К. А. АБГАРЯН

ОДНО АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

1°. Статья посвящена преобразованию к расщепленному виду линейной системы

$$A(\tau, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = B(\tau, \varepsilon) x + f(t, \tau, \varepsilon) \quad (\tau = \varepsilon t), \quad (1.1)$$

где x и f — столбцовые матрицы типа $n \times 1$, а A и B — квадратные матрицы порядка n , допускающие на сегменте $0 \leq \tau \leq L$ разложения (сходящиеся или, по крайней мере, асимптотические) по степеням параметра ε

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau), \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\tau). \quad (1.2)$$

Вопрос о расщеплении систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка на независимые подсистемы рассматривался многими авторами (см., например, [1—7]). В отличие от цитированных и других работ, посвященных расщеплению линейных дифференциальных систем, в данной работе решается задача о расщеплении системы (1.1) на независимые подсистемы уравнений первого порядка при дополнительном условии, что матрицы коэффициентов подсистем имеют каноническую форму.

Как известно [8], если n -мерное векторное пространство R расщепляется на подпространства $R_1, \dots, R_p$, инвариантные и циклические относительно линейного оператора A в R , то в R имеется базис, в котором этому линейному оператору отвечает квазидиагональная матрица $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_p)$ с диагональными блоками, имеющими естественную нормальную форму:

$$J_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & & 1 \\ -\alpha_{k_{\sigma}} & -\alpha_{k_{\sigma}-1} & \dots & -\alpha_{2\sigma} & -\alpha_{1\sigma} & \end{pmatrix} \quad (\sigma=1, \dots, p).$$

Матрица A , отвечающая оператору A в произвольном базисе, связана с матрицей J соотношением подобия

$$A = KJK^{-1}.$$

В соответствии с этим линейная стационарная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (A = \text{const})$$

при замене переменных

$$x = Ky$$

распадается на p независимых подсистем

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = J_\sigma y_\sigma \quad (\sigma = 1, \dots, p)$$

($y_1, \dots, y_p$ — субматрицы столбцовой матрицы y с размерами соответственно $k_1 \times 1, \dots, k_p \times 1$).

Ниже показывается, что, подобно стационарной системе, и система (1.1) при некоторых условиях может быть расщеплена на подсистемы, матрицы коэффициентов которых имеют структуру матриц J_σ . Указывается также преобразование, приводящее к расщеплению исходной системы на подсистемы, матрицы которых имеют структуру аналогичных J_σ матриц

$$J_\sigma = \begin{pmatrix} -\alpha_{1\sigma} & -\alpha_{2\sigma} & \dots & -\alpha_{k_\sigma-1\sigma} & -\alpha_{k_\sigma\sigma} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\sigma = 1, \dots, p).$$

2°. Теорема 2.1. Пусть на сегменте $[0, L]$ а) матрицы $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) имеют производные по τ всех порядков, а $A_0(\tau)$, кроме того, является невырожденной матрицей; б) собственные значения матрицы $U(\tau) = A_0^{-1}(\tau) B_0(\tau)$ разбиты на p групп $\lambda_i^{(\sigma)}, \dots, \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}$ ($\sigma = 1, \dots, p; \sum_{\sigma=1}^p k_\sigma = n$) так, что

$$|\lambda_i^{(\sigma)}(\tau) - \lambda_j^{(s)}(\tau)| \geq c > 0 \quad (\sigma \neq s; i = 1, \dots, k_\sigma; j = 1, \dots, k_s); \quad (2.1)$$

в) соответствующие этим группам подпространства $R_1, \dots, R_p$ являются инвариантными и циклическими подпространствами n -мерного пространства R относительно линейного оператора U , которому в некотором базисе отвечает матрица U . Тогда формальное решение системы (1.1) может быть представлено равенствами

$$x = \sum_{\sigma=1}^p \tilde{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) y_\sigma, \quad (2.2)$$

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \tilde{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) y_\sigma + \tilde{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) R(\tau, \varepsilon) f(t, \tau, \varepsilon), \quad (2.3)$$

