ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, № 5, 1971 Математика

Н. К. НИКОЛЬСКИЙ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ И ЗАДАЧА ВЕСОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РАСТУЩИХ ОКОЛО ГРАНИЦЫ

Пусть X—банахово пространство и T—линейный оператор в X с полной системой K собственных (или корневых) векторов. Говорят [1—4], что для оператора T возможен *спектральный синтез*, если любое его (замкнутое) инвариантное подпространство порождается корневыми векторами, содержащимися в нем*:

$$TM \subset M \Rightarrow M = \mathrm{L}\,(x\colon x \in M \cap K).$$

В этой статье рассматривается вопрос о возможности синтеза** для оператора сдвига S

$$(Sf)(z) = zf(z), \ |z| < 1 \tag{1}$$

в пространствах функций, аналитических в круге $\mathrm{D} = \{z\colon |z| < 1\}$, с заданным ограничением на рост около границы. Аналогичная задача для функций, гладких вплоть до границы, рассматривалась в [5].

§ 1. Постановка вопроса и абстрактная форма метода М. В. Келдыша

Пусть X—банахово пространство функций, регулярных в круге $\mathrm{D} = \{z\colon |z| < 1\}$, инвариантное относительно оператора (1) и такое, что функционалы ψ_z

$$\psi_z(f) = f(z), \ f \in X \tag{2}$$

непрерывны при любом z, $|z| < 1$, и нормы $\|\psi_z\|$ ограничены на компактных подмножествах в D. Тогда функционалы $\psi_{z,n}$

$$\psi_{z,n}(f) = f^{(n)}(z), \ |z| < 1, \ n \geqslant 0 \tag{3}$$

суть корневые векторы оператора S^* (bX^*), а возможность спектрального синтеза S^*-инвариантных подпространств, замкнутых в слабой топологии, означает, что подпространства, инвариантные для S, определяются своими нулями:

---

* Здесь и далее через $\mathrm{L}\,(A)$ обозначается замкнутая линейная оболочка множества A, $A \subset X$.

** Для сокращения письма будем говорить также, что T допускает синтез, если оператор T^* уже обладает этим свойством. В терминах самого оператора T (который может вообще не иметь собственных векторов) возможность синтеза означает, что инвариантные подпространства T „определяются своими нулями" (подробнее для $T = S$ см. § 1).

$$SM \subset M \Rightarrow M = M(z_n, K_n) = \{f \in X: f^{(i)}(z_n)=0, \ 0 \leqslant i \leqslant K_n\}.$$

Общепринятое предположение состоит в том, что наличие нормы в пространстве X приводит к появлению у функций f из X специфических „граничных эффектов“, к возможности выделения S-инвариантных подпространств с помощью таких особенностей граничного поведения, и, следовательно, к отсутствию синтеза* для оператора S. Первые примеры такого рода дают теоремы М. В. Келдыша [9] ($X = H^2(dxdy)$), А. Бёрлинга [10] ($X = H^p$) и Г. Е. Шилова [11] ($X = C_A = \{f: f$ — регулярна в D и непрерывна в $\overline{D}\}$). Для того чтобы сформулировать эти результаты, а также описать один общий подход к доказательству невозможности синтеза, приведем, следуя Г. Шапиро [12], определение слабо обратимого элемента в пространстве X. Предположим сначала, что множество всех полиномов $\mathbf{P}$ содержится в X и плотно в нем. Функция f, $f \in X$ называется *слабо обратимой в* X, если существует последовательность многочленов $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой

$$1 = \lim_n p_n f,$$

где $1(z) \equiv 1$, $|z| < 1$.

Очевидно, слабая обратимость f равносильна каждому из следующих утверждений:

1). $M_f = X$, где

$$M_f \equiv \mathrm{L}\,(S^n f: n \geqslant 0),$$

то есть f не содержится ни в одном (нетривиальном) S-инвариантном подпространстве.

2). Полиномы плотны в весовом пространстве $X_f = \{g: gf \in X\}$ (относительно весовой нормы $\|g\|_f = \|gf\|_X$).

В работе [9] построен первый пример функции f, $f(z) \neq 0$, $z \in D$ (именно, $f(z) = \exp(z-1)^{-1}$) не слабо обратимой** в $H^2(dxdy)$. Метод М. В. Келдыша, использованный затем лишь в [11]***, приводит к следующей общей схеме построения не обратимых элементов в пространстве X:

Лемма 1. *Пусть γ — замкнутая (гладкая) жорданова кривая, $\gamma \subset \overline{D}$, симметричная относительно вещественной оси и выходящая на границу круга лишь в точке* $z=1$ (т. е. $\gamma \cap \partial D = \{1\}$). *Пусть, кроме того, $f \in X$ и G — внешняя**** функция во внутренности* $\mathrm{Int}\,\gamma$ *кривой γ — таковы, что*

---

* Для счетно-нормированных пространств аналитических функций, с „мягкой“ топологией, синтез для оператора S (S^*) напротив того, как правило, возможен (см., например, [6, 7, 8, 22] и замечания на стр. 20 и 27).

** т. е. такой, что многочлены не плотны в пространстве с весом $H^2(|f|^2 dxdy)$.

*** Работы о слабой обратимости [10, 12, 13, 8, 22] и многие другие использовали иные соображения, связанные с возможностью факторизации функций, см. [14, 23].

**** Назовем функцию G *внешней в области* Ω, если $G \circ \omega$ — внешняя функция в круге D; здесь ω — конформное отображение D на Ω. При этом внешними в круге

1) $\|\psi_z\| \, |f(z)| \leqslant |G(z)|, \ z \in \gamma,$

2) $f(x) = o\,(1/G(x)), \ x \to 1-0.$

Тогда $M_f \neq X$, то есть f—не слабо обратимый элемент в пространстве X.

Доказательство. Если $1 = \lim\limits_n p_n f$, $p_n \in \mathrm{P}$, то $|p_n(z)\, f(z) - 1| \leqslant \|\psi_z\| \cdot \|p_n f - 1\|_X$. Следовательно, $|p_n(z)| \leqslant \mathrm{const}\, \|\psi_z\| / |f(z)|$ (так как $\|\psi_z\| \geqslant \|1\|_X^{-1} > 0$), и согласно условию 1): $|p_n(z)| \leqslant \mathrm{const}\, |G(z)|$, $z \in \gamma$. Поскольку G—внешняя функция, то $|p_n(z)| \leqslant \mathrm{const}\, |G(z)|$ в $\mathrm{Int}\,\gamma$, и потому $|1/f(x)| = \lim\limits_n |p_n(x)| \leqslant \mathrm{const}\, |G(x)|$, $0 \leqslant x_0 \leqslant x < 1$, в противоречие с 2). Лемма доказана.

Замечание 1. Функции f, удовлетворяющие условиям леммы, напоминают своими свойствами *внутренние функции* [14] (и в случаях $X = H^\infty$ или $X = C_A$ других функций, подчиненных 1)—2), фактически нет). В самом деле, условие 1) означает, что f хорошо „подпирает" норму $\|\psi_z\|$: эта норма должна почти достигаться на функции f для всех z, $z \in \gamma$; оптимальный случай $\|\psi_z\| \leqslant \mathrm{const}\, |f(z)|$, $z \in \gamma$, приводит к упрощению условия 2): $f(x) = o(1)$, $x \to 1-0$. С другой стороны, второе требование на f означает, что скорость ее убывания на радиусе $\mathrm{Re}\, z = 0$ экстремальна среди функций класса X, и f „гасит" любую внешнюю в $\mathrm{Int}\,\gamma$ функцию. Например, внутренняя функция f_0, $f_0(z) = \exp\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$, $|z| < 1$, удовлетворяет условиям леммы с кривой γ: $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$, и с внешней функцией $G \equiv 1$ (случай $X = H^\infty$; в случае $X = C_A$ следует брать $f = (z-1)\, f_0(z)$, см. [11]) или $G(z) = (1-z)^{-2}$, $|z| < 1$ (случай $X = H^2(dxdy)$, см. [9]).

Замечание 2. Каждый раз, когда в пространстве X находится не слабо обратимая и всюду отличная от нуля функция f, устанавливается не только невозможность синтеза в X для оператора сдвига S, но и невозможность „анализа": поляра $M_f^\perp$ инвариантна относительно S^* и не содержит собственных векторов этого оператора.

Ниже в §§ 2—5, задача о синтезе рассматривается в пространствах* $C_0(\lambda)$, $C_0(\lambda) \equiv \{f\colon f$—регулярна в D и $|f(z)| = o\,(\lambda(|z|))$, $|z| \to 1\}$,

---

будем называть (несколько отклоняясь от общепринятой терминологии, см. [14]) функции F с ограниченной характеристикой (т. е. $\sup\limits_r \int\limits_0^{2\pi} |\log|F(re^{it})||\,dt < +\infty$), у которых отсутствуют внутренние сомножители в стандартной факторизации (см. [14]).

