ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 4, 1971 Математика

Н. А. ЛЕБЕДЕВ и Н. А. ШИРОКОВ

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ НА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ, ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО УГЛОВЫХ ТОЧЕК С НЕНУЛЕВЫМИ ВНЕШНИМИ УГЛАМИ

Пусть $\overline{G}$—замкнутое множество точек комплексной плоскости Z, содержащее не менее двух точек, дополнение G^1 которого есть односвязная область, содержащая точку ∞; G—множество внутренних точек множества $\overline{G}$; $z=\psi(t, \overline{G})=\psi(t)=\gamma t+\gamma_0+\gamma_1 t^{-1}+\cdots$, $\gamma>0$, функция регулярная в области $1<|t|<\infty$, однолистно отображающая эту область на G^1; $t=\varphi(z, \overline{G})=\varphi(z)$ — функция, обратная для $z=(t, \overline{G})$; $\Gamma=\Gamma_1=\Gamma_1(\overline{G})$— граница $\overline{G}$; $\Gamma_R=\Gamma_R(\overline{G})=\psi(|t|=R, \overline{G})$, $R>1$, ψ=линия уровня G_1; $G_R^1=\psi(|t|>R, \overline{G})$, $R\geqslant 1$; $G_R=C\overline{G}_R^1$—дополнение $\overline{G}_R^1$ $\rho(E_1, E_2)$—расстояние между множествами точек E_1 и E_2; $\rho_R(z)=\rho(z, \Gamma_R)$-расстояние от точки z до линии уровня Γ_R. Далее рассматриваем множества $\overline{G}$ такие, что $\psi(t, \overline{G})$ непрерывна при $1\leqslant|t|<\infty$.

Пусть $t_j=e^{i\theta_j}$, $-\pi<\theta_j\leqslant\pi$, $j=1,\cdots, l$, $l=0, 1,\cdots$—различные точки окружности $|t|=1$; α_j, $0<\alpha_j\leqslant 2$, $\alpha_j\neq 1$, $j=1,\cdots, l$ —фиксированные числа; h, $0<h<h_0=\dfrac{1}{2}\min\left(|\theta_j-\theta_{j'}|, \dfrac{1}{2}\right)$, $j\neq j'$, $j, j'=1,\cdots, l$;

$$u_j=\left\{t; \left|\arg\frac{t_j}{t}\right|<h, |t|>1\right\};$$ u — дополнение $\bigcup\limits_{j=1}^{l} u_j$ до области $|t|>1$.

Будем говорить, что $\overline{G}$ имеет l (и только l) угловых точек $z_j=\psi(t_j, \overline{G})$, $j=1,\cdots, l$, с внешними (не нулевыми) углами $\alpha_j\pi$, если существуют две постоянные c_1 и c_2, $0<c_1<c_2<\infty$ такие, что

$$c_1\left|1-\frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j-1}\leqslant|\psi'(t)|\leqslant c_2\left|1-\frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j-1}, \quad t\in u_j,\ j=1,\cdots, l,$$
$$c_1\leqslant|\psi'(t)|\leqslant c_2, \qquad t\in u, \tag{1}$$
$$\psi(t)=\psi(t_j)+A_j(t)\left(1-\frac{t_j}{t}\right)^{\alpha_j}, \quad t\in u_j,\ j=1,\cdots, l,$$

где $A_j(t)$ — функции, регулярные в $1<|t|<\infty$, непрерывные в точке t_j, $A_j(t_j)\neq 0$, и выбрана та ветвь функции $\left(1-\dfrac{t_j}{t}\right)^{\alpha_j}$, которая обращается в единицу при $t=\infty$.

Угловую точку $z_j=\psi(t_j)$ будем называть простой, если $\psi(t)\neq\neq\psi(t_j)$ при $t\neq t_j$, $|t|=1$, и s-кратной, если существуют точки $t_{j,\nu}$,

$\nu=1,\cdots, s$, $|t_{j,\nu}|=1$, $t_{j,\nu}\neq t_{j,\nu'}$, $\nu\neq\nu'$, такие, что $\psi(t_j)=\psi(t_{j,\nu})$, $\nu=1,\cdots$ $\cdots, s$, и $\psi(t)\neq\psi(t_j)$ при $t\neq t_{j,\nu}$, $\nu=1,\cdots, s$, $|t|=1$. Среди точек $t_{j,\nu}$ могут быть точки (на самом деле не более одной), не совпадающие ни с одной из точек t_j, $j=1,\cdots, l$. Такой точке $t_{j,\nu}$ сопоставляем $\alpha_{j,\nu}=1$ и дополнительно к условиям (1) требуем, чтобы для нее выполнялось третье условие из (1) (с заменой t_j на $t_{j,\nu}$ и α_j на $\alpha_{j,\nu}=1$).

Класс множеств, удовлетворяющих поставленным выше условиям обозначаем через Ψ или через $\Psi(c_1, c_2, t_1, \alpha_1, \cdots, t_l, \alpha_l)$ и при $l=0$ через $\Psi(c_1, c_2)$. Если $l=0$, то при всех t, $|t|>1$, выполняется второе из условий (1) и мы говорим, что множество $\overline{G}$ не имеет угловых точек. Класс множеств $\overline{G}\in\Psi(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$, являющихся замыканием области G, будем обозначать через $\Psi^*(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$. Ясно, что $\overline{G}\in\Psi^*(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$ не имеет кратных угловых точек. Класс множеств $\overline{G}\in\Psi(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$, не имеющих кратных угловых точек будем обозначать через $\Psi^+(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$.

В работе доказана следующая

Теорема. *Пусть $\overline{G}\in\Psi^*(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$, $l\geqslant 0$; $f(z)$—функция, регулярная в G, имеющая в $\overline{G}$ r $(r=0, 1, \cdots)$ непрерывных производных,*

$$\omega(\delta)=\omega(\delta, f^{(r)})=\sup_{|z-z'|<\delta,\, z,\, z'\in\overline{G}}|f^{(r)}(z')-f^{(r)}(z)|,\ \delta>0,$$

— модуль непрерывности $f^{(r)}(z)$ в $\overline{G}$. Тогда для каждого $n=0, 1, \cdots$ существует полином $P_n(z)$ степени не выше n такой, что

$$|f^{(\nu)}(z)-P_n^{(\nu)}(z)|\leqslant A_\nu\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)^{r-\nu}\,\omega(\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)),\quad z\in\Gamma,\ \nu=0,\cdots, r,$$

где A_ν — постоянные, зависящие лишь от $\overline{G}$.

Эта теорема справедлива и для $\overline{G}\in\Psi^+(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$, но доказательство при этом становится несколько более сложным и менее прозрачным, и мы его здесь не приводим. Для $\overline{G}\in\Psi(c_1, c_2, t_1,\cdots, t_l)$ формулировка теоремы изменяется, а доказательство еще более сложное. Эта теорема для $\overline{G}\in\Psi(c_1, c_2)$ ($\overline{G}$ не имеет угловых точек) доказана Н. А. Широковым, причем дано явное выражение A_ν через c_1 и c_2. Общий случай доказан авторами совместно.