где $\tilde{K}_\sigma, \tilde{\Lambda}_\sigma, \tilde{M}_\sigma, R$ — матрицы типа соответственно $n \times k_\sigma, k_\sigma \times k_\sigma, k_\sigma \times n, n \times n$, представленные формальными рядами

$$\begin{aligned} \bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k K_\sigma^{[k]}(\tau), \quad \bar{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Lambda_\sigma^{[k]}(\tau), \\ \bar{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k M_\sigma^{[k]}(\tau), \quad R(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k R_k(\tau), \end{aligned} \quad (2.4)$$

причем

$$\begin{aligned} \Lambda_\sigma^{[0]} &\equiv J_\sigma, \\ \Lambda_\sigma^{[k]} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_{k,\sigma}^{[k]} & -\alpha_{k-1,\sigma}^{[k]} & \dots & -\alpha_{2,\sigma}^{[k]} & -\alpha_{1,\sigma}^{[k]} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Доказательство. Подставляя равенства (2.2) и (2.3), определяющие вектор x , в систему (1.1) и отделяя в полученном соотношении коэффициенты при y_σ ($\sigma=1, \dots, p$) и свободный член, будем иметь

$$A(\tau, \varepsilon) \left[\varepsilon \frac{d\bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon)}{d\tau} + \bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) \bar{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) \right] = B(\tau, \varepsilon) \bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) \quad (2.6)$$

($\sigma=1, \dots, p$),

$$\left[A(\tau, \varepsilon) \sum_{\sigma=1}^p \bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) \bar{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) R(\tau, \varepsilon) - E_n \right] f(t, \tau, \varepsilon) = 0. \quad (2.7)$$

Для того чтобы равенства (2.6), в которых по предположению $\bar{K}_\sigma$ и $\bar{\Lambda}_\sigma$ представлены рядами (2.4), выполнялись тождественно относительно ε , необходимо и достаточно, чтобы члены разложений матриц $\bar{K}_\sigma$ и $\bar{\Lambda}_\sigma$ были решениями матричных уравнений

$$UK_\sigma^{[0]} = K_\sigma^{[0]} \Lambda_\sigma^{[0]}, \quad (2.8)$$

$$UK_\sigma^{[k]} = K_\sigma^{[k]} \Lambda_\sigma^{[0]} + K_\sigma^{[0]} \Lambda_\sigma^{[k]} + D_\sigma^{[k-1]} \quad (2.9)$$

($\sigma=1, \dots, p$; $k=1, 2, \dots$),

где

$$\begin{aligned} D_\sigma^{[k-1]} &= \sum_{j=1}^{k-1} K_\sigma^{[k-j]} \Lambda_\sigma^{[j]} + \\ &+ A_\sigma^{-1} \sum_{v=1}^k \left(A_{\sigma-1} \frac{dK_\sigma^{[k-v]}}{d\tau} - B_\sigma K_\sigma^{[k-v]} + \sum_{l=0}^{k-v} A_{\sigma-1} K_\sigma^{[k-l]} \Lambda_\sigma^{[l]} \right). \end{aligned}$$

В силу условия б) теоремы могут быть построены (см. [9]) квадратные матрицы

$$K = (K_1 \dots K_p), \quad \Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_p), \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_p \end{bmatrix}$$