* Приемы, используемые в настоящей работе, применимы и к некоторым другим пространствам аналитических функций. Например, из результатов § 3 сразу следует невозможность синтеза в любом пространстве X, для которого $H^\infty \subset X$ и $\log \|\psi_z\| < C\,(1-|z|)^{-1} \log^{-(2+\varepsilon)} (1-|z|)^{-1}$, $|z| < 1$, $\varepsilon > 0$ (в частности, для $X = H^2(h(r)\, dr d\theta)$ с $h(r) \geqslant \exp[-(1-r)^{-\alpha}]$, $0 < \alpha < 1$). Такого рода приложения результатов и методов этой работы будут даны в специальном сообщении.

где λ—непрерывная функция на промежутке $[0, 1)$; $\lambda(r)\uparrow\infty$, $r\to 1$. Устанавливается (часто при довольно специальных ограничениях на вес λ), что *никакой порядок роста функции λ не обеспечивает возможности синтеза* в соответствующем классе. Поиски экстремальных (в смысле леммы 1) функций в пространствах $C_0(\lambda)$ оказываются тесно связанными с оценками минорант для $|f(z)|$ при $f\in C_0(\lambda)$, $f(z)\neq 0$, $|z|<1$ (см. [15—16] и §§ 2—4). В § 4 описывается класс весов λ, для которых пространство $C_0(\lambda)$ содержит не слабо обратимые функции, ограниченные в $\mathbf{D}$. В последнем параграфе содержатся некоторые достаточные признаки слабой обратимости, которые являются точными для многих „правильных" шкал роста. Эти признаки немедленно приводят, например, к тому факту, что каждый идеал в алгебре $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} C_0\left(\exp\dfrac{\varepsilon}{(1-r)^B}\right)$, $B>1$, —закрепленный (подробнее см. § 5; отметим, что для более грубой шкалы $\bigcap\limits_{B>B_0>1} C_0\left(\exp\dfrac{1}{(1-r)^B}\right)$ аналогичный факт (вместе с полным описанием идеалов) был получен в [8,22]).

Необходимая в дальнейшем полнота многочленов в пространствах $C_0(\lambda)$ вытекает из элементарной леммы 2:

Лемма 2. *Пусть X— банахово пространство аналитических функций, в котором непрерывны функционалы* (2), $\psi_{0,n}\neq 0$ *при любом n, $n\geqslant 0$* (см. (3)), *и норма инвариантна и непрерывна относительно поворота:* $\|f\|_X=\|f_\alpha\|_X$, $f_\alpha(z)\equiv f(\alpha z)$, $|z|<1$, $|\alpha|=1$, *и пусть, кроме того, из условий*

$$\sup_n \|g_n\|_X<+\infty,\ \lim_n g_n(z)=0,\ |z|<1, \tag{4}$$

вытекает, что $g_n\xrightarrow{\text{сл.}}0$ *(слабая сходимость в пространстве X). Тогда** $\mathbf{P}\subset X$ *и* $\overline{\mathbf{P}}=X$.

Доказательство. Из непрерывности отображения $\alpha\to f_\alpha$ окружности $\partial\mathbf{D}$ в пространство X вытекает, что „свертка" f с конечной мерой на окружности снова принадлежит пространству X:

$$f*\mu\equiv\int\limits_{|\alpha|=1} f\ d\mu(\alpha)\in X$$

и $\|f*\mu\|\leqslant\|f\|\cdot\mathrm{Var}\,|\mu|$. Выбирая $d\mu=\alpha^{-n-1}d\alpha$, $n\geqslant 0$, и вспоминая, что существует f, $f\in X$, с $f^{(n)}(0)\neq 0$, в идим, что $l_n\in X$, где $l_n(z)\equiv z^n$, $|z|<1$. Таким образом, $\mathbf{P}\subset X$. Слабая, а значит и сильная, полнота многочленов следует теперь из того замечания, что арифметические средние $\sigma_n(f)$ ряда Тейлора функции f получаются сверткой f с ядром Фейера и, стало быть, $g_n=\sigma_n(f)-f$ удовлетворяют условию (4).

Следствие. *Полиномы плотны в пространстве $C_0(\lambda)$.*

---

* Другой вариант леммы 2 можно получить, заменив условие непрерывности отображения $\alpha\to f_\alpha$, $|\alpha|=1$, на слабую секвенциальную полноту пространства X.

Действительно, в проверке нуждается лишь критерий (4) слабой сходимости в $C_0(\lambda)$, который немедленно вытекает из теоремы Ф. Рисса о функционалах в пространстве типа C:

$$F\in C_0(\lambda)^* \Longrightarrow F(g)=\int\limits_D \frac{g(z)}{\lambda(|z|)}\,d\mu_F(z),\ \ g\in C_0(\lambda).$$

В заключение этого параграфа приведем еще два утверждения, полезные в приложениях леммы 1 (см. также замечание 1 к лемме 1).

Лемма 3. Пусть γ — кривая в круге $\{t:\ |t|<1\}$, $t=\tau+i\sigma$, симметричная относительно вещественной оси, и пусть уравнение верхней части кривой $\gamma\cap\{t:\ \operatorname{Im} t\geqslant 0\}$ имеет вид

$$\sigma=\sigma(\tau),\ \sigma\in C^{(2)};\ \sigma(\tau)>0,\ 0\leqslant\tau<1,\ \lim_{\tau\to 1-0}\sigma(\tau)=0.$$

Если* $\int\limits_0^1 \frac{\rho\varphi'(\rho)^2}{\varphi(\rho)}\,d\rho<+\infty$ и $\int\limits_0^1 |\varphi'+\rho\varphi''|\,d\rho<+\infty$, то для любой функции G, внешней в области $\operatorname{Int}\gamma$, справедлива оценка

$$\log|G(\tau)|=o\left(\exp\left[\pi\int\limits_0^\tau \frac{du}{(1-u^2)\operatorname{arctg}\dfrac{2\sigma(u)}{1-(u^2+\sigma^2(u))}}\right]\right),$$

при $\tau\to 1-0$.

Лемма 4. Пусть кривая γ удовлетворяет условиям леммы 3, и p, $p\geqslant 0$, — функция на γ. Если

$$\int\limits_0^1 |\log p|\exp\left(-\pi\int\limits_0^\tau \frac{du}{(1-u^2)\operatorname{arctg}\dfrac{2\sigma(u)}{1-(u^2+\sigma^2)}}\right)\frac{(1-u^2-\sigma^2)\,d\tau}{(1-\tau)\,\sigma(\tau)}<+\infty,$$

то существует внешняя в $\operatorname{Int}\gamma$ функция F такая, что $|F|=p$ на γ; и обратно.

Доказательства этих лемм носят стандартный для такого рода утверждений характер (см., например, [17—18]) и сводятся к нескольким заменам переменных в известных теоремах единственности для функций в круге D [4] с использованием асимптотических оценок С. Варшавского [18] для конформных отображений. Поэтому мы приведем лишь набросок доказательства леммы 3, совсем опустив сходные вычисления для леммы 4.

Пусть ω — конформное отображение $\operatorname{Int}\gamma$ на D, $\varphi(\zeta)=\log\dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $|\zeta|<1$, — отображение круга D на полосу $\left\{w:\ |\operatorname{Im} w|<\dfrac{\pi}{2}\right\}$, а W —

---

* Здесь $1-t=\rho e^{i\varphi}$.