Приведенные нами результаты обобщают некоторые результаты В. К. Дзядыка из работ [1], [2], [3], [4] и Н. Н. Воробьева [6], [7] (см. также [5]), в которых накладываются более жесткие условия на границу Γ множества $\overline{G}$. В случае, если $\overline{G}$ — множество без угловых точек, В. К. Дзядык требует, чтобы граница Γ была гладкой, и в случае множеств с угловыми точками—чтобы Γ была кусочно гладкой с непрерывной кривизной на каждом куске (и некоторые дополнительные условия в угловых точках).

В пункте 1° работы мы введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения. В п. 2° совершим важные преобразования множества $\overline{G}$. В п. 3° даны леммы, используемые при доказательстве теоремы, которое проведено в п. 4°.

1°. Некоторые обозначения. Пусть: $R>1$, θ — вещественное число,

$$\zeta_{R,\theta}=\zeta_{R,\theta}(\zeta)=\psi\left(Re^{-i\theta}\varphi(\zeta)\right),\ \zeta\in\overline{G}',\ \zeta_R=\zeta_{R,0},$$

$$\zeta_{[\theta]}=\zeta_{1,\theta};\ K(z,\delta)=\{\zeta:|\zeta-z|<\delta\},\ \delta>0;\ K(z,\delta,\Delta)=\{\zeta:\delta<|\zeta-z|<\Delta\}$$

$$0<\delta<\Delta;\ K[z,\delta]=K(z,\delta,\infty);\ \Gamma_R(z,\delta)=\Gamma_R\cap K(z,\delta),\ \Gamma_R[z,\delta]=$$
$$=\Gamma_R\cap K[z,\delta],\ \Gamma_R(z,\delta,\Delta)=\Gamma_R\cap K(z,\delta,\Delta).$$

Длину произвольной спрямляемой кривой L обозначаем через $|L|$.

При доказательствах мы не будем следить за зависимостью одних постоянных от других, введенных ранее, и потому будем использовать сплошь и рядом одни и те же буквы для обозначения различных постоянных. В частности, буквы A и c, иногда с индексами, всегда будут обозначать постоянные. Кроме того, будем пользоваться следующим определением. Если на множестве E заданы две неотрицательные функции α и β такие, что $0<A'<\frac{\alpha}{\beta}<A<\infty$ на E, то пишем $\alpha\asymp\beta$ на E и говорим, что α эквивалентно β на E. Две однозначные аналитические в области B функции α и β будем называть эквивалентными на $\overline{B}$, если они непрерывны в $\overline{B}$ и их модули эквивалентны. Для двух функций α и β, неотрицательных на E, будем писать $\alpha<\cdot\beta$, $\beta\cdot>\alpha$, если $\alpha\leqslant A\beta$.

Далее мы неоднократно будем пользоваться следующей легко доказываемой эквивалентностью. Пусть $\alpha>0$ фиксировано, $a>0$ и $b>0$. Тогда

$$(a+b)^\alpha\asymp a^\alpha+b^\alpha.$$

2°. Класс $\Psi^*(c_1, c_2, t_1, \alpha_1, \cdots, t_l, \alpha_l)$ замкнутых множеств. Пусть $\overline{G}\in\Psi(c_1, c_2, t_1,\cdots, \alpha_l)$. Границу Γ множества G будем рассматривать как образ окружности $t=e^{i\theta}$, $-\pi<\theta\leqslant\pi$, при отображении $z=\psi(t,\overline{G})$. Используя (1), легко убедимся, что Γ — спрямляемая кривая.

Пусть $\chi(t)=\prod_{j=1}^{l}\left(1-\frac{t_j}{t}\right)^{\alpha_j-1}$, где выбрана та непрерывная ветвь этой функции в $|t|>1$, которая обращается в единицу при $t=\infty$. Заметим, что модуль функции $\frac{\psi'(t)}{\chi(t)}$, регулярной в $|t|>1$, ограничен сверху и снизу постоянными, отличными от нуля и ∞ (что следует из (1)), и потому

$$\psi'(t)=A(t)\prod_{j=1}^{l}\left(1-\frac{t_j}{t}\right)^{\alpha_j-1},\ |t|>1, \tag{2}$$

где $A(t)$ — регулярная в $|t|>1$ функция такая, что $0<c_1'<|A(t)|<<c_2'<\infty$ при $|t|>1$. Ясно, что из (2) снова следует первое и второе из условий (1).

Рассмотрим векторы

$$K_-(t_j)=\lim_{\theta\to\theta_j-0}\frac{\psi(e^{i\theta})-\psi(e^{i\theta_j})}{|\psi(e^{i\theta})-\psi(e^{i\theta_j})|},\quad K_+(t_j)=\lim_{\theta\to\theta_j+0}\frac{\psi(e^{i\theta})-\psi(e^{i\theta_j})}{|\psi(e^{i\theta})-\psi(e^{i\theta_j})|}. \tag{3}$$

Используя третье из условий (1) легко покажем, что

$$K_-(t_j)=\frac{A_j(t_j)}{|A_j(t_j)|}e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha_j}=e^{i\varphi_j^-},\quad K_+(t_j)=\frac{A_j(t_j)}{|A_j(t_j)|}e^{i\frac{\pi}{2}\alpha_j}=e^{i\varphi_j^+}. \tag{3'}$$

Эти векторы очевидно являются касательными в точке $z_j=\psi(t_j)$ соответственно к дугам $z=\psi(e^{i\theta})$, $\theta_j-h\leqslant\theta\leqslant\theta_j$, и $z=\psi(e^{i\theta})$, $\theta_j\leqslant\theta\leqslant\leqslant\theta_j+h$. Вектор $k_-(t_j)$ нужно повернуть против часовой стрелки на угол $\pi\alpha_j$ (при $\alpha_j=2$ векторы $k_-(t_j)$ и $k_+(t_j)$ совпадают), чтобы он совпал с $k_+(t_j)$. В этом смысле кривая Γ в точке $z_j=\psi(t_j)$ имеет внешний угол равный $\pi\alpha_j$. Отсюда же следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует h', $0<h'<h$, такое, что дуги $z=\psi(e^{i\theta})$, $\theta_j-h'\leqslant\theta\leqslant\theta_j$ и $z=\psi(e^{i\theta})$, $\theta_j\leqslant\theta\leqslant\theta_j+h'$ лежат в углах раствора ε с вершинами в z_j и биссектрисами, параллельными соответственно векторам $k_-(t_j)$ и $k_+(t_j)$, и если z_j — простая угловая точка и $\alpha_j<2$, то сектор

$$\varphi_j^+-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\arg(z-z_j)\leqslant\varphi_j^-+\frac{\varepsilon}{2},\quad |z-z_j|\leqslant h',$$

принадлежит $\overline{G}$.