В том случае, когда $\Lambda_j^{[k]}$ ($k = 1, 2, \dots$) имеет структуру (2.5), k -ое равенство (2.9) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= U \xi_{1\sigma}^{[k]} + \alpha_{k\sigma\sigma}^{[0]} \xi_{k\sigma\sigma}^{[k]} + \alpha_{k\sigma\sigma}^{[k]} \xi_{k\sigma\sigma}^{[0]} - d_{1\sigma}^{[k-1]}, \\ \xi_{2\sigma}^{[k]} &= U \xi_{2\sigma}^{[k]} + \alpha_{k\sigma-1\sigma}^{[0]} \xi_{k\sigma\sigma}^{[k]} + \alpha_{k\sigma-1\sigma}^{[k]} \xi_{k\sigma\sigma}^{[0]} - d_{2\sigma}^{[k-1]}, \\ &\dots \\ \xi_{k\sigma-1\sigma}^{[k]} &= U \xi_{k\sigma\sigma}^{[k]} + \alpha_{1\sigma}^{[0]} \xi_{k\sigma\sigma}^{[k]} + \alpha_{1\sigma}^{[k]} \xi_{k\sigma\sigma}^{[0]} - d_{k\sigma}^{[k-1]}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Умножим равенства (2.13) слева соответственно на $E_n, U, \dots, U^{k\sigma-2}, U^{k\sigma-1}$ и сложим. Получим, учитывая еще, что $\sigma_j^{[0]} \equiv \alpha_{j\sigma}$ ($j=1, \dots, k\sigma$),

$$\psi_\sigma(U) \xi_{k\sigma\sigma}^{[k]} = -(\alpha_{1\sigma}^{[k]} U^{k\sigma-1} + \alpha_{2\sigma}^{[k]} U^{k\sigma-2} + \dots + \alpha_{k\sigma-1\sigma} U + \alpha_{k\sigma\sigma}^{[k]} E_n) \xi_{k\sigma\sigma}^{[0]} + d_\sigma^{[k-1]}, \quad (2.14)$$

где

$$d_\sigma^{[k-1]} = U^{k\sigma-1} d_{k\sigma}^{[k-1]} + \dots + U d_{2\sigma}^{[k-1]} + d_{1\sigma}^{[k-1]}.$$

Пользуясь соотношениями (2.10) и (2.11), равенство (2.14) можно преобразовать к виду

$$\psi_\sigma(\Lambda) Q_\sigma^{[k]} = -M K_\sigma L_\sigma \alpha_\sigma^{[k]} + M d_\sigma^{[k-1]}; \quad (2.15)$$

здесь

$$Q_\sigma^{[k]} = M \xi_{k\sigma\sigma}^{[k]}, \quad L_\sigma = (\Lambda_{\sigma\sigma}^{k\sigma-1} \alpha_\sigma \Lambda_{\sigma\sigma}^{k\sigma-2} \alpha_\sigma \dots \alpha_\sigma), \quad \alpha_\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_\sigma^{[k]} = \begin{bmatrix} \alpha_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ \alpha_{k\sigma\sigma}^{[k]} \end{bmatrix}.$$

Равенство (2.15) распадается на p независимых матричных соотношений

$$\psi_\sigma(\Lambda_s) Q_{s\sigma}^{[k]} = -M_s K_\sigma L_\sigma \alpha_\sigma^{[k]} + M_s d_s^{[k-1]} \quad (s=1, \dots, p), \quad (2.16)$$

где $Q_{s\sigma}^{[k]} = M_s \xi_{k\sigma\sigma}^{[k]}$ — субматрица матрицы $Q_\sigma^{[k]}$ с размерами $k_s \times 1$.

При $s = \sigma$ $\psi_\sigma(\Lambda_\sigma) = 0$, а $M_s K_\sigma = E_{k_s}$. Поэтому из (2.16) получаем

$$L_\sigma \alpha_\sigma^{[k]} = M_\sigma d_\sigma^{[k-1]}.$$

Как нетрудно проверить, L_σ — невырожденная матрица ($\det L_\sigma = 1$), так что последнее равенство разрешимо относительно $\alpha_\sigma^{[k]}$:

$$\alpha_\sigma^{[k]} = L_\sigma^{-1} M_\sigma d_\sigma^{[k-1]}. \quad (2.17)$$

При $s \neq \sigma$ $M_s K_\sigma = 0$, а $\psi_\sigma(\Lambda_s)$ в силу условия б) теоремы — невырожденная матрица. Учитывая это, из (2.16) находим

$$Q_{s\sigma}^{[k]} = \psi_\sigma^{-1}(\Lambda_s) M_s d_\sigma^{[k-1]}, \quad (2.18)$$

Формула (2.18) определяет все субматрицы блочной матрицы $Q_{\sigma}^{[k]}$, кроме одной — $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$. Из вышеизложенного ясно, что в качестве $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ может быть принята произвольная матрица типа $k_{\sigma} \times 1$, имеющая производные по τ всех порядков. В частности, можно принять $Q_{\sigma\sigma}^{[k]} = 0$.