—отображение области φ (Int γ) на ту же полосу. Пусть далее $y=y(x)$, $-\infty<x<\infty$, —уравнение границы $\partial[\varphi(\mathrm{Int}\,\gamma)]$. Имеет место

Теорема Варшавского, [18]. Если $\int\limits_1^\infty \frac{y'(x)^2}{y(x)}\,dx<+\infty$ и $\int\limits^\infty |y''|\,dx<+\infty$, то

$$W(x+iy)=C+\frac{\pi}{2}\int\limits_0^x \frac{dt}{y(t)}+\pi i\frac{y}{2y(x)}+o(1).$$

Обозначим через g внешнюю функцию в $\mathbf{D}$,

$$g(t)\equiv G(\omega^{-1}(t)),\ |t|<1,$$

и заметим (см., например, в [14] интегральное представление для неванлинновского класса), что для таких функций

$$(1-r)\log|g(r)|=o(1),\ r\to1-0,$$

и потому

$$(1-\omega(\tau))\log|G(\tau)|=o(1),\ \tau\to1-0.$$

Пользуясь теоремой Варшавского и равенством $\omega=\varphi^{-1}W\varphi$, находим

$$|\omega(\tau)-1|=\frac{2}{|e^{W(\varphi(\tau))}+1|}\sim\mathrm{const}\cdot\exp\left[-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\log\frac{\tau+1}{1-\tau}}\frac{dt}{y(t)}\right]=^*$$

$$=\mathrm{const}\cdot\exp\left[-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\tau\frac{\varphi'(u)\,du}{\mathrm{arctg}\,\frac{2\sigma(u)}{1-u^2-\sigma(u)^2}}\right]=$$

$$=\mathrm{const}\cdot\exp\left[-\pi\int\limits_0^\tau\frac{du}{(1-u^2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sigma(u)}{1-u^2-\sigma^2}}\right].$$

Остается показать, что условия Варшавского переходят в условия леммы 3:

$$\int\limits^\infty\frac{y'^2}{y}\,dx=\int\limits_0\frac{\rho^2\varphi'(\rho)^2}{\varphi(\rho)}\frac{d\rho}{\rho}=\int\limits_0\frac{\rho\varphi'(\rho)^2}{\varphi(\rho)}\,d\rho,$$

$$\int\limits^\infty|y''|\,dx=\int\limits_0|\varphi'+\rho\varphi''|\,d\rho,$$

* Уравнение γ переходит в $y=y(x)$, где $y(x)=\mathrm{Im}\,\varphi(\tau+i\sigma)$ при $x=\mathrm{Re}\,\varphi(\tau+i\sigma)$, т. е. $y(x)=\mathrm{arctg}\,\frac{2\sigma}{1-(\tau^2+\sigma^2)}$; $\sigma=\sigma(\tau)$.

так как $y(x) = -\varphi$ при $x = \log \frac{1}{\rho}$, и $y'(x) = -\rho\varphi'(\rho)$, $y''(x) = \rho[\varphi'(\rho) + \rho\varphi''(\rho)]$, $dx = -\frac{1}{\rho}d\rho$.

§ 2. Невозможность синтеза в классах эквивалентности для $\log \lambda$

Для применения леммы 1 к пространствам $C_0(\lambda)$ нужно уметь строить функции f, $f \in C_0(\lambda)$, максимум модуля которых $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $r<1$, близок к естественной границе. В случае произвольной скорости роста* мажоранты λ построения и оценки, содержащиеся в этом параграфе, являются точными лишь на классе пространств с эквивалентными $\log \lambda$ (или даже $\log\log\lambda$). При этом условия на правильность роста функции λ оказываются весьма жесткими. Прежде чем формулировать эти условия, отметим, что некоторого сглаживания мажоранты можно всегда добиться за счет полиномиальной регуляризации. Именно, вес

$$\lambda^*(r) = \sup_{\|p\|_{C_0(\lambda)} \leq 1} |p(r)|, \quad 0 \leq r < 1,$$

порождает тот же класс функций, что и λ, но для него $\log\lambda^*$ — выпуклая и монотонная непрерывная функция.

Будем говорить, что *функция* N на промежутке $[0, \infty)$ *принадлежит классу* E, если

1) $N \in C^{(2)}$, $N \uparrow +\infty$ и N—выпукла (вверх или вниз),
2) $N'/N^2 = o(1)$, 3) $N''/(N')^{3/2} = o(1)$.

Нетрудно видеть, что все эти требования относятся к „правильности" роста и не налагают ограничений на скорость возрастания функции N. Легко также убедиться в том, что выпуклость (вверх или вниз) функции $1/N$ обеспечивает выполнение условия 2), а выпуклость (вверх или вниз) функции $(N')^{-1/2}$ в случае конечности $\lim\limits_{x\to\infty} N'(x)$, или функции** $(n')^{-1/2}$ в случае $\lim\limits_{x\to\infty} N'(x) = +\infty$, обеспечивает выполнение 3).

Теорема 1. 1). *Пусть* λ_0—*функция на* $[0,1)$, $\lambda_0 \in C^{(3)}$, $\lambda_0 \nearrow +\infty$; $\Phi\left(\frac{1}{1-r}\right) = \log\log\lambda_0(r)$ *и* $\Phi' \in E$. *Тогда существует* λ_*, $\lambda_* \nearrow +\infty$, *такая что в пространстве* $C_0(\lambda_*)$ *невозможен спектральный синтез и* $\log\log\lambda_0(r) \sim \log\log\lambda_*(r)$ *при* $r \to 1-0$.

---

* Пространства функций конечного порядка роста рассматриваются в § 3.

** $n = N^{-1}$—функция, обратная к функции N.

2). *Если* λ *удовлетворяет условиям п.* 1), *то заключение этого пункта справедливо и для функции* μ: $\mu(r) = \lambda(1 - 1/\log(1-r)^{-1})$, $0 \leqslant r < 1$, (*т. е. для* $\Phi_\mu(t) = \Phi_\lambda(\log t)$, $0 \leqslant t < \infty$).

3) *Пусть* $N \in E$ *и*

$$\log\lambda(r) = \sqrt{2\pi}\,(N'((1-r)^{-1}))^{1/2} \exp\left(\int\limits_0^{(1-r)^{-1}} N(s)\,ds\right),\ 0 \leqslant r < 1.$$

Тогда существует функция λ *такая, что* $\log\lambda_* \sim \log\lambda$, *и в пространстве* $C_0(\lambda_*)$ *невозможен спектральный синтез.*

Замечание. Теорема 1 содержательна для быстро растущих весов λ, у которых $\log\lambda$ растет быстрее любой степени $(1-r)^{-1}$. Для степенных порядков роста $\log\lambda$ ниже будут получены утверждения более точные, чем теорема 1.

Доказательство теоремы 1. Сначала мы установим утверждение 3) теоремы, а затем выведем из него 1) и 2). Положим

$$H(u) = \int\limits_0^u n(t)\,dt,$$

где $n = N^{-1}$ — функция, обратная к функции N, и

$$F(z) = \int\limits_C^\infty e^{uz - H(u)}\,du. \tag{5}$$

Функция F регулярна во всей комплексной плоскости, ограничена в каждой полуплоскости $\mathrm{Re}\,z < C$ и вещественна на оси $\mathrm{Im}\,z = 0$. Пользуясь методом Лапласа, покажем, что

$$\max_{|\zeta|=r} \mathrm{Re}\,F\left(\frac{1}{1-\zeta}\right) \sim \log\lambda(r),\ r \to 1-0, \tag{6}$$

и

$$\min_{|\zeta|=r} \mathrm{Re}\,F\left(\frac{1}{1-\zeta}\right) \sim -\log\lambda(r),\ r \to 1-0. \tag{7}$$

Для этого достаточно проверить, что выполнены условия следующей теоремы М. А. Евграфова [17]:

Теорема М. А. Евграфова, [17]. *Пусть* $H \in C^{(2)}_{[0,\infty)}$, *и*

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 H''(x) = \lim\limits_{x\to\infty} H'(x) = +\infty$.

б) *При любом* A, $A > 0$, $H''(u) \sim H''(x)$, *если* $x \to +\infty$ *и* $|u - x| \leqslant A(H''(x))^{-1/2}$.

Тогда функция $x \to xt - H(x)$ *имеет при достаточно больших* t *единственный максимум* $x = c(t)$, *и интеграл* $F(t) = \int\limits_0^\infty e^{xt - H(x)}\,dx$ *асимптотически равен вкладу этой точки:*

$$V_c(t) = \sqrt{2\pi}\,\rho_{c(t)}\cdot\exp\left(-H(c(t)) + tc(t)\right)$$

(*здесь* $\rho_{c(t)} = [H''(c(t))]^{-1/2}$ — *радиус влияния точки максимума* $c(t)$).

В нашем случае $H'(u) = n(u)$ и $H''(u) = 1/N'(n(u))$, так что первое условие теоремы Евграфова сводится к условиям 1) — 2) для функции N из определения класса E. Так как $H''(u) = 1/N'(n(u)) = n'(u)$ — монотонная функция, то для проверки условия б) нужно убедиться в том, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H''(x)}{H''(x \pm A\rho_x)} = 1$$

для любого A, $A > 0$. Обозначив $g(x) = H''(x)$, получим

$$\left|\frac{g(x + A\rho_x)}{g(x)} - 1\right| = \left|\frac{g'(\xi)\,A\rho_x}{g(x)}\right| = \frac{A\,|g'(\xi)|}{g(x)^{3/2}} \leqslant$$

$$\leqslant A\,\frac{|g'(\xi)|}{g(\xi)^{3/2}} = A\,\frac{|N''(n(\xi))|}{N'(n(\xi))^{3/2}},$$

если H'' убывает (то есть N выпукла вниз). Аналогичные оценки для $\left|\frac{g(x)}{g(x + A\rho_x)} - 1\right|$ при противоположном знаке выпуклости функции N, вместе с условием 3) из определения класса E приводят к требуемому результату. Точно так же рассматривается и отношение $\frac{g(x - A\rho_x)}{g(x)}$.