Преобразуем теперь $\overline{G}\in\Psi^*(c_1,c_2,t_1,\cdots,\alpha_l)$, $l>0$. Исходя из $\overline{G}=\overline{G}(1)$, построим некоторую последовательность множества $\overline{G}(k)$, $k=1,\cdots,l+1$, следующим образом. Если $\overline{G}(k)$ построено, то строим некоторое замкнутое множество $\lambda_k\subset\overline{G}(k)$, дополнение к которому есть некоторая односвязная область $D(k)$. Отобразим $D(k)$ с помощью некоторой однолистной функции $\xi=\varphi_k(z)$, $\varphi_k(\infty)=\infty$, $\varphi_k'(\infty)>0$. Эта функция отображает $G^1(k)=C\overline{G}(k)$ на некоторую область $G^1(k+1)$, дополнение которой обозначим через $\overline{G}(k+1)$. Полагаем $z_j=z_j^{(1)}$, $z_j^{(k+1)}=\varphi_k\circ\varphi_{k-1}\circ\cdots\circ\varphi_1(z_j^{(1)})$, $j=1,\cdots,l$, $k=1,\cdots,l$, $z_k^{(k)}\in\lambda_k$, $a_k\in\lambda_k$, $a_k\neq z_k^{(k)}$,

$$\xi=\varphi_k(z)=a_k+\frac{z_k^{(k)}-a_k}{1-\left(\dfrac{z-z_k^{(k)}}{z-a_k}\right)^{1/\alpha_k}}. \tag{4}$$

Здесь выбрана та ветвь функции $\left(\dfrac{z-z_k^{(k)}}{z-a_k}\right)^{1/\alpha_k}$, которая обращается в единицу в точке $z=\infty$. Заметим, что $z_k^{(k+1)}=z_k^{(k)}$.

Опишем теперь выбор точек a_k и построение λ_k и по индукции покажем, что $\overline{G}(k)\in\Psi^*(c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, t_k, \alpha_k, \cdots, t_l, \alpha_l), k=1,\cdots, l$, и $\overline{G}(l+1)\in$ $\in\Psi^*(c_1^{(l+1)}, c_2^{(l+1)})$.

1) Если $\alpha_k=2$, то в (4) в качестве a_k возьмем какую-нибудь точку из $G(k)$ и в качестве λ_k возьмем какую-либо спрямляемую простую кривую, соединяющую точки a_k и $z_k^{(k)}$ (лежащую в $\overline{G}(k)$). Ясно, что если $\overline{G}(k)$—замкнутая область, то $\overline{G}(k+1)$ также замкнутая область и конформность в $\overline{G^1}(k)$ при преобразовании (4) имеет место во всех точках за исключением точки $z_k^{(k)}$. В частности, сохраняются углы между односторонними касательными в точках $z_j^{(k)}$, $j=1,\cdots, l$, $j\neq k$. Исследуем точку $z_k^{(k)}$, для чего найдем производную функции $\zeta=\psi(t, \overline{G}(k+1))=\varphi_k(\psi(t, \overline{G}(k)))(\psi(\infty, \overline{G}(k+1))=\infty, \psi'(\infty, \overline{G}(k+$ $+1))>0)$, однолистно отображающей $|t|>1$ на $G^1(k+1)$. Имеем $\psi'(t, \overline{G}(k+1))=\varphi_k'(\psi(t, \overline{G}(k)))\,\psi'(t, \overline{G}(k))$,

$$\varphi_k'(z)=\frac{1}{\alpha_k}\left(\frac{z_k^{(k)}-a_k}{1-\left(\dfrac{z-z_k^{(k)}}{z-a_k}\right)^{1/\alpha_k}}\right)^2\left(\frac{z-z_k^{(k)}}{z-a_k}\right)^{1/\alpha_k}\frac{1}{(z-z_k^{(k)})(z-a_k)}.$$

В силу предположения индукции $\overline{G}(k)\in\Psi^*(c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, t_k, \alpha_k, \cdots, t_l, \alpha_l)$, и для $\psi'(t, \overline{G}(k))$ имеют место аналоги неравенств (1). Используя их, легко убедимся, что

$$0<c_1^{(k+1)}<|\psi'(t, \overline{G}(k+1))|<c_2^{(k+1)}<\infty,\ t\in u_k,$$

и легко убедимся, что $\overline{G}(k+1)\in\Psi^*(c_1^{(k+1)}, c_2^{(k+1)}, t_{k+1}, \alpha_{k+1}, \cdots, t_l, \alpha_l)$.

2) Если $\alpha_k<2$, $\alpha_k\neq 1$, то проведем через точку $z_k^{(k)}$ биссектрису угла, образованного векторами k_+ и k_- (см. (3) и (3′)) для точки $z_k^{(k)}$ множества $\overline{G}(k)$ и на части биссектрисы, лежащей в $G(k)$, возьмем некоторую точку a_k такую, что отрезок $(z_k^{(k)}, a_k]\in G(k)$ ($G(k)$—множество внутренних точек $\overline{G}(k)$). Если $1<\alpha_k<2$, то полагаем $\lambda_k=[z_k^{(k)}, a_k]$. Если $0<\alpha_k<1$, то с обеих сторон отрезка $[z_k^{(k)}, a_k]$ проведем дуги окружностей с концами в $z_k^{(k)}$ и a_k, образующие с отрезком углы $(1-\alpha_k)\dfrac{\pi}{2}$. Легко видеть, что всегда можно выбрать a_k так, чтобы замкнутая луночка, образованная указанными дугами, принадлежала $G(k)$ за исключением точки $z_k^{(k)}$. Эту замкнутую луночку обозначим через λ_k. Как и в (1) убедимся, что если $\overline{G}(k)\in\Psi^*(c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, t_k, \cdots$ $\cdots, \alpha_l)$, то $\overline{G}(k+1)\in\Psi^*(c_1^{(k+1)}, c_2^{(k+1)}, t_{k+1}, \alpha_{k+1}, \cdots, t_l, \alpha_l)$ (отметим, что при $\alpha_k<1$ образом $D(k)$—дополнение луночки λ_k при отображении (4)—является дополнение отрезка $]z_k^{(k)}, a_k[$).

Из изложенного ясно, что $\overline{G}(l+1)\in\Psi(c_1^{(l+1)}, c_2^{(l+1)})$.

