских LQ-баз.*

Доказательство. Из конечности группы $\overline{G}'$ следует, что существует только конечное число α (скажем $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$), для которых A_α и B_α не являются нормальными в G. Группы

$A_{\tau_i}R_Q(G)/R_Q(G) \simeq A_{\tau_i}/A_{\tau_i} \cap R_Q(G)$, $B_{\tau_i} R_Q(G)/R_Q(G) \simeq B_{\tau_i}/B_{\tau_i} \cap R_Q(G)$ конечны и $A_{\tau_i} \cap R_Q(G) = B_{\tau_i} \cap R_Q(G)$. Обозначим $A_{\tau_i} \cap R_Q(G) = H_i$. Ясно, что существуют такие конечные подгруппы $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$, что

$$A_{\tau_i} = A^{(i)} H_i, \; B_{\tau_i} = B^{(i)} H_i, \; i=1, \cdots, n. \tag{6}$$

Берем в конечной группе $D = \{A^{(i)}, B^{(i)} | i=1, \cdots, n\}$ некоторую силовскую Σ_{τ_i}-подгруппу $\overline{A}^{(i)}$, содержащую $A^{(i)}$. Пусть $a \in \overline{A}^{(i)}$. Тогда $\{a\} \in \Sigma_{\tau_i}$ и

$$\{a, A_{\tau_i}\}/H_i = \{a, A^{(i)}\} H_i/H_i \simeq \{a, A^{(i)}\}/\{a, A^{(i)}\} \cap H_i. \tag{7}$$

Следовательно $\{a, A_{\tau_i}\} \in \Sigma_{\tau_i}$, т. е. $a \in A_{\tau_i}$. Аналогично получаем, что $\overline{B}^{(i)} \subseteq B_{\tau_i}$, где $\overline{B}^{(i)}$ — силовская Σ_{τ_i}-подгруппа группы D, содержащая $B^{(i)}$. Далее, если D_α, D'_α — две силовские Σ_α-подгруппы группы D, $\alpha \in M$, $\alpha \neq \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, то D_α, $D'_\alpha \subseteq C_\alpha$, где C_α — силовская Σ_α-подгруппа в G. Мы получаем, что для указанных α силовские Σ_α-подгруппы группы D единственны. Обозначим для $\alpha \in M$ такую подгруппу через D_α (для некоторых α возможно и $D_\alpha = 1$). Из сказанного следует, что системы подгрупп

$$\langle \overline{A}^{(i)}, D_\alpha | i=1, \cdots, n \rangle, \; \langle \overline{B}^{(i)}, D_\alpha | i=1, \cdots, n \rangle$$

будут силовскими LQ-базами конечной группы D. Следовательно существует такой элемент $d \in D$, что

$$d^{-1} \overline{A}^{(i)} d = \overline{B}^{(i)}, \; i=1, \cdots, n.$$

Покажем, что элемент d трансформирует базу $\langle B_\alpha | \alpha \in M \rangle$ в базу $\langle B_\tau | \alpha \in M \rangle$. Действительно, пусть $a_i \in A_{\alpha_i}$. Тогда из (6) следует, что $a_i = a'_i h_i$, где $a'_i \in A_{\tau_i}$, $h_i \in H_i$. Имеем $d^{-1} a_i d = (d^{-1} a'_i d) \times (d^{-1} h_i d)$. Ясно, что $d^{-1} a'_i d \in \overline{B}^{(i)}$, $d^{-1} h_i d \in H_i$. Но $\overline{B}^{(i)} \subseteq B_{\tau_i}$, $H_i \subseteq B_{\alpha_i}$. Следовательно, $d^{-1} a_i d \in B_{\tau_i}$, т. е. для всех $i = 1, \cdots, n$ $d^{-1} A_{\tau_i} d = B_{\alpha_i}$. Так как для любого $\alpha \in M$, $\alpha \neq \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ $C_{\tau_i} \triangleleft G$, то $d^{-1} C_\tau d = C_\alpha$. Лемма доказана.