Применяя теорему Евграфова (с $c(t) = N(t)$ и $(H''(c(t)))^{-1/2} = (N'(t))^{1/2}$, получим асимптотическое равенство, близкое к (6):

$$\max_y \operatorname{Re} F(x + iy) = \int_0^\infty e^{ux - H(u)}\,du \sim$$

$$\sim \sqrt{2\pi}\,(N'(x))^{1/2} \exp\left(-H(N(x)) + xN(x)\right)^* =$$

$$= \sqrt{2\pi}\,(N'(x))^{1/2} \exp\left(\int_0^x N(s)\,ds\right).$$

Так как при отображении $\zeta \to \frac{1}{1-\zeta}$ окружность $\{z\colon |z| = r\}$, $r < 1$, переходит в окружность ∂K_r с диаметром $\left[\frac{1}{1+r}, \frac{1}{1-r}\right]$, то соотношение (6) доказано.

---

* Действительно, $H(N(x)) = \int_0^{N(x)} n(t)\,dt = \int_0^x sN'(s)\,ds = sN(s)\Big|_0^x -$
$- \int_0^x N(s)\,ds = xN(x) - \int_0^x N(s)\,ds.$

Для того чтобы проверить утверждение (7), получим сначала асимптотическое выражение для $\min_y \operatorname{Re} F(x+iy)$, а затем перейдем на окружность ∂K_r. По определению вклада точки максимума (см. [17], стр. 20) в интеграл (5) имеем

$$F(x) \sim V_c(x) = \int\limits_{c(x)-\rho_c(x)\tau(x)}^{c(x)+\rho_c(x)\tau(x)} e^{xu-H(u)}\, du,$$

где функция τ, $\tau(x) \nearrow +\infty$, возрастает сколь угодно медленно. Обозначим нижний предел интегрирования через $a(x)$, а верхний — через $b(x)$. Тогда

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{N(x) - \tau(x)\, N'(x)^{1/2}}{N(x) + \tau(x)\, N'(x)^{1/2}} = 1 - 2\tau(x)\,\frac{N'(x)^{1/2}}{N(x) + \tau(x)\, N'(x)^{1/2}} =$$

$=1-o(1)$, если выбрать τ так, что $\tau(x)\dfrac{N'(x)^{1/2}}{N(x)} = o(1)$ (см. условие 2) из определения класса E). Следовательно

$$1 > \frac{a(x)}{b(x)} = 1 - o(1),$$

и если положить

$$y(x) = \frac{\pi(1-\varepsilon)}{a(x)}, \quad \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{a(x)}{b(x)}, \tag{8}$$

то получим

$$a(x) \leqslant u \leqslant b(x) \Rightarrow \pi(1-\varepsilon) \leqslant yu \leqslant \pi(1+\varepsilon),$$

и значит

$$-F(x) \leqslant \min_y \operatorname{Re} F(x+iy) \leqslant \operatorname{Re} F(x+iy(x)) =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{ux-H(u)} \cos uy(x)\, du = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} e^{ux-H(u)} \cos uy(x)\, du + o(V_c(x)) \leqslant$$

$$\leqslant \cos\pi(1-\varepsilon) \int\limits_{a(x)}^{b(x)} e^{ux-H(u)}\, du + o(V_c(x)) =$$

$$= \cos\pi(1-\varepsilon)\cdot V_c(x) + o(V_c(x)) \sim -V_c(x),$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$ (см. (8)). Таким образом

$$\min_y \operatorname{Re} F(x+iy) \sim (-V_c(x)) \sim (-F(x)).$$

Чтобы вывести отсюда соотношение (7), заметим сначала, что для всех z, $z \in K_r$, имеем $\operatorname{Re} F(z) \geqslant -F(\operatorname{Re}(z)) > -F\left(\dfrac{1}{1-r}\right) \sim -V_c\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$.

Поэтому достаточно указать точку z_r, $z_r \in K_r$ такую, что

$$\operatorname{Re} F(z_r) \sim -V_c\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Лемма 5. $N'(u) \sim N'(V)$ при $u \to +\infty$ и $0 < u - V < AN(u)^{-1}$, где A, $A > 0$, произвольно.

Лемма 6. Если $x_r = \frac{1}{1-r} - AN\left(\frac{1}{1-r}\right)^{-1}$, $y_r = BN(x)^{-1}$, то $z_r = x_r + iy_r \in K_r$ при r достаточно близких к 1. Здесь A и B—произвольные положительные числа.

Доказательство леммы 5 получается из определения класса E на том же пути, что и вывод условия б) к теореме Евграфова, и потому может быть опущено.

Доказательство леммы 6. Нужно доказать, что $\left|\frac{1}{1-r^2} - z_r\right|^2 \leqslant \frac{r^2}{(1-r^2)^2}$ при больших r. Имеем

$$\left|\frac{1}{1-r^2} - z_r\right|^2 = \left(x_r - \frac{1}{1-r^2}\right)^2 + y_r^2 = \left(\frac{r}{1-r^2} - \frac{A}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right)^2 +$$

$$+\frac{B^2}{N^2\left(\frac{1}{1-r} - \dots\right)} = \frac{r^2}{(1-r^2)^2} - \frac{2Ar}{(1-r^2)\,N\left(\frac{1}{1-r}\right)} +$$

$$+\frac{A^2}{N^2\left(\frac{1}{1-r}\right)} + \frac{B^2}{N^2\left(\frac{1}{1-r} - \dots\right)}.$$

Остается проверить, что

$$\frac{2Ar}{(1-r^2)\,N\left(\frac{1}{1-r}\right)} > \frac{A^2}{N^2\left(\frac{1}{1-r}\right)} + \frac{B^2}{N^2\left(\frac{1}{1-r} - \dots\right)}$$

при $r \to 1-0$, а для этого достаточно

$$N\left(\frac{1}{1-r}\right)^{-1} > N\left(\frac{1}{1-r} - \frac{A}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right)^{-2} \quad \text{при} \quad r \to 1-0.$$

Из леммы 5 вытекает равенство

$$N\left(\frac{1}{1-r}\right) - N\left(\frac{1}{1-r} - \frac{A}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right) = N'(\xi)\,\frac{A}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)} =$$

$$= N'\left(\frac{1}{1-r}\right)\cdot\frac{A\,(1+o\,(1))}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

и потому

$$N\left(\frac{1}{1-r}-\frac{A}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right)=N\left(\frac{1}{1-r}\right)\left\{1-\frac{N'\left(\frac{1}{1-r}\right)}{N^2\left(\frac{1}{1-r}\right)}A\,(1+o\,(1))\right\}=$$

$$=N\left(\frac{1}{1-r}\right)(1+o\,(1)),$$

в силу условия 2) из определения класса E. Лемма доказана.

На основании леммы 6 выберем $A\,(r)$ так, чтобы точка

$z_r=x_r+i\pi N\,(x_r)^{-1}$, $x_r=\dfrac{1}{1-r}-A_r\,N\left(\dfrac{1}{1-r}\right)^{-1}$, принадлежала K_r при $r_0\leqslant r<1$ и $\lim\limits_{r\to 1-0}A_r=0$. Тогда*

$$\operatorname{Re}F\,(z_r)=-V_c\,(x_r)(1+o\,(1))=-\sqrt{2\pi}\,N'\,(x_r)^{1/2}\,e^{\int_0^{x_r}N(s)}\cdot(1+o\,(1))=$$

$$=-\sqrt{2\pi}\,N'\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}\exp\left(\int\limits_0^{(1-r)^{-1}}N\,(s)\,ds\right)\cdot\left[\frac{N'\,(x_r)}{N'\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left(\exp\int\limits_{x_r}^{(1-r)^{-1}}N\,(s)\,ds\right)(1+o\,(1))=-V_c\left(\frac{1}{1-r}\right)(1+o\,(1)),$$

так как $N'\,(x_r)\sim N'\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$ в силу леммы 5, и

$$1\leqslant\exp\left(\int\limits_{(1-r)^{-1}-AN\left(\frac{1}{1-r}\right)^{-1}}^{(1-r)^{-1}}N\,(s)\,ds\right)\leqslant\exp\left(AN\left(\frac{1}{1-r}\right)^{-1}N\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)=$$

$$=\exp A_r\to 1\qquad\text{при}\quad r\to 1-0.$$

Итак, асимптотические равенства (6) и (7) доказаны. Положим теперь

$$\lambda_*\,(r)=\max_{|\zeta|<r}\left|\exp\left(-F\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)\right)\right|=\exp\left(-\min_{|\zeta|<r}\operatorname{Re}F\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)\right),$$

$$f\,(\zeta)=(1-\zeta)\exp\left(-F\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)\right),\quad |\zeta|<1,$$

---

* Нетрудно видеть, что если вместо формул (8) положить $y\,(x)=\pi N\,(x)^{-1}$, то $a\,(x)\,\dfrac{\pi}{N\,(x)}=\pi\,(1+o\,(1))$ и $b\,(x)\,\dfrac{\pi}{N\,(x)}=\pi\,(1+o\,(1))$, и потому $\operatorname{Re}F\,(x+iy\,(x))\sim$ $\sim(-V_c\,(x))$.