Обозначим через $z=\psi_k(\xi)$, $\xi\in\overline{G}^1(k+1)$ функцию, обратную для $\xi=\varphi\ (z)$:

$$z=\psi_k(\xi)=a_k+\frac{z_k^{(k)}-a_k}{1-\left(\frac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k}\right)^{\alpha_k}},\ \xi\in G^1(k+1),\ k=1,\cdots,l. \tag{4'}$$

Введем функцию

$$z=\psi_*(\xi)=\psi_1\circ\psi_2\circ\cdots\circ\psi_l(\xi),$$

которая однолистно и конформно отображает $G^1(l+1)$ на G^1, и пусть $\xi=\varphi_*(z)$—обратная для $z=\psi_*(\xi)$ функция. Отметим, что функция

$$z=\psi(t,\overline{G}(k))=\varphi_{k-1}\circ\varphi_{k-2}\circ\cdots\circ\varphi_1(\psi(t,\overline{G})),\ |t|>1,\ k=1,\cdots,l+1,$$

отображает область $|t|>1$ однолистно на $G^1(k)$ и

$$\psi(t)=\psi(t,\overline{G})=\psi_k(\psi(t,\overline{G}(l+1)).$$

Ради краткости записи введем еще обозначение

$$z=\psi_{[k]}(\xi)=\psi_k\circ\psi_{k+1}\circ\cdots\circ\psi_l(\xi),\ \xi\in\overline{G}^1(l+1),\ k=1,\cdots,l,$$

и пусть $\xi=\varphi_{[k]}(z)$—функция, обратная для $z=\psi_{[k]}(\xi)$. Кроме того, положим $\xi_j=\psi(t_j,\overline{G}(l+1))=z_j^{(l+1)}$.

По множеству $\overline{G}(k)$, $k=1,\cdots,l+1$, как в начале работы, введем линии уровня $L_R(\overline{G}(k))$ и области $G_R(k)$ и $G_R^1(k)$ для $R>1$.

3°. Леммы, используемые при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Пусть $a\in G(l+1)$. Тогда*

$$\psi_*'(\xi)=A_*(\xi)\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{\xi-\xi_j}{\xi-a}\right)^{\alpha_j-1},\ \xi\in\overline{G}^1(l+1),$$

где $A_k(\xi)$ — регулярная в $G^1(l+1)$ и непрерывная в $\overline{G}^1(l+1)$ функция такая, что $0<c_1'\leqslant|A_*(\xi)|\leqslant c_2'<\infty$, $\xi\in\overline{G}^1(l+1)$.

Доказательство. Заметим, что

$$\psi_*'(\xi)=\psi_1'(\psi_{[2]}(\xi))\,\psi_2'(\psi_{[3]}(\xi))\cdots\psi_{l-1}'(\psi_{[l]}(\xi))\,\psi_l'(\xi). \tag{5}$$

Рассмотрим сомножитель $\psi_k'(\psi_{[k+1]}(\xi))$, $k=1,\cdots,l$. Имеем (см. (4'))

$$\psi_k'(\xi)=-\alpha_k\left[\frac{1-w}{1-w^{\alpha_k}}\right]^2\left(\frac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k}\right)^{\alpha_k-1},\ w=\frac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k},\ \xi\in\overline{G}^1(k+1). \tag{6}$$

Функция, стоящая в квадратных скобках в (6), как функция от ξ непрерывна в $\overline{G}^1(k+1)$ (функция $\left(\frac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k}\right)^{\alpha_k}$ обращается в единицу лишь при $\xi=\infty$) и не обращается в нуль в $\overline{G}^1(k+1)$, а потому она эквивалентна единице в $\overline{G}^1(k+1)$. Мы хотим показать, что

$$\psi_k'(\psi_{[k+1]}(\xi)) \asymp \left(\frac{\xi-\xi_k}{\xi-a_k}\right)^{\alpha_k-1}, \quad \xi\in\overline{G}^1(l+1),$$

и это будет доказано, если покажем, что

$$\frac{\psi_{[k+1]}(\xi)-z_k^{(k)}}{\psi_{[k+1]}(\xi)-a_k} \asymp \frac{\xi-\xi_k}{\xi-a_k}, \quad \xi\in\overline{G}^1(l+1),$$

для чего достаточно показать, что функция

$$\frac{\psi_{[k+1]}(\xi)-z_k^{(k)}}{\xi-\xi_k} \asymp 1, \quad \xi\in\overline{G}^1(l+1).$$

Или, записывая эту функцию в виде

$$\frac{\psi_{[k+1]}(\xi)-\psi_{[k+1]}(\xi_k)}{\psi_{[k+2]}(\xi)-\psi_{[k+2]}(\xi_k)}\cdot\frac{\psi_{[k+2]}(\xi)-\psi_{[k+2]}(\xi_k)}{\psi_{[k+3]}(\xi)-\psi_{[k+3]}(\xi_k)}\cdots\frac{\psi_l(\xi)-\psi_l(\xi_k)}{\xi-\xi_k},$$

видим, что достаточно показать эквивалентность

$$\frac{\psi_\nu(\xi)-\psi_\nu(z_k^{(\nu)})}{\xi-z_k^{(\nu)}} \asymp 1, \quad \xi\in\overline{G}^1(\nu+1),\ \nu=k+1,\cdots,l.$$

После преобразований получаем

$$\frac{(z_\nu^{(\nu)}-a_\nu)\left[\left(\dfrac{\xi-z_\nu^{(\nu)}}{\xi-a_\nu}\right)^{\alpha_\nu}-\left(\dfrac{z_k^{(\nu)}-z_\nu^{(\nu)}}{z_k^{(\nu)}-a_\nu}\right)^{\alpha_\nu}\right]}{\left(1-\left(\dfrac{\xi-z_\nu^{(\nu)}}{\xi-a_\nu}\right)^{\alpha_\nu}\right)\left(1-\left(\dfrac{z_k^{(\nu)}-z_\nu^{(\nu)}}{z_k^{(\nu)}-a_\nu}\right)^{\alpha_\nu}\right)(\xi-z_k^{(\nu)})} \asymp 1, \quad \xi\in\overline{G}^1(\nu+1),$$

и легко видеть, что эта эквивалентность имеет место. Учитывая изложенное выше, получаем заключение леммы.