Следствие 4.1. Пусть локально конечная группа G обладает Q-разложимой подгруппой конечного индекса. Тогда из сопряженности во всех конечных подгруппах группы G силовских LQ-баз следует сопряженность таких баз в группе G.

Действительно, по лемме 4.1 группа G обладает Q-разложимой инвариантной подгруппой конечного индекса. Остается применить лемму 4.2 к произвольным двум силовским LQ-базам группы G.

Пусть $Q = \langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — расщепляемая система силовских классов. Для всякого $\alpha \in M$ взяв в качестве Σ_α класс всех p_α-групп, где p_α — простое число и $p_\alpha \neq p_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, приходим к понятию $S(\Pi)$-подгруппы ($S(\Pi)$-радикала) группы, где Π — множество всех p_α, $\alpha \in M$ (см. [6]), т. е. такой подгруппы (максимальной инвариантной подгруппы), которая разлагается в прямое произведение своих p_α-подгрупп.

Аналогично определяется θ-разложимая подгруппа, где $\theta=\langle\Pi_1, \Pi_2, \cdots\rangle$, Π_i — некоторое множество простых чисел, $i=1, 2, \cdots$, при $i\neq j$ $\Pi_i \cap \cap \Pi_j = \varnothing$.

Следствие 4.2. Если периодическая локально разрешимая группа G обладает θ-разложимой ($S(\Pi)$--разложимой) подгруппой конечного индекса, то в ней имеет место сопряженность силовских θ-баз (Π—баз).

Лемма 4.3. *Если локально конечная группа G обладает Q-разложимой подгруппой конечного индекса, и если в каждой ее конечной подгруппе: а) имеет место сопряженность полных силовских LQ-баз, б) подгруппа, порожденная всеми членами любой ее силовской LQ-базы является силовской L_M-подгруппой, то в группе G имеет место сопряженность полных силовских LQ-баз.*

Доказательство. Пусть силовские LQ-базы $\langle A_\alpha | \alpha \in M\rangle$ и $\langle B_\alpha | \alpha \in M\rangle$ являются полными для группы G. Тогда ясно, что $G \in L_M$. С другой стороны, мы имеем силовские LQ-базы $\langle \overline{A}^{(i)}, D_\alpha\rangle$ и $\langle \overline{B}^{(i)}, D_\alpha\rangle$ конечной группы D (см. лемму 4.2). По предположению б) подгруппы $\{\overline{A}^{(i)}, D_\alpha\}$ и $\{\overline{B}^{(i)}, D_\alpha\}$ являются силовскими L_M-подгруппами группы D. Но $D \subseteq G$. Следовательно $\{\overline{A}^{(i)}, D_\alpha\} = \{\overline{B}^{(i)}, D_\alpha\} = D$ и вышеупомянутые базы будут полными для D. По предложению а) они сопряжены. Далее как в лемме 4.2.

Следствие 4.3. (Stonehewer [10]). Если периодическая локально разрешимая группа G обладает локально нильпотентной инвариантной подгруппой конечного индекса, то в ней имеет место сопряженность силовских баз.

Лемма 4.4. *Пусть в каждой конечной подгруппе локально конечной группы G имеет место а) сопряженность полных силовских LQ-баз и силовских L_M-подгрупп, б) подгруппы каждой ее силовской LQ-базы порождают силовскую L_M-подгруппу. Тогда, если G обладает Q-разложимой подгруппой конечного индекса, то в ней имеет место сопряженность силовских LQ-баз.*

Доказательство. Из условия б) следует, что подгруппы $\{\overline{A}^{(i)}, D_\alpha\}$ и $\{\overline{B}^{(i)}, D_\alpha\}$ (см. лемму 4.2) будут силовскими L_M-подгруппами конечной группы D. По предположению а) они сопряжены в D, т. е.

$$x^{-1}\{\overline{B}^{(i)}, D_\alpha\}x = \{x^{-1}\overline{B}^{(i)}x, D_\alpha\} = \{\overline{A}^{(i)}, D_\alpha\} = A,$$

где $A \subseteq D$, $x \in D$. Мы получаем полные силовские LQ-базы $\langle \overline{A}^{(i)}, D_\alpha\rangle$ и $\langle x^{-1}\overline{B}^{(i)}x, D_\alpha\rangle$ конечной группы A. По предположению они сопряжены. Далее как в лемме 4.2.