и применим к этой паре* лемму 1. Из-за вещественности функции F на $(-\infty, \infty)$ кривая γ: $\zeta=\zeta(r)$, $0\leqslant r<1$, на которой достигается верхняя грань модуля $\left|\frac{f(\zeta)}{1-\zeta}\right|$, удовлетворяет условиям леммы 1,

$$\frac{\lambda_*(|\zeta|)}{|f(\zeta)|}=|1-\zeta|^{-1},\ \zeta\in\gamma,$$

и в силу этой леммы $M_f\neq C_0(\lambda_*)$, то есть f — не слабо обратимый элемент в $C_0(\lambda_*)$ и спектральный синтез невозможен. Утверждение 3) теоремы 1 полностью доказано.

Утверждение 1) вытекает из уже доказанного, если заметить (см., например, условие 2) из определения класса E), что для функции λ из третьей части теоремы (с $N=\Phi'$) имеем

$$\log\log\lambda_0(r)\sim\log\log\lambda(r),\ r\to 1-0.$$

Утверждение 2) получается из 1) и 3) с помощью подстановки $z\to\log z$, $\operatorname{Re} z\geqslant 0$, в конструкции, использованной при доказательстве утверждения 3). Теорема доказана.

§ 3. Слабый рост: $\log\lambda(r)=A(1-r)^{-B}$

Теорема 2. *Если*

$$\lambda(r)=\exp\frac{A}{(1-r)^{B}},\ 0\leqslant r<1,\quad A>0,$$

и либо 1) $0\leqslant B<1$, *либо* 2) $B=2, 3,\cdots$, *то в пространстве* $C_0(\lambda)$ *спектральный синтез невозможен.*

Замечание 1. Как и в § 1 справедливость теоремы 2 вытекает из существования в $C_0(\lambda)$ не слабо обратимой функции f, всюду отличной от нуля. При этом, случай 1) получается как следствие к теореме 3 (с $f=f_0$, см. § 3 ниже; близкие утверждения имеются в [20] и [22]), а в случае 2) используется лемма 1 с $G\equiv 1$.

Доказательство теоремы 2 начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 7. *Пусть*

$$p(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{1}{(1-z)^k},\quad |z|<1,\tag{9}$$

a_k — *вещественные числа,* $n\geqslant 2$. *Тогда:*

1) *Функция* m,

$$m(r)=\max_{|z|=r}\operatorname{Re} p(z),\qquad 0\leqslant r<1,\tag{10}$$

представляется в виде

---

* $f\in C_0(\lambda_*)$, так как $\max\limits_{|\zeta|=r}|f(\zeta)|$ может достигаться при r, близких к 1, лишь в достаточно малой окрестности точки $\zeta=1$.

$$m(r)=\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{1}{(1-r)^k}+q(r), \tag{11}$$

где b_k вещественны, $b_n>0$, если $a_n\neq 0$, и q — ограниченная на $[0, 1)$ функция. При этом максимум в (10) *достигается на кривой γ, удовлетворяющей условиям леммы* 1.

2) *Для любых $b_0,\cdots, b_n$ с $b_n>0$ существуют $a_0,\cdots, a_n$ с $a_n<0$, такие, что выполнены равенства* (9)—(11).

Прежде чем доказывать лемму 7 отметим, что теорема 2, случай 2), сразу следует из леммы 1, если положить $f(z)=\exp p(z)$, где полином p выбран в соответствии с леммой 7 так, что* $b_n=A$, $b_k=0$, $0\leqslant k\leqslant n-1$, и $a_n<0$. Итак, остается привести

Доказательство леммы 7. Сделаем замену переменной, положив $w=(1-z)^{-1}$, и заметим, что окружность $\{z: |z|=r\}$ перейдет при этом в окружность $C_r=\left\{w: \left|w-\frac{1}{1-r^2}\right|=\frac{r}{1-r^2}\right\}$, $0\leqslant r<1$. Поэтому

$$m(r)=\max_{w\in C_r} \operatorname{Re} p\left(\frac{w-1}{w}\right)=\max_{0<\varphi<2\pi} \operatorname{Re} p_1\left(\rho\frac{\rho+(\rho-1)e^{i\varphi}}{\rho+(\rho-1)}\right), \tag{12}$$

где $\rho=\frac{1}{1-r}$; $p_1(w)=\sum_{k=0}^{n} a_k w^k$. Проверим сначала, что правая часть равенства (12) с точностью до ограниченного при $\rho\to\infty$ слагаемого представляет собой полином (степени n, если $a_n\neq 0$) от ρ. Для этого достаточно установить, что существует функция t_+, $t_+=t_+(\rho)$, регулярно зависящая от ρ в окрестности бесконечности, $0<\lim_{\rho\to\infty} t_+(\rho)<+\infty$, и такая, что $\cos\varphi=t_+(\rho)$ доставляет максимум выражению** из формулы (12). Имеем

$$m(r)=\max_{\varphi} \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\rho\frac{\rho+(\rho-1)e^{i\varphi}}{\rho+(\rho-1)}\right)^k=$$

$$=\max_{\varphi}\left(a_n\rho^n\frac{\rho^n \operatorname{Re}\left(1+e^{i\varphi}-\frac{1}{\rho}e^{e\varphi}\right)^n}{(2\rho-1)^n}+\cdots\right), \tag{13}$$

причем остальные слагаемые этой суммы есть $o(\rho^n)$, $\rho\to\infty$,

т. е.
$$m(r)=\rho^n\frac{1}{2^n}\max_{\varphi} a_n F(\varphi),$$

$$F(\varphi)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^k \cos k\varphi+o\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

---

* В элементарном случае $B=n=2$ все постоянные могут быть найдены явно, и мы получим: $a_2=-4A$; $a_1=6A$.

** которое, как легко видеть является полиномом по целым степеням $\cos\varphi$.

и остаток $o\left(\frac{1}{\rho}\right)$ регулярно зависит от $\frac{1}{\rho}$ в окрестности точки $\rho=\infty$. Уравнением экстремальных точек будет

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^k \cdot k\,(-\sin k\varphi)+o\left(\frac{1}{\rho}\right)=0.$$

При $\rho=\infty$ это уравнение переходит в

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k\,(-\sin k\varphi)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\mathrm{Re}\,(1+e^{i\varphi})^n=0,$$

т. е. $\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\frac{\varphi n}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}\right)=0$. Теперь нетрудно подсчитать, что наибольшее значение нужная нам функция (при $\rho=\infty$) принимает в точках* $\varphi=\pm\frac{2\pi}{n+1}$ (которые, кстати, будут простыми нулями производной $\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\mathrm{Re}\,(1+e^{i\varphi})^n$). По теореме о неявной функции отсюда следует существование требуемой ветви t_+, $\cos\varphi_+(\rho)=t_+(\rho)$, регулярной в окрестности $\rho=+\infty$ и такой, что $\varphi_+(\infty)=\frac{2\pi}{n+1}$. Ясно, что тот же экстремум достигается и на симметричной кривой $\varphi_-=\varphi_-(\rho)$ с $\varphi_-(\infty)=-\frac{2\pi}{n+1}$. Утверждение 1) доказано.

Проверку второго утверждения леммы начнем с того (очевидного после проделанных выкладок) замечания, что старший коэффициент b_n в (11) пробегает всю полуось $[0,\infty)$, когда a_n пробегает $(-\infty, 0]$. Так как при изменении a_m меняются только коэффициенты b_k с номерами $k\leqslant m$ и так как $b_1,\cdots, b_n$ непрерывно зависят от $a_1,\cdots,a_n$, то достаточно проверить, что b_m принимает сколь угодно большие и сколь угодно малые значения при соответствующем выборе a_m. Ясно однако, что при** $\varphi=\varphi_+(\rho)$ m-ое слагаемое в сумме из формулы (13) имеет вид

$$a_m\,\rho^m\left(\mathrm{const}+o\left(\frac{1}{\rho}\right)\right),$$

т. е. его вклад в соответствующий максимум асимптотически линейно зависит от a_m. Лемма 7 доказана.