Следствие 1. *Пусть* $h'>0$ *такое, что окрестности* $u_j=\{\xi:\xi\in\overline{G}^1(l+1),\ |\xi-\xi_j|<h'\}$ *точек* ξ_j, $j=1,\cdots,l$, *попарно не имеют общих точек, и* u' — *дополнение* $\bigcup_{j=1}^{l}u_j$ *до* $\overline{G}^1(l+1)$. *Тогда существуют постоянные* c_1' *и* c_2', $0<c_1'<c_2'<\infty$, такие, что

$$c_1'|\xi-\xi_j|^{\alpha_j-1}\leqslant|\psi_*'(\xi)|\leqslant c_2'|\xi-\xi_j|^{\alpha_j-1},\quad \xi\in u_j,\ j=1,\cdots,l,$$

$$c_1'\leqslant|\psi_*'(\xi)|\leqslant c_2',\quad \xi\in u'.$$

Лемма 2. *Пусть*: $z',z''\in\overline{G}_2(k)\cap\overline{G}^1(k)$, $k=1,\cdots,l$, $\xi'=\varphi_k(z')$, $\xi''=\varphi_k(z'')$. *Если* $0<\alpha_k<2$, *то*

$$|z''-z'|\asymp|\xi''-\xi'|\,[|z''-z_k^{(k)}|^{1/\alpha_k}+|\xi''-\xi'|]^{\alpha_k-1}. \tag{7}$$

Соответствующая оценка сверху имеет место и при $\alpha_k=2$. *Соответствующая оценка снизу для* $\alpha_k=2$ *имеет место, если модуль приращения* $\arg(z-z_k^{(k)})$ *при движении точки* z *от* z' *до* z'' *по некоторой кривой, соединяющей* z' *и* z'' *и лежащей в* $\overline{G}^1(k)$, *не превосходит* $2\pi-\delta$, *где* $\delta>0$ *фиксировано. Ясно, что в* (7) *можно заменить в правой части* z'' *на* z'.

Доказательство. Рассмотрим преобразование (4'): $z=\psi_k(\xi)$, $\xi\in\overline{G}^1(k+1)$. Ради краткости записи полагаем

$$w=\frac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k},\quad w_1=\frac{\xi'-z_k^{(k)}}{\xi'-a_k},\quad w_2=\frac{\xi''-z_k^{(k)}}{\xi''-a_k}. \tag{8}$$

Имеем (см. (4'))

$$z'-z_k^{(k)}=(z_k^{(k)}-a_k)\frac{w_1^{\alpha_k}}{1-w_1^{\alpha_k}},\ z''-a_k=(z_k^{(k)}-a_k)\frac{1}{1-w_1^{\alpha_k}},$$

$$z''-z'=(z_k^{(k)}-a_k)\frac{w_2^{\alpha_k}-w_1^{\alpha_k}}{(1-w_2^{\alpha_k})(1-w_1^{\alpha_k})}. \tag{9}$$

Покажем сначала, что

$$|w_2^{\alpha_k}-w_1^{\alpha_k}|\asymp|w_2-w_1|\,(|w_1|+|w_2-w_1|)^{\alpha_k-1}. \tag{10}$$

Полагая $x=w_2-w_1$, при $|x|>\frac{1}{2}|w_1|$, $y=\left|\frac{w_1}{x}\right|$, имеем

$$u=\frac{|w_1^{\alpha_k}-(w_1+x)^{\alpha_k}|}{|x|\,(|w_1|+|x|)^{\alpha_k-1}}\leqslant\frac{y^{\alpha_k}+(1+y)^{\alpha_k}}{(1+y)^{\alpha_k-1}}=1+y+y\left(\frac{y}{1+y}\right)^{\alpha_k-1}.$$

Правая часть возрастает с возрастанием y и потому

$$u\leqslant 3+2\left(\frac{2}{1+2}\right)^{\alpha_k-1}=3\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha_k}\right)\leqslant 6.$$

При $|x|<\frac{1}{2}|w_1|$, $y=\frac{x}{w_1}$ имеем

$$u=\frac{|1-(1+y)^{\alpha_k}|}{|y|\,(1+|y|)^{\alpha_k-1}}=\frac{\left|\alpha_k y+\frac{\alpha_k(\alpha_k-1)}{2}y^2+\frac{\alpha_k(\alpha_k-1)(\alpha_k-2)}{3!}y^3+\cdots\right|}{|y|\,(1+|y|)^{\alpha_k-1}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha_k}{(1+|y|)^{\alpha_k-1}}\left(1+\frac{1}{2}|y|+\frac{1}{3}|y|^2+\cdots\right)\leqslant\frac{\alpha_k}{(1+|y|)^{\alpha_k-1}}2\ln 2\leqslant 6\ln 2.$$

Итак

$$|w_2^{\alpha_k}-w_1^{\alpha_k}|\leqslant 6\,|w_2-w_1|\,(|w_1|+|w_2-w_1|)^{\alpha_k-1},\ 0<\alpha_k\leqslant 2.$$

Получим теперь оценку снизу для u. Положим $w=\dfrac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k}$, $\xi\in G^1(k+1)$. При этом отображении $G^1(k+1)$ при $\alpha_k\neq 2$ отобразится в некоторую область $G^1_*(k+1)$, не содержащую области $|\arg w|>\varphi_0>\frac{\pi}{2}$, $\varphi_0\alpha_k<\pi$, т. е. $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi_0<\frac{\pi}{\alpha_k}$. Чтобы в этом убедиться в $G(k)$ проведем дуги окружностей одинаковых радиусов с концами в точках $z_k^{(k)}$ и a_k такие, чтобы область, ограниченная ими, содержала λ_k. Этим дугам в $G^1_*(k+1)$ соответствуют лучи, исходящие из точки $w=0$, образующие с вещественной осью углы φ_0 и $-\varphi_0$. Легко видеть, что так определенное φ_0 — искомое.

Далее полагаем для определенности $|w_2|\geqslant|w_1|$ и обозначаем $\left|\frac{w_1}{w_2}\right|=x$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $\arg\frac{w_1}{w_2}=2\varphi$. При $0<\alpha_k<2$, $\alpha_k\neq 1$, имеем $|\varphi|<\varphi_0$.

Легко видеть, что при выполнении условий леммы при $\alpha_k=2$ для $\arg\frac{w_1}{w_2}=2\varphi$ имеем $|\varphi|<\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right)=\varphi_0$ и $\varphi_0\alpha_k=2\varphi_0=\pi-\frac{\delta}{2}<\pi$. Заметим еще, что

$$\max(|w_1|, |w_2|)\leqslant|w_1|+|w_2-w_1|\leqslant 2\max(|w_1|, |w_2|).$$

Теперь имеем

$$u^2\geqslant\left(\frac{|w_2^{\alpha_k}-w_1^{\alpha_k}|}{|w_2-w_1|\cdot|2w_2|^{\alpha_k-1}}\right)^2\geqslant\frac{1}{4}\left|\frac{(xe^{2i\varphi})^{\alpha_k}-1}{xe^{2i\varphi}-1}\right|^2=$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{1-2x^{\alpha_k}\cos 2\varphi\alpha_k+x^{2\alpha_k}}{1-2x\cos 2\varphi+x^2}=\frac{1}{4}\,\frac{(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\sin^2\alpha_k\varphi}{(1-x)^2+4x\sin^2\varphi}.$$

Пусть $1<\alpha_k\leqslant 2$. Так как $\sin\varphi\alpha_k-\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi(\alpha_k-1)}{2}\cos\frac{\varphi(\alpha_k+1)}{2}>0$ при $0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{\alpha_k+1}$, то при таких φ получаем

$$u^2\geqslant\frac{1}{4}\,\frac{(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\sin^2\varphi}{(1-x)^2+4x\sin^2\varphi}\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1+x^{\alpha_k}}{1+x}\right)^2\geqslant\frac{1}{16}.$$