Следствие 4.4. Если локально конечная группа G обладает $S(\Pi)$-подгруппой конечного индекса и в каждой ее конечной подгруппе имеет место сопряженность силовских Π-подгрупп, то в G имеет место сопряженность силовских Π-баз.

5°. Пусть $Q=\langle\Sigma_\alpha|\alpha\in M\rangle$ — расщепляемая система силовских классов и $Q'=\langle\Sigma_\beta|\beta\in F\subseteq M\rangle$ — ее произвольная подсистема.

Лемма 5.1. *Пусть $\langle A_\beta|\beta\in F\rangle$ и $\langle B_\beta|\beta\in F\rangle$ — силовские LQ'-базы группы G. Группа $G'=\{A_\beta, B_\beta|\beta\in F\}$ локально конечна, а ее образ $\bar{G}$ при естественном гомоморфизме $G\to G/R_Q(G)$ конечен. Тогда из сопряженности в любой конечной подгруппе группы G' силовских LQ'-баз следует сопряженность заданных баз в группе G'.*

Доказательство. В силу изоморфизма

$$G'R_Q(G)/R_Q(G)\simeq G'/G'\cap R_Q(G)=\bar{G}'$$

группа $\bar{G}'$ конечна. Следовательно существует только конечное число $\beta\in F$, для которых A_β не нормальна в G'. Далее

$$A_\beta\cap(G'\cap R_Q(G))=B_\beta\cap(G'\cap R_Q(G))$$

и здесь получаются равенства вида (6). Далее как в лемме 4.2.

Следствие 5.1. Если локально конечная и локально П-отделимая (см. [6]) группа обладает $S(\Pi)$-подгруппой конечного индекса и $\Pi'\subseteq\Pi$, то в ней имеет место сопряженность силовских Π'-баз.

Действительно, в любой конечной П-отделимой группе имеет место сопряженность силовских Π'-баз по известной теореме Гольберга (см. [3]).

Лемма 5.2. *Пусть G — некоторая группа, $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ и $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$ — ее силовские LQ-базы и $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ обладает конечным числом сопряженных в G. Тогда если группа $\{A_\alpha, B_\alpha|\alpha\in M\}$ локально конечна, то группа $\{A_\alpha, B_\alpha|\alpha\in M\}/R_Q(G)$ конечна.*

Доказательство. Ясно, что для каждого $\alpha\in M$ A_α обладает конечным числом сопряженных в G. Тогда по лемме 2 работы [2] группа $\{A_\alpha, B_\alpha\}/R_\alpha$ конечна. С другой стороны, конечна и группа $\{A_\alpha/\alpha\in M\}\,S/S$, где S — силовский нормализатор силовской LQ-базы $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$. Но $A_\alpha\subseteq S$ влечет нормальность A_α в G. Действительно, из $S\lhd G$ следует, что для всякого элемента g из G $g^{-1}A_\alpha g\subseteq S$. Но $g^{-1}A_\alpha g\in\Sigma_\alpha$. Следовательно, так как $S\subseteq N_G(A_\alpha)$ и A_α содержит все Σ_α-элементы своего нормализатора, $g^{-1}A_\alpha g=A_\alpha$. Таким образом, существует только конечное число таких α, для которых A_α не является нормальной в G. Остается заметить, что $\{A_\alpha, B_\alpha|\alpha\in M\}$ локально конечна.

Лемма 5.3. *Пусть в группе G силовская LQ-база $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ имеет конечное число сопряженных и группа $G'=\{A_\alpha, B_\alpha|\alpha\in M\}$, где $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$ — некоторая силовская LQ-база в G, является локально конечной. Тогда из сопряженности силовских LQ-баз в каждой конечной подгруппе группы G' следует сопряженность в ней заданных баз $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ и $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$.*

Доказательство. Нужно воспользоваться леммами 5.2 и 4.2.