Замечание 2. Отметим, что задачи о слабой обратимости становятся тем проще, чем „мягче“ метрика (топология) рассматриваемого пространства (см. также об этом начало § 1). Например (и это уже было отмечено в § 1 при $A=0$) из результатов § 5 следует, что

* Рассматривается только случай $a_n<0$; $a_n>0$ исследуется аналогично.

** Асимптотика $\varphi_+(\rho)$ не зависит от a_m, $m<n$.

в пространстве $\bigcap_{\varepsilon>0} C_0\left(\exp\frac{A+\varepsilon}{(1-r)^B}\right)$, $B>1$, $A>0$, каждая функция, не обращающаяся в нуль, слабо обратима. Многие классические пространства аналитических функций, выделяемые ограничениями на их рост около границы (учитывающие, например, порядок и тип функции, или уточненные порядок и тип и т. д.), имеют вид $C_0(\lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta)$, $\bigcap_{\beta>\beta_0} C_0(\lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta)$ или $\bigcup_{\beta>\beta_0} C_0(\lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta)$, где λ_1 и λ_2 — две заданные мажоранты. Было бы интересно выяснить сколь быстро должна расти функция λ_2 (в сравнении с λ_1), чтобы в пространствах двух последних типов каждая не обращающаяся в нуль функция была слабо обратима (т. е. был возможен спектральный анализ).

§ 4. Слабая обратимость ограниченных функций

Все первые теоремы об отсутствии спектрального синтеза (см. [9], [11], [12], [20]) основывались на неявном применении леммы 1 в различных конкретных ситуациях к функции f_0, $f_0(z)=\exp\dfrac{1}{z-1}$, $|z|<1$, убывание которой на вещественном радиусе является экстремальным среди ограниченных функций. Эта универсальность функции f_0 нуждается в испытании, и следующая теорема дает (может быть точную?) нижнюю грань мажорант, которые допускают слабое обращение f_0.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda \in C^{(2)}[0,1)$, $\lambda \nearrow +\infty$, *и* $\varphi(r)=\left(\dfrac{1-r}{\log\lambda(r)}\right)^{1/2}$. *Пусть далее*

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } \varphi''<0,\ r_0\leqslant r<1; \quad \text{б) } \sup\limits_{r}(1-r)\log\lambda(r)<+\infty; \\ \text{в) } \sup\limits_{0<r<1}(1-r)(\log\log\lambda(r))'<+\infty. \end{array}\right\} \tag{14}$$

Если

$$\int_0^1 \frac{dr}{\varphi(r)}=\int_0^1\frac{\log^{1/2}\lambda(r)}{(1-r)^{1/2}}\,dr<+\infty, \tag{15}$$

то $M_{f_0}\neq C_0(\lambda)$. *Если же* $\varliminf\limits_{r\to 0}(1-r)\log\lambda(r)>0$, *то* $M_{f_0}=C_0(\lambda)$.

Замечание. Вместе с f_0 условия (14) и (15) дают необратимость в $C_0(\lambda)$ произвольной ограниченной функции f, $f\neq 0$, для которой существует ζ, $|\zeta|=1$ такое, что $\varliminf\limits_{r\to 1-0}(1-r)\log|f(r\zeta)|<0$. Как и при обсуждении теоремы 1, можно заметить, что условия (14) являются ограничениями „правильности"*, но не скорости роста мажоран-

* Выполненными, например, для всех мажорант λ с $\log\lambda$, зависящим от степеней $\frac{1}{1-r}$, $\log\frac{1}{1-r}$, $\log\log\frac{1}{1-r}$ и т. д.

ты λ. В самом деле, например, при $(1-r)(\log\log\lambda(r))'\geqslant 1$, $r\geqslant r_0$, получим $\lambda(r)\geqslant \exp\dfrac{1}{1-r}$, то есть слабую обратимость f_0 в $C_0(\lambda)$. Отметим, наконец, что в степенной шкале $C_0(\lambda_\alpha)$, $0\leqslant\alpha$, $\lambda_\alpha(r)=\exp\dfrac{A}{(1-r)^\alpha}$, $1\leqslant r<1$, условие необратимости (15) является точным.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что в условиях теоремы существует гладкая кривая γ требуемого леммой 1 типа, которая касается окружности ∂D и для которой

$$\int\limits_\gamma \log\frac{\lambda(|z|)}{|f_0(z)|}|dz|=\int\limits_\gamma \log\lambda(|z|)\,|dz|+\int\limits_\gamma\log\frac{1}{|f_0(z)|}\,|dz|<+\infty.$$

Так как $|f_0|\leqslant 1$ в D, то интегралы обязаны сходиться по отдельности Если $y=y(x)$, $0\leqslant x<1$, —уравнение верхней половины $\gamma_+=\gamma\cap\{z$ Im $z>0\}$ кривой γ и $z=x+iy$, то*

$$\int\limits_{\gamma_+}\log\frac{1}{|f_0(z)|}|dz|=\int\limits_{\gamma_+}\frac{1-x}{(1-x)^2+y(x)^2}\,ds=$$

$$=\int\limits_{\gamma_+}\frac{(1-x)\,ds}{y^2(x)\left(\left(\frac{1-x}{y}\right)^2+1\right)}\asymp\int\limits_{\gamma_+}\frac{1-x}{y^2(x)}\,ds,$$

поскольку γ_+ касается $\partial D\left(\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1-x}{y(x)}=0\right)$. Записывая уравнение γ_+ в полярных координатах: $r=r(\varphi)$, $0<\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, приходим к задаче отыскания достаточно гладкой функции $r(\varphi)$, для которой

$$\int\limits_0\frac{1-r\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi<+\infty,$$

$$\int\limits_0\log\lambda(r)\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi<+\infty.$$

Учитывая, что $\dfrac{1-r^2}{\varphi}=\dfrac{1-(x^2+y^2)}{r\sin\varphi}\cdot\dfrac{r\sin\varphi}{\varphi}=\left|\dfrac{(1-x)(1+x)}{y}-y\right|\times$ $\times r\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$ стремится к нулю при $\varphi\to 0$ (т. е. $y\to 0$), получим $\lim\limits_{\varphi\to 0}r'(\varphi)=0$, $\sqrt{r^2+r'(\varphi)^2}\sim 1$ при $\varphi\to 0$. Итак, должны быть конечными интегралы

$$\int\limits_0\log\lambda(r(\varphi))\,d\varphi$$

---

* Знак $\asymp$ означает равносходимость интегралов.

и

$$\int\limits_0 \frac{1-r\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \int\limits_0 \frac{1-r\,(1-2\sin^2\varphi/2)}{r^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \asymp \int\limits_0 \frac{1-r}{\varphi^2}\,d\varphi.$$

Положим $\dfrac{1}{1-r(\varphi)}\cdot\log\lambda(r(\varphi)) = \dfrac{1}{\varphi^2}$. Тогда

$$\varphi^2(r) = \frac{1-r}{\log\lambda(r)},$$

$$\varphi'(r) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-r}{\log\lambda(r)}\right)^{-1/2}\frac{\lambda(r)\log\lambda(r)+\lambda'(r)(1-r)}{\lambda(r)\log^2\lambda(r)},$$

и потому

$$\int\limits_0 \frac{1-r}{\varphi^2}\,d\varphi = \int\limits_0 \log\lambda(r(\varphi))\,d\varphi = \int^1 \varphi'(r)\log\lambda(r)\,dr =$$

$$= \int^1 \frac{\log^{1/2}\lambda(r)}{(1-r)^{1/2}}\,dr + \int^1 \frac{\lambda'(r)\,(1-r)^{1/2}}{\lambda(r)\log^{1/2}\lambda(r)}\,dr < +\infty,$$

так как первый из этих интегралов сходится по условию (15), а второй сводится к нему с помощью оценки (14) в):

$$\frac{\lambda'(r)(1-r)^{1/2}}{\lambda(r)\log^{1/2}\lambda(r)} = \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)}\cdot\frac{(1-r)}{\log\lambda(r)}\cdot\frac{\log^{1/2}\lambda(r)}{(1-r)^{1/2}} \leqslant \mathrm{const}\,\frac{\log^{1/2}\lambda(r)}{(1-r)^{1/2}}.$$

Пусть G — внешняя функция в области $\operatorname{Int}\gamma$ с $|G(z)| = \lambda(|z|)/|f(z)|$, $z\in\gamma$. Пользуясь касанием кривых γ и ∂D, и условиями а) – б) нетрудно показать, что для пары f_0, G выполняются все условия леммы 1 Действительно, в проверке нуждается лишь условие 2) этой леммы, которое мы выведем из представления

$$\log G(z) = \int\limits_\gamma G(t)\,d\mu(t, z),$$

где $\mu(e, z)$ — гармоническая мера множества e, $e\subset\gamma$, в точке z относительно области $\operatorname{Int}\gamma$. Требуемая оценка $\left(\log G(r) = o\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right)$ получается из следующих двух элементарных лемм*.