Если $\frac{\pi}{\alpha_k+1}<\varphi\leqslant\varphi_0$, то

$$u^2\geqslant\frac{1}{4}\,\frac{(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\sin^2\varphi_0\alpha_k}{(1+x)^2}\geqslant\frac{1}{16}\left[(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\sin^2\varphi_0\alpha_k\right].$$

Находя минимум по x^{α_k}, видим, что он достигается при $x^{\alpha_k}=0$, если $\sin^2\varphi_0\alpha_k\geqslant\frac{1}{2}$ и при $x^{\alpha_k}=1-2\sin^2\varphi_0\alpha_k$, если $\sin^2\varphi_0\alpha_k\leqslant\frac{1}{2}$, и мы имеем $u^2\geqslant\frac{1}{16}$ при $\sin^2\varphi_0\alpha_k\geqslant\frac{1}{2}$ и $u^2\geqslant\frac{1}{4}\sin^2\varphi_0\alpha_k\cos^2\varphi_0\alpha_k$ при $\sin^2\varphi_0\alpha_k\leqslant\frac{1}{2}$.

Рассмотрим случай $0<\alpha_k<1$. Выясним при каких φ функция $v(\varphi)=\sin\varphi\alpha_k-\alpha_k\sin\varphi$ неотрицательна. Имеем: $v(0)=0$, $v'(\varphi)=$ $=\alpha_k[\cos\varphi\alpha_k-\cos\varphi]=2\alpha_k\sin\frac{\varphi(1-\alpha_k)}{2}\sin\frac{\varphi(1+\alpha_k)}{2}$. Таким образом, $v(\varphi)\geqslant 0$ при $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{2\pi}{1+\alpha_k}$ и, следовательно

$$u^2\geqslant\frac{(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\alpha_k^2\sin^2\varphi}{(1-x)^2+4x\sin^2\varphi}\geqslant\alpha_k^2\frac{(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\sin^2\varphi}{(1-x)^2+4x\sin^2\varphi}\geqslant$$

$$\geqslant\alpha_k^2\min\left(\left(\frac{1-x^{\alpha_k}}{1-x}\right)^2,\frac{1}{x^{1-\alpha_k}}\right)=\alpha_k^2\left(\frac{1-x^{\alpha_k}}{1-x}\right)^2.$$

Производная функции $\frac{1-x^{\alpha_k}}{1-x}$ равна $\frac{1-\alpha_k x^{\alpha_k-1}-(1-\alpha_k)x^{\alpha_k}}{(1-x)^2}$ и она отрицательна при $0<x<1$, ибо производная числителя положительна, и числитель обращается в нуль при $x=1$, потому $u\geqslant\alpha_k\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1-x^{\alpha_k}}{1-x}=\alpha_k^2$.

Итак эквивалентность (10) доказана.

Опираясь на формулы (9) и (10), получаем

$$|z''-z'| \asymp \frac{|w_2-w_1|\,[|w_1|+|w_2-w_1|]^{\alpha_k-1}}{|1-w_1^{\alpha_k}|\,|1-w_2^{\alpha_k}|}=$$

$$=\frac{|w_2-w_1|}{|1-w_1^{\alpha_k}|^{1/\alpha_k}|1-w_2^{\alpha_k}|^{1/\alpha_k}}\left[\left|\frac{w_1^{\alpha_k}}{1-w_1^{\alpha_k}}\right|^{1/\alpha_k}\left|\frac{1}{1-w_2^{\alpha_k}}\right|^{1/\alpha_k}+\right.$$

$$\left.+\frac{|w_2-w_1|}{|1-w_1^{\alpha_k}|^{1/\alpha_k}|1-w_2^{\alpha_k}|^{1/\alpha_k}}\right]^{\alpha_k-1}.$$

Заметим, что в силу формул (9) первое слагаемое, стоящее в квадратных скобках, равно $|z'-z_k^{(k)}|^{1/\alpha_k}|z''-a_k|^{1/\alpha_k}\asymp|z'-z_k^{(k)}|^{1/\alpha_k}$.

В доказательстве леммы 1 было показано, что $|1-w_1^{\alpha_k}|\asymp|1-w_1|$, $k=1,\cdots,l$. Опираясь на это, легко показать, что множитель, стоящий перед квадратной скобкой, эквивалентен $|\xi''-\xi'|$, и требуемая эквивалентность (7) доказана.

Замечание 1. Если не обе точки z', z'' лежат в некоторой фиксированной окрестности точки $z_k^{(k)}$, то в (7) правую часть можно заменить на $|\xi''-\xi'|$.

Для дальнейшего нам потребуются некоторые обозначения. Выберем $\varepsilon>0$ столь малым, чтобы $\overline{k}(z_j, 4\varepsilon)\cap\overline{k}(z_{j'}, 4\varepsilon)=\Phi$, $j\neq j'$, $j, j'=1,\cdots, l$, и таким, чтобы прообраз $\overline{k}(z_j, 4\varepsilon)\cap\overline{G^1}=u_j(4\varepsilon)$ при отображении $z=\psi(t, \overline{G})$ лежал в достаточно малой окрестности точки t_j: $|t-t_j|\leqslant h'<h$, $j=1,\cdots, l$; $u_j(\varepsilon)=u_j(4\varepsilon)\cap\overline{k}(z_j, \varepsilon)$. Положим $u(\varepsilon)=\overline{G^1}\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{l}u_j(\varepsilon)$, $R_\varepsilon=\sup\left\{R\colon \sup\rho_R(z)<\frac{1}{2}\varepsilon\right\}$, $\Gamma^j=\Gamma\cap u_j(\varepsilon)$, $\Gamma'=\Gamma\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{l}\Gamma^j$; $\Gamma_R^j=\Gamma_R\cap u_j(4\varepsilon)$.

Следствие 2. Пусть: $z', z''\in\overline{G}_2\cap\overline{G^1}$; $\xi'=\varphi_*(z')$, $\xi''=\varphi_*(z'')$. Если одна из точек z', z'' принадлежит $u_j(\varepsilon)$, то

$$|z''-z'|<\cdot|\xi''-\xi'|\,[|z'-z_j|^{1/\alpha_j}+|\xi''-\xi'|]^{\alpha_j-1}.$$

Если $z', z''\in u(\varepsilon)$, то $|z''-z'|<\cdot|\xi''-\xi'|$.

Доказательство получим, применяя последовательно лемму 2 для $k=1,\cdots, l$ и замечание 1.