Таким образом, матрица $Q_{\sigma}^{[k]}$ определяется полностью. Через эту матрицу последний столбец матрицы $K_{\sigma}^{[k]}$ выражается так:

$$\xi_{k_{\sigma}\sigma}^{[k]} = KQ_{\sigma}^{[k]}.$$

Остальные столбцы матрицы $K_{\sigma}^{[k]}$ ($\xi_{k_{\sigma-1}\sigma}^{[k]}, \dots, \xi_{1\sigma}^{[k]}$) определяются соотношениями (2.13).

Остается указать способ построения членов разложений матриц $\bar{M}_{\sigma}(\tau, \varepsilon)$ и $R(\tau, \varepsilon)$, обращающих равенство (2.7) в тождество.

Как показано в [5], равенство (2.7) выполняется тождественно относительно ε , если квадратную матрицу

$$\bar{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k M^{[k]}(\tau), \quad M^{[k]} = \begin{bmatrix} M_1^{[k]} \\ \vdots \\ M_p^{[k]} \end{bmatrix},$$

и члены разложения матрицы $R(\tau, \varepsilon)$ определить формулами

$$M^{[0]} = M, \quad M^{[k]} = \sum_{l=1}^k K^{[l]} M^{[k-l]},$$

$$R_0 = A_0^{-1}, \quad R_k = -A_0^{-1} \sum_{l=1}^k A_l R_{k-l};$$

здесь $K^{[l]} = (K_1^{[l]} \dots K_p^{[l]})$.

Полученные соотношения позволяют последовательно определить члены разложений (2.4), посредством которых представляется формальное решение системы (1.1) в форме (2.2)–(2.3). Тем самым теорема доказана.

3°. Аналогичным путем доказывается

Теорема 3.1. Пусть на сегменте $[0, L]$ а) матрицы $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) имеют производные по τ всех порядков, а $A_0(\tau)$, кроме того, является невырожденной матрицей; б) собственные значения матрицы $U(\tau) = A_0^{-1}(\tau) B_0(\tau)$ разбиты на p групп $\lambda_1^{(\sigma)}, \dots, \lambda_{k_{\sigma}}^{(\sigma)}$ ($\sigma = 1, \dots, p; \sum_{\sigma=1}^p k_{\sigma} = n$) при условиях (2.1); в) соответствующие

этим группам подпространства $R_1, \dots, R_p$ являются инвариантными и циклическими подпространствами n -мерного пространства R относительно линейного оператора U , которому в некотором базисе отвечает матрица U . Тогда формальное решение системы (1.1) может быть представлено равенствами

$$x = \sum_{\sigma=1}^p \tilde{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) y_\sigma, \quad (3.1)$$

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \tilde{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) y_\sigma + \tilde{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) R(\tau, \varepsilon) f(t, \tau, \varepsilon), \quad (3.2)$$

где $\tilde{K}_\sigma, \tilde{\Lambda}_\sigma, \tilde{M}_\sigma, R$ — матрицы типа соответственно $n \times k_\sigma, k_\sigma \times k_\sigma, k_\sigma \times n, n \times n$, представленные формальными рядами

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k K_\sigma^{[k]}(\tau), \quad \tilde{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Lambda_\sigma^{[k]}(\tau), \\ \tilde{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k M_\sigma^{[k]}(\tau), \quad R(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k R_k(\tau), \end{aligned} \quad (3.3)$$

причем

$$\begin{aligned} \Lambda_\sigma^{[0]} &\equiv I_\sigma, \\ \Lambda_\sigma^{[k]} &= \begin{bmatrix} -\alpha_{j\sigma}^{[k]} & -\alpha_{2\sigma}^{[k]} & \dots & -\alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[k]} & -\alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Члены рядов (3.3) в данном случае определяются следующими рекуррентными соотношениями.