Лемма 8. *Если* $\varphi''<0$, $r_0\leqslant r<1$, *то* γ — *выпуклая кривая.*

Лемма 9. *Если* γ — *гладкая* ($\in C^{(1)}$) *и выпуклая кривая, то при всех* r *и* Δ

$$\mu(\Delta, r) \leqslant \frac{1}{\pi}\,\alpha(\Delta, r) \leqslant \mathrm{const}\cdot\frac{1}{1-r}\,|\Delta|, \qquad (16)$$

* и теоремы Лебега о предельном переходе (следует учесть, что $\lim\limits_{r\to 1-0}\mu(\Delta, r) = 0$, если замкнутая дуга Δ не содержит точки 1).

где $\alpha(\Delta, r)$ — *угол, под которым дуга* Δ, $\Delta \subset \gamma$, *видна из точки* r, $|\Delta|$ — *длина* Δ.

Опуская доказательства леммы 8 (сводится к дифференцированию параметрически заданной функции $y = y(x)$) и леммы 9 (сводится к неравенствам между сторонами некоторых треугольников на плоскости), отметим только, что первая из оценок (16) составляет содержание известной теоремы Линделефа (см., например, [24], стр. 346). Основное утверждение теоремы доказано.

Что касается слабой обратимости f_0 в пространстве $C_0(\lambda)$ со степенным ростом $\log \lambda$, то мы установим ее сейчас лишь при дополнительном условии $(1-r)\log \lambda(r) \geqslant 1$, $r_0 \leqslant r < 1$. Общий случай будет вытекать из теоремы 4 (§ 5). Если же $\lambda(r) \geqslant \exp \frac{1}{1-r}$, $r \geqslant r_0$, то $\sigma_n f_0 \to 1$, $n \to \infty$, в смысле слабой сходимости в пространстве $C_0(\lambda)$, где σ_n — средние арифметические ряда Тейлора для функции $1/f_0$. Действительно

$$\|\sigma_n f_0\|_{C_0(\lambda)} = \max_{|z|<1} \frac{|\sigma_n(z) f_0(z)|}{\lambda(|z|)} \leqslant \max_{|z|<1} \frac{|\sigma_n(z)|}{\exp((1-|z|)^{-1})} \leqslant 1,$$

поскольку $\max\limits_{|z|<r} |\sigma_n(z)| \leqslant \max\limits_{|z|<r} |1/f_0(z)| = \exp\limits_{z}((1-r)^{-1})$. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(z) f_0(z) = 1$ для любого z, $|z|<1$, а отсюда, как уже отмечалось в следствии к лемме 2, вытекает слабая сходимость $\sigma_n \to 1$. Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е. Как уже отмечалось в примечании на странице 347 теорема 3 гарантирует необратимость функции f_0 в любом пространстве X, к которому приложима лемма 1 и для которого

$$\int_0^1 \frac{\log^{1/2} \|\mu_r\|}{(1-r)^{1/2}}\, dr < +\infty.$$

Неясно, однако, будет ли условие (15) необходимым для необратимости f_0 в $C_0(\lambda)$, хотя бы при дополнительных условиях гладкости типа (14).

§ 5. Схема Смирнова-Лебедева-Шапиро

В этом параграфе устанавливаются некоторые утверждения о слабой обратимости в положительном направлении. Они основаны на следующем рассуждении, использованном для пространств с интегральными метриками в работах В. И. Смирнова—Н. А. Лебедева [21], стр. 240, и Шапиро [20]. Пусть $f \in X$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}$, и пространство X удовлетворяет условиям из § 1. Положим для $0 \leqslant r < 1$

$$M_f(r) = \max_{|z|<r} |f(z)|, \quad m_f(r) = \min_{|z|<r} |f(z)|.$$

Если функция $1/m_f$ „не слишком велика“, например, так, что при некотором ε, $\varepsilon>0$, $M_f(r)/m_f^{\varepsilon}(r)$ мажорируется $\|\varphi_r\|$, то в некоторых пространствах X оказывается возможным деление f/f^t без выхода из подпространства M_f, так что отображение $t \to f^t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, стягивает f в 1 в подпространстве M_f. Вот пример простейшей теоремы такого типа.

Теорема 4. *Пусть* $\lambda(r)\uparrow+\infty$, $r\to1-0$, *и существует* ε, $\varepsilon>0$, *такое, что* $M_f(r)/m_f^{\varepsilon}(r)<\text{const}\,\lambda(r)$, $r_0\leqslant r<1$. *Тогда функция* f *слабо обратима в* $C_0(\lambda)$.

Доказательство. Обозначим через σ_n, $n\geqslant1$, арифметические средние ряда Тейлора для функции f^{-t}, $0<t\leqslant\varepsilon$. Тогда $\max\limits_{|z|\leqslant r}|\sigma_n(z)|\leqslant\max\limits_{|z|\leqslant r}|f^{-t}(z)|=m_f(r)^{-t}$ и

$$\|\sigma_n f-f^{1-t}\|_{C_0(\lambda)}=\max_{|z|<1}\frac{|\sigma_n f-f^{1-t}|}{\lambda(|z|)}\leqslant$$

$$\leqslant\max_r\frac{M_f(r)\max\limits_{|z|=r}|\sigma_n-f^{-t}|}{\lambda(r)}\leqslant\max\,[2M_f(r)/m_f^t(r)]\,\lambda(r)^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\text{const}\cdot\max_r\lambda(r)^{-1}\cdot M_f(r)\cdot m_f(r)^{-\varepsilon}\leqslant\text{const},$$

при всех n, $n\geqslant1$. Следовательно $\sigma_n f\xrightarrow{\text{сл.}}f^{1-t}$, $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$, и потому $f^{1-t}\in M_f$. Повторяя этот процесс $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ раз добьемся, чтобы $1\in M_f$. Все доказано.

Следствие 1. *Функция* f *слабо обратима в* $C_0(\lambda)$, *если* $\lim\limits_{r\to1-0}(1-r)\log\lambda(r)>0$, так как в этом случае $M_{f_0}(r)\equiv1$ и $1/f_0^{\varepsilon}\in C_0(\lambda)$ при достаточно малых ε, $\varepsilon>0$. Отсюда вытекает, что существует вес λ, $\lambda(r)\uparrow\infty$ и $\lim\limits_{r\to1-0}(1-r)\log\lambda(r)=0$, для которого все же $M_{f_0}=C_0(\lambda)$. Это несколько сближает необходимые и достаточные условия для обратимости f_0, данные в теореме 3.

Следствие 2. *Обозначим через* m_λ *миноранту класса* $C_0(\lambda)$, *то есть такую функцию, для которой*

$f\in C_0(\lambda)$, $f(z)\neq0$, $z\in\mathrm{D}\Rightarrow|f(z)|\geqslant m_\lambda(|z|)^A$ *при некотором* A, $A>0$. *Если* $\inf\limits_{\delta>0}\sup\limits_r\dfrac{\lambda(r)\,m_\lambda(r)^{-\delta}}{\lambda_1(r)}<+\infty$, *то* $f\in C_0(\lambda)$, $f(z)\neq0\Rightarrow f$ *слабо обратима в* $C_0(\lambda_1)$.

Замечание 1. Грубую оценку миноранты для класса $C_0(\lambda)$ можно указать, используя интеграл Пуассона

$$\log|f(z)|\geqslant-\frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}\left(\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\theta})|d\theta+|\log|f(0)||\right),$$

$$\log |f(z)| \geqslant -\inf_{|z|<\rho<1} \left\{\frac{\rho+|z|}{\rho-|z|} \log \lambda(\rho) + \frac{\mathrm{const}}{\rho-|z|}\right\},$$

то есть функция m_λ — не хуже, чем

$$m_\lambda^*(r) = \exp\left(-\inf_{r<\rho<1}\left(\frac{\rho+r}{\rho-r}\log\lambda(\rho) + \frac{C}{\rho-r}\right)\right).$$

Например, для $\lambda\equiv 1$, наилучшая миноранта есть

$$m_1(r) = \exp\frac{1}{r-1},\ 0<r<1,$$

а для

$$\lambda(r)=\exp\left(\frac{1}{1-r}\prod_{k=1}^{m}\left(\log_k\frac{1}{1-r}\right)^{-2}\prod_{k=m}^{n}\left(\log_k\frac{1}{1-r}\right)^{\alpha_k}\right),$$

и эта миноранта является наилучшей (см. [16]; здесь $\log_k t=\log\log_{k-1} t$, $\log_1 t=\log t$).