Следствие 3. *Пусть*: $\zeta\in\Gamma$; $1<R\leqslant R_\varepsilon$, $-\pi<\theta\leqslant\pi$, $\zeta_{R,\theta}(\zeta)\in u_j(\varepsilon)$. *Тогда*

$$|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-\zeta|<\cdot(|\theta|+(R-1))[|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-z_j|^{1/\alpha_j}+(|\theta|+(R-1))]^{\alpha_j-1}. \tag{11}$$

Если $\zeta_{R,\theta}(\zeta)\in u(\varepsilon)$, *то* $|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-\zeta|<\cdot|\theta|+(R-1)$.

Доказательство. Положим $\xi_0=\varphi_*(\zeta)$, $\xi_{R,\theta}=\varphi_*(\zeta_{R,\theta}(\zeta))$, $\xi_R=\varphi_*(\zeta_R(\zeta))$. Тогда при $\zeta_{R,\theta}(\zeta)\in u_j(\varepsilon)$ имеем

$$|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-\zeta|<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi_0|\,[|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-z_j|^{1/\alpha_j}+|\xi_{R,\theta}-\xi_0|]^{\alpha_j-1}. \tag{12}$$

Учитывая, что $\overline{G}(l+1)\in\Psi(c_1', c_2')$, и обозначая $\xi_0=\psi(e^{i\theta_0}, \overline{G}(l+1))$, имеем $\xi_{R,\theta}=\psi(Re^{i(\theta+\theta_0)}, \overline{G}(l+1))$. Далее последовательно получаем

$$|\xi_{R,\theta}-\xi_0|\leqslant|\xi_{R,\theta}-\xi_R|+|\xi_R-\xi_0|,$$

$$|\xi_{R,\theta}-\xi_R|\leqslant\left|\int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+\theta}|\psi'(Re^{i\tau}, \overline{G}(l+1))|R|\,d\tau\right|\leqslant Rc_2'|\theta|,$$

$$|\xi_R-\xi_0|\leqslant\int\limits_1^R|\psi'(\tau\cdot e^{i\theta_0}, \overline{G}(l+1))|\,d\tau\leqslant c_2'(R-1),$$

$$|\xi_{R,\theta}-\xi_0|\leqslant R_1c_2'(|\theta|+(R-1)). \tag{13}$$

Отсюда и из (12) получаем (11). Если $\zeta_{R,\theta}(\zeta)\in u(\varepsilon)$, то $|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-\zeta|<\cdot$ $<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi_0|$, и учитывая (13) получаем требуемую оценку. Следствие доказано.

Покажем, что существует $\varepsilon>0$, удовлетворяющее поставленным выше условиям, такое, что справедлива

Лемма 3. *Пусть* $1<R\leqslant R_1$. *Тогда*

$$\rho_R(z)\asymp(R-1)\left[|z-z_j|^{1/\alpha_j}+(R-1)\right]^{\alpha_j-1},\ z\in\Gamma^j,$$
$$\rho_R(z)\asymp R-1,\ z\in\Gamma'.$$

Доказательство. Так же как при доказательстве следствия 3 получим нужные оценки сверху для $\rho_R(z)$ при $z\in\Gamma^j$ и $z\in\Gamma'$. Эти оценки справедливы для любого $\varepsilon>0$, которое удовлетворяет поставленным выше условиям. Получим необходимые оценки снизу.

Пусть $z\in\Gamma$, $z^*\in\Gamma_R$, $|z-z^*|=\rho_R(z)$, z' — ближайшая к z точка отрезка $[z, z^*]$ такая, что $[z', z^*]\subset\overline{G^1}$. Ясно, что если $|z-z_j|>\varepsilon$ для всех $j=1,\cdots, l$, то $|z^*-z_j|>\frac{1}{2}\varepsilon$, $j=1,\cdots, l$, ибо $R<R_1$. Если $|z-$ $-z_j|\leqslant\varepsilon$, то $|z^*-z_j|\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon$. Обозначим прообраз отрезка $[z', z^*]$ при отображении $z=\psi(t, \overline{G})$ через $\gamma_R(z)$. Ясно, что при $z\in\Gamma'$ существует $G''>0$ такое, что $|\psi'(t, \overline{G})|>c_1'$, $t\in\gamma_R(z)$, $z\in\Gamma'$, и потому при $z\in\Gamma'$ имеем

$$\rho_R(z)\geqslant|z'-z^*|=\left|\int\limits_{\gamma_R(z)}\psi'(t, \overline{G})\,dt\right|=$$

$$=\int\limits_{\gamma_R(z)}|\psi'(t, \overline{G})|\cdot|dt|>\int\limits_{\gamma_R(z)}c_1'|dt|\geqslant c_1'(R-1).$$

Пусть теперь $z\in\Gamma^j$. Если $\zeta\in[z', z^*]$, то $\zeta\in u_j\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)$. Положим $\chi_k(z)=\varphi_k\circ\varphi_{k-1}\circ\cdots\circ\varphi_1(z)$, $\chi_k(z')=z'^{(k+1)}$, $\chi_k(z^*)=z^{*(k+1)}$, и напомним, что $\chi_k(z_j)=z_j^{(k+1)}$. Ясно, что при $\varepsilon>0$ достаточно малом производная функции $\chi_{j-1}(z)$ достаточно мало изменяется в $u_j\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)$ и ее модуль ограничен снизу положительным числом, а потому соответствующие углы треугольников $(z_j,\ z',\ z^*)$ и $(z_j^{(l)},\ z'^{(l)},\ z^{*(l)})$ мало отличаются. Отсюда заключаем, что, во-первых, $|z'-z_j|\asymp|z'^{(l)}-z_j^{(l)}|$ и $|z'-z^*|\asymp|z'^{(l)}-z^{*(l)}|$ и, во-вторых, применима лемма 2 (с заменой в ней k на j), и мы получаем

$$|z'-z^*|\cdot>|z'^{(l)}-z^{*(l)}|\cdot>$$
$$\cdot>|z'^{(l+1)}-z^{*(l+1)}|\,[|z'^{(l)}-z_j^{(l)}|^{1/\alpha_j}+|z'^{(l+1)}-z^{*(l+1)}|]^{\alpha_j-1}.$$

Далее, рассуждая как и выше, покажем, что $|z'^{(l+1)}-z^{*(l+1)}|\asymp|z'^{(l+1)}-z^{*(l+1)}|$. Так как $z'^{(l+1)}\in\Gamma(\overline{G}(l+1))$, $z^{*(l+1)}\in\Gamma_R(\overline{G}(l+1))$ и $\overline{G}(l+1)\in\Psi(c_1,\ c_2)$, то как и выше при оценке снизу $\rho_R(z)$, $z\in\Gamma'$, покажем, что $|z'^{(l+1)}-z^{*(l+1)}|\asymp R-1$, и учитывая, что $|z'^{(l)}-z_j^{(l)}|\asymp|z'-z_j|$, имеем

$$|z'-z^*|\cdot>(R-1)[|z'-z_j|^{1/\alpha_j}+(R-1)]^{\alpha_j-1},\ 1<R\leqslant R_\varepsilon.$$