Как и в п. 2

$$\begin{aligned} \alpha_{j\sigma}^{[k]} &\equiv a_{j\sigma} \quad (j=1, \dots, k_\sigma), \\ \alpha_{s\sigma}^{[k]} &= L_\sigma^{-1} M_\sigma d_\sigma^{[k-1]}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_\sigma &= (\Lambda_\sigma^{k_\sigma-1} a_\sigma \Lambda_\sigma^{k_\sigma-2} a_\sigma \dots a_\sigma), \\ d_\sigma^{[k-1]} &= U^{k_\sigma-1} d_{1\sigma}^{[k-1]} + \dots + U d_{k_\sigma-1\sigma}^{[k-1]} + d_{k_\sigma\sigma}^{[k-1]}, \end{aligned}$$

только теперь $\Lambda_\sigma = I_\sigma, a_\sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

(Заметим попутно, что при этом $\det L_\sigma = (-1)^{\frac{1}{2} k_\sigma (k_\sigma - 1)}$).

Столбцы матрицы $K_\sigma^{[k]}$ определяются так.

Первый столбец

$$\xi_{1\sigma}^{[k]} = K Q_\sigma^{[k]} = \sum_{s=1}^p K_s Q_{s\sigma}^{[k]},$$

где

$$Q_{s\sigma}^{[k]} = \psi_\tau^{-1} (\Lambda_s) M_s d_\sigma^{[k-1]} \quad (s \neq \sigma),$$

а $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ — произвольная матрица типа $k_\sigma^2 \times 1$, имеющая производные по τ всех порядков.

Остальные столбцы матрицы $K_j^{[k]}$ определяются формулами

$$\xi_j^{[k]} = U \xi_{j-1}^{[k]} + \alpha_j^{[k]} \xi_{j-1}^{[0]} + x_{j-1}^{[0]} \xi_{1\sigma}^{[k]} - d_j^{[k-1]}$$

$$(j=2, 3, \dots, k).$$

Что касается членов разложений матриц $\bar{M}$, и R , то для них остаются в силе соотношения, приведенные в конце п. 2, имея в виду, что $K^{[l]}$ построены по формулам настоящего параграфа.

4°. Вектор (столбцовую матрицу) $x_m(t, \varepsilon)$, определенный равенствами (2.2) и (2.3) (или (3.1) и (3.2)) в предположении, что в разложениях (2.4) (соответственно (3.3)) оставлены лишь члены порядка не выше m относительно ε , назовем „приближенным решением“ системы (1.1). Итак, приближенное решение представляется равенствами

$$x_m(t, \varepsilon) = \sum_{\sigma=1}^p K_{\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) y_{\sigma}^{(m)},$$

$$\frac{dy_b^{(m)}}{dt} = \Lambda_{\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) y_{\sigma}^{(m)} + M_{\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) R^{(m)}(\tau, \varepsilon) \hat{f}(t, \tau, \varepsilon),$$

где

$$K_{\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k K_{\sigma}^{[k]}(\tau), \quad \Lambda^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \Lambda_{\sigma}^{[k]}(\tau),$$

$$M_{\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k M_{\sigma}^{[k]}(\tau), \quad R^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k R_k(\tau).$$

З а м е ч а н и е. Для построения приближенного решения условия дифференцируемости матриц A , B , сформулированные в теоремах 2.1 и 3.1, могут быть ослаблены: для формального построения приближенного решения x_m достаточно существования лишь первых $m - \nu$ производных матриц A , и B . ($\nu \leq m$).

При условии, что матрицы A , и B , ($\nu \leq m$) имеют на $[0, L]$ производные по τ до $m - \nu + 1$ порядка включительно, а $f(t, \tau, \varepsilon)$ — непрерывная вектор-функция, регулярная относительно ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$, имеют место следующие оценки для приближенного решения x_m .