Замечание 2. Необязательно стягивать f в постоянную функцию 1 с помощью степеней: $t\to f^t$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Например, нетрудно доказывается

Теорема 5. *Предположим, что для любой гармонической в круге* D *функции* u, *такой что* $u(0)=1$ *и* $u(z)\leqslant\log\lambda_1(|z|)$, *справедливо неравенство*

$$|u(z)|\leqslant K_u\cdot\log\lambda_2(|z|),\ K_u>0,$$

а числа $c_n=\sup\limits_r\dfrac{\lambda_1(r)(\log\lambda_2(r))^n}{\lambda(r)}$, $n\geqslant 1$, *таковы что* $\sup\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{c_n}{n!}\right)^{1/n}<\infty$. *Тогда каждая функция* f, $f\in C_0(\lambda_1)$ $f(z)\neq 0$, *слабо обратима в* $C_0(\lambda)$

Замечание 3. М. Картрайт [15] показала, что для $\lambda_1(r)=\exp\dfrac{1}{(1-r)^\alpha}$ можно взять $\lambda_2=\exp\dfrac{1}{(1-r)^{\alpha+1}}$, если $0<\alpha<1$, $\lambda_2(r)=\exp\left(\dfrac{\log^2(1-r)^{-1}}{1-r}\right)$, если $\alpha=1$ (см. также [16]), и $\lambda_2(r)=\lambda_1(r)$, если $\alpha>1$.

Из последнего замечания и теорем 4 и 5 вытекает

Следствие 3. *Функция* f, $f(z)\neq 0$, $|z|<1$,

а) *слабо обратима в* $C_0\left(\exp\dfrac{1}{(1-r)^{\alpha-1}}\right)$, *если* $f\in C_0\left(\exp\dfrac{1}{(1-r)^\alpha}\right)$, $0<\alpha<1$;

б) *слабо обратима в* $C_0\left(\exp\dfrac{\log^2(1-r)^{-1}}{1-r}\right)$, *если*

$$f\in C_0\left(\exp\frac{1}{1-r}\right);$$

в) *слабо обратима в* $C_0\left(\exp\frac{A+\varepsilon}{(1-r)^\alpha}\right)$, *если* $f\in C_0\left(\exp\frac{A}{(1-r)^\alpha}\right)$, $\alpha>1$ (ε, $\varepsilon>0$, *произвольно*).

ЛОМИ им. В. А. Стеклова
АН СССР

Поступило 5.V.1971

Ն. Կ. ՆԻԿՈԼՍԿԻ. Սպեկտրալ սինթեզ և կշռային ապրոկսիմացիայի խնդիրը եզրի մոտ աճող անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ տարածություններում *(ամփոփում)*

$C_0(\lambda)=\{f: f$-ը *անալիտիկ է երբ* $|z|<1$ *և* $f(z)=o(\lambda(|z|)),\ |z|\to 1\}$ *տարածություններում, որտեղ* λ — *տված մաժորանտան է, դիտարկվում է կամայական* g, $g\in C_0(\lambda)$ *ֆունկցիայի մոտարկման հնարավորության հարցը* $p_nf, n\geqslant 1$ (p_n-ը — *բազմանդամներ են,* f-ը — *տված ֆունկցիա* $f(z)\neq 0$, $|z|<1$) *տիպի հաջորդականություններով։ Օգտվելով* f *ֆունկցիայի «թույլ հակադարձելիության» մասին մի ընդհանուր պնդումից (լեմմա 1) ստացվում է, որ*

ա) ինչքան պարզ էլ աճի λ-*ֆունկցիան, գոյություն ունեն ոչ թույլ հակադարձելի* f. $f(z)\neq 0$ *ֆունկցիաներ։*

բ) $f(z)=\exp\frac{1}{z-1}$ *ֆունկցիան ոչ թույլ հակադարձելի է* $C_0(\lambda)$-*ում, եթե* $\int_0^1 (1-r)^{-1/2}\log^{1/2}\lambda(r)\,dr<\infty$։ *Ստացված են նաև (§ 5) սահմանափակումներ* $\min\limits_{|z|=r}|f(z)|$, $r\to 1-0$ *նվազելու արագության վրա, որոնք ապահովում են* f-*ի թույլ հակադարձելիությունը* $C_0(\lambda)$-*ում։*

N. K. NIKOLSKY. *Spectral syntesis and weighted approximation in some spaces of analytic functions* (summary)

Define the space $C_0(\lambda)=\{f: f$ is analytic for $|z|<1$ and $|f(z)|=o(\lambda(|z|)),\ |z|\to 1\}$. Under consideration is the possibility of approximation $g=C_0-\lim\limits_n p_nf$ for all $g\in C_0(\lambda)$, where p_n are polinomials and f is prescribed $f(z)\neq 0$, $|z|<1$. On the basis some general proposition on such „woak invertability“ of f (see § 1) the following is proved: a) for any rate of growth of the weigth λ there exists the function f ($f(z)\neq 0$, $|z|<1$) non-weakly invertable in $C_0(\lambda)$; b) the function $f=\exp\frac{1}{z-1}$ is non-weakly invertable in $C_0(\lambda)$ if $\int_0^1(1-r)^{-1/2}\log^{1/2}\lambda(r)\,dr<\infty$. Some sufficient conditions for weak invertability of the function f, $f\in C_0(\lambda)$ are found in § 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wermer*. On invariant subspaces of normal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 3, № 2, 1952, 270—277.
2. *D. Sarason*. Weak-star density of polynomials, preprint.
3. *Н. К. Никольский*. Об инвариантных подпространствах унитарных операторов, Вестник ЛГУ, сер. матем., № 19, 1966, 96—143.
4. *А. С. Маркус*. О задаче спектрального синтеза для операторов с точечным спектром, Функц. анализ и его прим., 2, № 3, 1968, 91—92.

5. *Н. К. Никольский.* Спектральный синтез для оператора сдвига и нули в некоторых классах аналитических функций, гладких вплоть до границы, ДАН СССР, 170, № 2, 1970.
6. *L. Ehrenpreis.* Mean periodic functions, part I., Amer. J. Math., 77, № 2, 1955, 233—328.
7. *Н. К. Никольский.* Замкнутые идеалы в некоторых алгебрах целых функций, Сибирский Матем. журн., 9, № 1, 1968, 211—215.
8. *Ф. А. Шамоян.* О замкнутых идеалах в одной алгебре быстро растущих аналитических функций, Изв. АН АрмССР, „Математика", IV, № 4, 1969, 268—277.
9. *М. В. Келдыш.* Sur l'approximation en moyenne par polynomes des fonctions d'une variable complexe, Матем. сб., 16 (58), 1945, 1—20.
10. *A. Beurling.* On two problems concerning linear transformations in Hilbert spaces, Acta Math., 81, № 1: 2, 1949, 239—255.
11. *Г. Е Шилов.* О кольцах функций с равномерной сходимостью, Укр. матем. журн., 4, 1951, 404—411.
12. *H. S. Shapiro.* Weakly invertible elements in certain functions spaces and generators in l^1, Mich. Math. J., 11, 1964, 161—165.
13. *Н. К. Никольский.* Инвариантные подпространства оператора сдвига и ограниченная аппроксимация почти всюду, Труды МИАН, т. 96, 1968, 243—257.
14. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
15. *M. L. Cartwright.* On analytic functions regular in the unit circle, Quart. J. Math., Oxford ser., 4, № 16, 1933, 246—256.
16. *C. N. Linden.* The minimum modulus of functions regular and of finite order in the unit circle, Quart. J. Math., 11 ser., 7, № 27, 1956, 196—216.
17. *М. А. Евграфов.* Асимптотические оценки и целые функции, М., Физматгиз, 1962.
18. *С. Мандельбройт.* Теоремы замкнутости и теоремы композиции, М., ИЛ, 1962.
19. *S. E. Warschawski.* On conformal mapping of infinite strips, Trans. Amer. Math. Soc., 51, 1942.
20. *H. S. Shapiro.* Weighted polynomial approximation and boundary behaviour of analytic functions. „Совр. пробл. теории аналит. функ.", М., „Наука", 1966, 326—335.
21. *В. И. Смирнов* и *Н. А. Лебедев.* Конструктивная теория функций комплексного переменного, М. —Л., „Наука", 1964.
22. *Ф. А. Шамоян.* Описание замкнутых идеалов и некоторые вопросы факторизации в алгебрах растущих функций в круге, Изв. АН АрмССР, „Математика" V, № 5, 1970, 419—433.
23. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
24. *М. А. Евграфов.* Аналитические функции, М., „Наука", 1968.