Следствие 5.2. Пусть локально конечная группа G обладает силовской LQ-базой с конечным числом сопряженных. Тогда из сопря-

женности силовских LQ-баз в каждой конечной подгруппе группы G следует сопряженность таких баз в самой группе G.

Следствие 5.3. Если периодическая локально разрешимая (локально конечная и локально П-отделимая) группа G обладает силовской θ-базой (П'-базой, $\Pi' \subseteq \Pi$) с конечным числом сопряженных, то в ней имеет место сопряженность силовских θ-баз (П'-баз).

6°. Теорема 6.1. *Пусть периодическая группа G обладает силовской LQ-базой с таким силовским нормализатором S, что группа G/S локально конечна с Q-разложимой подгруппой конечного индекса, и каждая ее Σ_α-подгруппа является N-группой для всех $\alpha \in M$. Тогда из сопряженности в каждой конечной подгруппе группы G/S силовских LQ-баз и Σ_α-подгрупп для всех $\alpha \in M$ следует сопряженность силовских LQ-баз группы G.*

Доказательство. В силу следствия 4.1 в группе $\overline{G}=G/S$ имеет место сопряженность силовских LQ-баз. Покажем, что в ней имеет место также сопряженность силовских Σ_α-подгрупп для всех $\alpha \in M$. По лемме 4.1 в $\overline{G}$ существует Q-разложимая инвариантная подгруппа H конечного индекса. Обозначим через H_α силовскую Σ_α-подгруппу группы H. Ясно, что она будет характеристической в H и, следовательно, $H_\alpha \lhd \overline{G}$. Пусть теперь A_α и B_α—любые две силовские Σ_α-подгруппы группы $\overline{G}$. Мы имеем

$$A_\alpha H/H \simeq A_\alpha/A_\alpha \cap H = A_\alpha/H_\alpha, \quad B_\alpha H/H \simeq B_\alpha/B_\alpha \cap H = B_\alpha/H_\alpha.$$

Но группа $\overline{G}/H$ конечна. Конечны, следовательно, и группы A_α/H_α и B_α/H_α. Ввиду локальной конечности группы $\overline{G}$ существуют такие ее конечные подгруппы A_1 и B_1, что $A_\alpha=A_1H_\alpha$, $B_\alpha=B_1H_\alpha$. Обозначим $D=\{A_1, B_1\}$. Пусть A_1' и B_1' — силовские Σ_α-подгруппы конечной группы D, содержащие соответственно A_1 и B_1. Тогда $A_1' \subseteq A_\alpha$, $B_1' \subseteq B_\alpha$. Действительно, пусть, например, $a \in A_1'$. Тогда ввиду изоморфизма

$$\{a, A_\alpha\}/H_\alpha = \{a, A_1\} H_\alpha/H_\alpha \simeq \{a, A_1\}/\{a, A_1\} \cap H_\alpha$$

получаем, $\{a, A_\alpha\} \in \Sigma_\alpha$, т. е. $a \in A_\alpha$, так как A_α—силовская Σ_α-подгруппа в $\overline{G}$. Теперь, по предположению $g^{-1} A_1' g = B_1'$ для некоторого $g \in D$. Тогда для всякого $a \in A_\alpha$ имеем $a=a_1 h$, где $a_1 \in A_1$, $h \in H_\alpha$ или $g^{-1}ag=(g^{-1} a_1 g)(g^{-1} hg)$ и, так как $g^{-1} a_1 g \in B_1' \subseteq B_\alpha$ и $g^{-1} hg \in H_\alpha \subseteq B_\alpha$, то $g^{-1} A_\alpha g = B_\alpha$. Таким образом, для группы G выполняются все условия теоремы 3.1. По этой теореме в G имеет место сопряженность силовских LQ-баз.

Здесь можно привести некоторые следствия о сопряженности силовских θ и П-баз. Например

Следствие 6.1. Если периодическая группа G обладает силовской П-базой с таким силовским нормализатором S, что группа G/S локально разрешима с локально нильпотентной подгруппой конечного

индекса, и каждая ее p-подгруппа для всех $p \in \Pi$ является N-группой, то в G имеет место сопряженность силовских Π-баз.