Если

$$x|_{t=t_1} = x_m|_{t=t_1},$$

то существуют такое $\varepsilon_0 > 0$ и постоянная $c_m > 0$, что для всех $t \in [t_1, t_2] \subset \left[0, \frac{L}{\varepsilon_0}\right]$

$$\|x - x_m\| \leq c_m \varepsilon^{m+1}.$$

Если, помимо сделанных выше предположений, все собственные значения эрмитовой матрицы $\frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^*)$ неположительны, то

$$\|x - x_m\| \leq c_m \varepsilon^{m-1} \left(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon} \right] \right).$$

В случае однородной системы ($f=0$) имеет место оценка

$$\|x - x_m\| \leq c_m \varepsilon^m \left(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon} \right] \right).$$

Приведенные оценки свидетельствуют об асимптотическом характере приближенного решения x_m^* .

5°. В случае однородной системы расщепленные системы (2.3) и (3.2) принимают вид

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \bar{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) y_\sigma \quad (\sigma = 1, \dots, p). \quad (5.1)$$

Пусть $y_{1\sigma}, \dots, y_{k_\sigma\sigma}$ — элементы столбцовой матрицы y_σ .

Если исходить из теоремы 2.1, то, полагая $y_{1\sigma} \equiv q_\sigma$, равенства (2.2) и (2.3) можно представить в виде

$$x = \sum_{\sigma=1}^p \left[\bar{\xi}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) q_\sigma + \bar{\xi}_{2\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{dq_\sigma}{dt} + \dots + \bar{\xi}_{k_\sigma\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma-1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma-1}} \right], \quad (5.2)$$

$$\frac{d^{k_\sigma} q_\sigma}{dt^{k_\sigma}} + \bar{\alpha}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma-1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma-1}} + \dots + \bar{\alpha}_{k_\sigma\sigma}(\tau, \varepsilon) q_\sigma = 0 \quad (5.3)$$

$$(\sigma = 1, \dots, p),$$

где

$$\bar{\xi}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi_{j\sigma}^{[k]}(\tau), \quad \bar{\alpha}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_{j\sigma}^{[k]}(\tau).$$

Если же исходить из теоремы 3.1, то, полагая $y_{k_\sigma\sigma} \equiv q_\sigma$, вместо (3.1) и (3.2) будем иметь

$$x = \sum_{\sigma=1}^p \left[\bar{\xi}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma-1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma-1}} + \bar{\xi}_{2\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma-2} q_\sigma}{dt^{k_\sigma-2}} + \dots + \bar{\xi}_{k_\sigma\sigma}(\tau, \varepsilon) q_\sigma \right], \quad (5.4)$$

$$\frac{d^{k_\sigma} q_\sigma}{dt^{k_\sigma}} + \bar{\alpha}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma-1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma-1}} + \dots + \bar{\alpha}_{k_\sigma\sigma}(\tau, \varepsilon) q_\sigma = 0 \quad (5.5)$$

$$(\sigma = 1, \dots, p).$$

Таким образом, однородная система (1.1) ($f \equiv 0$) путем замены переменных (5.2) (или (5.4)) преобразуется формально к расщепленной системе (5.3) (или соответственно (5.5)), состоящей из отдельных линейных дифференциальных уравнений. Мы пришли несколько иным путем к результату, установленному в статье [10].

Приближенные решения однородной системы согласно (5.2)—(5.3) и (5.4)—(5.5) могут быть представлены равенствами

* Эти оценки получены с использованием метода построения асимптотической оценки, приведенного в [11].

$$x_m = \sum_{\sigma=1}^p \left[\xi_{1\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) q_{\sigma}^{(m)} + \xi_{2\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) \frac{dq_{\sigma}^{(m)}}{dt} + \dots + \xi_{k_{\sigma}\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_{\sigma}-1} q_{\sigma}^{(m)}}{dt^{k_{\sigma}-1}} \right],$$

$$\frac{d^{k_{\sigma}} q_{\sigma}^{(m)}}{dt^{k_{\sigma}}} + \alpha_{1\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_{\sigma}-1} q_{\sigma}^{(m)}}{dt^{k_{\sigma}-1}} + \dots + \alpha_{k_{\sigma}\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) q_{\sigma}^{(m)} = 0 \quad (\sigma=1, \dots, p)$$