Теорема 6.2. *Пусть периодическая группа G обладает силовской LQ-базой с таким силовским нормализатором S, что группа $\overline{G}=G/S$ локально конечна с Q-разложимой подгруппой конечного индекса, и каждая ее Σ_α-подгруппа является N-группой для всех $\alpha \in M$. Тогда, если в каждой конечной подгруппе группы $\overline{G}$ имеет место* а) *сопряженность полных силовских LQ-баз, силовских L_M и Σ_α-подгрупп для всех $\alpha \in M$,* б) *подгруппы каждой ее силовской LQ-базы порождают силовскую L_M-подгруппу, то в G имеет место сопряженность силовских LQ-баз.*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме здесь доказывается, что в группе $\overline{G}$ имеет место сопряженность силовских Σ_α-подгрупп для всех $\alpha \in M$. Покажем, что в ней имеет место сопряженность силовских L_M-подгрупп. Пусть A и B — две такие подгруппы, а H Q-разложимая инвариантная подгруппа конечного индекса группы $\overline{G}$ (см. лемму 4.1). Ясно, что $H \subseteq A$, $H \subseteq B$.

Так как подгруппы A/H и B/H конечны и A и B локально конечны, то существуют такие конечные подгруппы A_1 и B_1, что $A=A_1H$, $B=B_1H$. Обозначим $D=\{A_1, B_1\}$. Пусть A_1' и B_1' — силовские L_M-подгруппы в D, содержащие A_1 и B_1 соответственно и $a \in A_1'$. Тогда в силу изоморфизма

$$\{a, A\}/H \simeq \{a, A_1\}/\{a, A_1\} \cap H$$

получаем $\{a, A\} \in L_M$ или $a \in A$. Следовательно $A_1' \subseteq A$, $B_1' \subseteq B$. Но по предположению A_1' и B_1' сопряжены в D. Отсюда как и в предыдущей теореме получаем сопряженность подгрупп A и B.

Покажем, что подгруппы каждой силовской LQ-базы группы $\overline{G}$ порождают силовскую L_M-подгруппу. Пусть $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — силовская LQ-база в $\overline{G}$ и $\{A_\alpha | \alpha \in M\} \subseteq A \in L_M$. Как уже отмечалось, из конечности группы $\overline{G}/H$ следует, что существует только конечное число таких α (скажем $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$), что A_α не нормально в $\overline{G}$. Ясно, что для всех $i=1, \cdots, n$ группа A_{α_i}/H_i, где $H_i=A_{\alpha_i} \cap H$ конечна. Следовательно, существует такая конечная группа $A^{(i)}$, что $A_{\alpha_i}=A^{(i)} H_i$. Отсюда получаем $A_{\alpha_i} H = A^{(i)} H$ и $\{A_\alpha | \alpha \in M\} = \{A^{(i)} | i=1, \cdots, n\} H$. Далее из конечности группы A/H следует, что $A=A_1H$, где A_1 — конечная группа и можно предполагать, что $\{A^{(i)} | i=1, \cdots, n\} \subseteq A_1$.

Пусть теперь $\overline{A}^{(i)}$ — силовская Σ_{α_i}-подгруппа группы A_1, содержащая $A^{(i)}$. Тогда, если $\alpha \in \overline{A}^{(i)}$, то в силу изоморфизма (7) $\{a, A_{\alpha_i}\} \in \Sigma_{\alpha_i}$ или $a \in A_{\alpha_i}$. Таким образом, система подгрупп $\langle \overline{A}^{(i)}, D_\alpha | \alpha \in M, \alpha \neq \alpha_i, i=1, \cdots, n \rangle$, где D_α — силовская Σ_α-подгруппа группы A_1, будет силовской LQ-базой в A_1. Но $A_1 \in L_M$. Следовательно, по предположению б) $\{\overline{A}^{(i)}, D_\alpha | \alpha \in M, \alpha \neq \alpha_i, i=1, \cdots, n\}=A_1$. С другой сто-

роны, $\bar{A}^{(l)} \subseteq A_{\alpha_l}$ и $D_\alpha \subseteq A_\alpha$, т. е. $A_1 \subseteq \{A_\alpha | \alpha \in M\}$. Но и $H \subseteq \{A_\alpha | \alpha \in M\}$. Следовательно $A = A_1 H \subseteq \{A_\alpha | \alpha \in M\}$ и $\{A_\alpha | \alpha \in M\}$ — силовская L_M-подгруппа в группе $\bar{G}$.

Покажем, наконец, что в группе $\{A_\alpha | \alpha \in M\}$ имеет место сопряженность полных силовских LQ-баз. Так как $\bar{G}$ локально конечна, то такова же и $\{A_\alpha | \alpha \in M\}$. С другой стороны, $\{A_\alpha | \alpha \in M\} H/H \simeq \{A_\alpha | \alpha \in M\}/\{A_\alpha | \alpha \in M\} \cap H$. Следовательно, $\{A_\alpha | \alpha \in M\} \cap H$ — Q-разложимая подгруппа конечного индекса группы $\{A_\alpha | \alpha \in M\}$. Для группы $\{A_\alpha | \alpha \in M\}$ выполняются все условия леммы 4.3. По этой лемме в ней имеет место сопряженность полных силовских LQ-баз. Таким образом, для группы G справедливы все условия теоремы 3.2.

Приведем одно следствие о сопряженности силовских Π и θ-баз.

Следствие 6.2. Пусть периодическая группа G обладает силовской Π-базой с таким силовским нормализатором S, что G/S локально конечна с локально нильпотентной подгруппой конечного индекса, и каждая ее p-подгруппа является N-группой для всех $p \in \Pi$. Тогда, если в каждой конечной подгруппе группы G/S имеет место сопряженность силовских Π-подгрупп, то в G имеет место сопряженность силовских Π-баз.

Ереванский армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступило 15.XII.1970

Հ. Ս. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Սիլովյան LQ-բազաների մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում մտցվում է սիլովյան LQ-բազայի գաղափարը (սիլովյան Σ-բազայի ընդհանրացում, տես [7])։ Ապացուցվում են թեորեմներ խմբերի LQ-բազաների համալուծության վերաբերյալ, որոնցից մի քանիսը սիլովյան Π և θ-բազաների համալուծության վերաբերյալ Ռերի, Գոլբերգի և Ստոնեհելերի որոշ հայտնի արդյունքների ընդհանրացումներ են։

H. S. MIKAELIAN. *On Silov LQ-bases of groups* (summary)

The concept of Silov LQ-base is introduced, which generalises the notion of Silov Σ-base, and some theorems on conjugation of such bases are proved. Some corollarys on conjugation of Silov Π-bases follow. In part these theorem are generalisations of known results on conjugation of Silov Π and θ-bases.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Курош.* Теория групп, М., 1967.
2. *Б. И. Плоткин.* Абстрактные силовские свойства. Тр. Уральск Эл-мех. института инж. ж/д транспорта, вып. 2, 1959, 7—14.
3. *П. А. Гольберг.* Силовские базы П-отделимых групп, ДАН СССР, 64, 1949, 615—618.
4. *П. А. Гольберг.* Силовские базы бесконечных групп, Мат. сб., 32, 1953, 465—476.
5. *П. А. Гольберг.* Холловские базы некоторых классов групп, Сиб. мат. ж., 1, 1960, 14—44.

6. *П. А. Гольберг.* S-радикал и силовские базы бесконечных групп, Мат. сб., 50, 1960, 25—42.
7. *Г. С. Микаелян.* О силовских базах бесконечных групп относительно расщепляемой системы силовских классов, Изв. АН АрмССР, серия „Математика", V, № 2, 1970, 154—161.
8. *P. Hall.* A note on soluble groups, J. London Math. Soc., 3, 1928, 98—105.
9. *W. Specht.* Gruppentheorie, Berlin—Cotingen—Heidelberg, 1956.
10 *S. E. Stonehewer.* Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble groups, Proc. London Math. Soc., 14 1964, 520—536.