или соответственно равенствами

$$x_m = \sum_{\sigma=1}^p \left[\xi_{1\sigma}^{(m)} \frac{d^{k_{\sigma}-1} q_{\sigma}^{(m)}}{dt^{k_{\sigma}-1}} + \xi_{2\sigma}^{(m)} \frac{d^{k_{\sigma}-2} q_{\sigma}^{(m)}}{dt^{k_{\sigma}-2}} + \dots + \xi_{k_{\sigma}\sigma}^{(m)} q_{\sigma}^{(m)} \right],$$

$$\frac{d^{k_{\sigma}} q_{\sigma}^{(m)}}{dt^{k_{\sigma}}} + \alpha_{1\sigma}^{(m)} \frac{d^{k_{\sigma}-1} q_{\sigma}^{(m)}}{dt^{k_{\sigma}-1}} + \dots + \alpha_{k_{\sigma}\sigma}^{(m)} q_{\sigma}^{(m)} \quad (\sigma=1, \dots, p),$$

где

$$\xi_{j\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \xi_{j\sigma}^{(k)}(\tau), \quad \alpha_{j\sigma}^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \alpha_{j\sigma}^{(k)}(\tau).$$

В силу оценки, приведенной для однородной системы в п. 4, эти приближенные решения имеют асимптотический характер.

Московский авиационный институт

им. С. Орджоникидзе

Поступило 12.X.1970

Կ. Ա. ԱՐԳԱՐՅԱՆ. Գծային դիֆերենցիալ սիստեմի մեկ ախմպտոտիկ ձևափոխություն (ամփոփում)

Հոդվածում մատնանշված են այն ձևափոխությունները, որոնք բերում են առաջին կարգի գրծային դիֆերենցիալ հավասարումների անհամասեռ սիստեմի ավելի ցածր կարգի հավասարումների ենթասիստեմների ախմպտոտիկ ճեղքմանը, Ի տարբերություն գծային դիֆերենցիալ սիստեմների ճեղքմանը նվիրված հայտնի աշխատանքների, այս հոդվածում ճեղքման խնդիրը լուծված է այն լրացուցիչ պայմանի համար, կրք ենթասիստեմների գործակիցների մատրիցաները ունեն կանոնիկ տեսք:

K. A. ABGARIAN. *One asymptotic transformation of linear differential system* (summary)

Transformations leading to asymptotic splitting of nonhomogeneous systems of first order linear differential equations into lower order subsystems are pointed out. In contrast with known works on splitting here the problem is solved under additional condition, that matrices of subsystems' coefficients have canonical form.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. Э. Штокало. Критерии устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, Матем. сб., 19 (61), № 2, 1946.
2. С. Ф. Фащанко. Об асимптотическом поведении интегралов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, ДАН УкрССР, № 1, 1949.
3. Ю. А. Далецкий, С. Г. Крейн. О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве, Укр. матем. журн., 2, № 4, 1950.

4. *Х. Л. Территтин*. Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Сб. перекл. работ, Математика, ИЛ, 1: 2, 1957.
5. *К. А. Абгарян*. Асимптотическое расщепление уравнений липсмановской системы автоматического управления, ДАН СССР, 166, № 2, 1966.
6. *С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко*. Асимптотические методы теории линейных дифференциальных уравнений, „Наукова думка“, Киев, 1966.
7. *В. Вазов*. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. Мир, М., 1968.
8. *Ф. Р. Гантмахер*. Теория матриц, Изд. Наука, М., 1966.
9. *К. А. Абгарян*. Приведение квадратной матрицы к квазидиагональному виду и разложение ее на составляющие, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 2, 1965.
10. *К. А. Абгарян*. Одно формальное преобразование системы линейных дифференциальных уравнений, Известия АН АрмССР, сер. „Математика“, V, № 4, 1970, 317—326.
11. *Н. Н. Боголюбов*. О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН Укр. ССР, 1945.