Но

$$\rho_R(z)=|z-z^*|=|z-z'|+|z'-z^*|\cdot>|z-z'|+(R-1)[|z'-z_j|^{1/\alpha_j}+(R-1)]^{\alpha_j-1},$$

и нам достаточно доказать неравенство

$$|z-z'|+(R-1)[|z'-z_j|^{1/\alpha_j}+(R-1)]^{\alpha_j-1}\cdot>(R-1)[|z-z_j|^{1/\alpha_j}+(R-1)]^{\alpha_j-1}.$$

При $\alpha_j>1$, полагая $x=\frac{|z'-z_j|}{(R-1)^{\alpha_j}}$, $y=\frac{|z-z'|}{(R-1)^{\alpha_j}}$, видим, что достаточно доказать неравенство

$$y+(x^{1/\alpha_j}+1)^{\alpha_j-1}\cdot>[(x+y)^{1/\alpha_j}+1]^{\alpha_j-1}.$$

Заменяя левую и правую части этого неравенства эквивалентными, получаем очевидное неравенство $y+x^{1-\alpha_j^{-1}}+1\cdot>y^{1-\alpha_j^{-1}}+x^{1-\alpha_j^{-1}}+1$.

При $\alpha_j<1$, полагая $x=\frac{|z-z_j|}{(R-1)^{\alpha_j}}$, $y=\frac{|z-z'|}{(R-1)^{\alpha_j}}$, приходим к необходимости доказать неравенство

$$y+\frac{1}{((x+y)^{1/\alpha_j}+1)^{1-\alpha_j}}\cdot>\frac{1}{(x^{1/\alpha_j}+1)^{1-\alpha_j}},$$

которое равносильно следующему очевидному неравенству

$$y+\frac{1}{x^{\alpha_j^{-1}-1}+y^{\alpha_j^{-1}-1}+1}\cdot>\frac{1}{x^{\alpha_j^{-1}-1}+1}.$$

Итак, случай $z\in\Gamma^j$ также доказан. Лемма доказана.

Следствие 4. *Пусть* $z',\ z''\in u_j(\varepsilon)$, $\alpha_j<1$, $|z'-z_j|\geqslant|z''-z_j|$, $[z',\ z'']\in\overline{G}^1$, $\gamma(z',\ z'')=\varphi_\varepsilon([z',\ z''])$. *Тогда*

$$|z''-z'|\cdot>|\gamma(z',z'')|\,[|z'-z_j|^{1/\alpha_j}+|\gamma(z',z'')|]^{\alpha_j-1}.$$

Доказательство. Пусть $z_\nu=z'+\frac{\nu}{n}(z''-z')$, $\nu=0,\cdots,n$, $\xi_\nu=\varphi_*(z_\nu)$. Тогда в силу доказательства леммы 3

$$|z''-z'|=\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu-z_{\nu-1}|\cdot>\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|\xi_\nu-\xi_{\nu-1}|}{[|z'-z_j|^{1/\alpha_j}+|\xi_\nu-\xi_{\nu-1}|]^{1-\alpha_j}}.$$

Но справедливо неравенство

$$\frac{a}{(c+a)^{1-\alpha}}+\frac{b}{(c+b)^{1-\alpha}}\geqslant\frac{a+b}{(c+a+b)^{1-\alpha}},\ a,\ b,\ c>0,\ 0<\alpha<1,$$

и потому

$$|z''-z'|\cdot>\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n}|\xi_\nu-\xi_{\nu-1}|}{\left[|z'-z_j|^{1/\alpha_j}+\sum\limits_{\nu=1}^{n}|\xi_\nu-\xi_{\nu-1}|\right]^{1-\alpha_j}}.$$

Отсюда, устремляя n к ∞ получаем заключение следствия.

Замечание 2. Повторяя частично доказательство леммы 3, легко получим следующее утверждение. Если $z\in\Gamma^j$ $\zeta^*\in\Gamma^j_R$, $1<R\leqslant R_1$, $\xi_0=\varphi_*(z)$, $\xi^*=\varphi_*(\zeta^*)$, то при $\alpha_j<2$ имеем

$$|\zeta^*-z|\cdot>\zeta|\xi^*-\xi_0|\,[|\zeta^*-z_j|^{1/\alpha_j}+|\xi^*-\xi_0|]^{\alpha_j-1}. \tag{14}$$

Здесь в квадратных скобках ζ^* можно заменить на z. Если $\alpha_j=2$, то такая оценка, вообще говоря, не имеет места, и мы ее заменим несколько другой оценкой. Пусть $\alpha_j=2$, Γ^j_+ и Γ^j_- — образы дуг $t=e^{i\theta}$, $\theta_j\leqslant\theta\leqslant\theta_j+h'$, и $t=e^{i\theta}$, $\theta_j-h'\leqslant\theta\leqslant\theta_j$, при отображении $z=\psi(t,\overline{G})$, где h' — достаточно малое, но такое, что $\Gamma^j\subset\Gamma^j_+\cup\Gamma^j_-$. Допустим, не умаляя общности, что $z\in\Gamma^j_+$, и обозначим через z' какую-либо точку, принадлежащую Γ^j_- такую, что $|z'-z_j|=|z-z_j|$ и положим $\xi'_0=\varphi_*(z')$. Мы считаем, что $z\neq z_j$ (ибо при $z=z_j$ неравенство (14) имеет место). Проведем вектор $k=\frac{1}{2}(z+z')-z_j$ из точки z_j и разделим плоскость Z прямой, проходящей через z_j параллельно k, на две полуплоскости—правую, которая лежит правее k, если смотреть по направлению k, и левую. Если ζ^* лежит в правой (в левой) полуплоскости, то обозначим через ζ' ближайшую к $z\,(kz')$ точку отрезка $[\zeta^*,z]$ (отрезка $[\zeta^*,z']$), отрезок $[\zeta^*,\zeta']\in\overline{G}'$. Ясно, что $\zeta'\in\Gamma^j_+$ (соответственно $\zeta'\in\Gamma^j_-$). Точки z и ζ^* (z' и ζ^*) можно соединить кривой, состоящей из дуги $\overparen{z,\zeta'}$ (дуги $\overparen{z',\zeta'}$) кривой Γ, соединяющей точки z и ζ' (z' и ζ') и не содержащей точки z_j и отрезка $[\zeta',\zeta^*]$. Изменение $\arg\zeta$, когда ζ пробегает эту кривую, не превосходит π, и рассуждая как при доказательстве леммы 3 (используя лемму 2), получим, что при $\varepsilon>0$ достаточно малом имеет место оценка (14), если ζ^* лежит в правой полуплоскости, и оценка

$$|\zeta^*-z|\geqslant|\zeta^*-z'|\cdot>|\zeta^*-\zeta_0|\,[\,|\zeta^*-z_l|^{1/2}+|\zeta^*-\zeta_0|],$$

если ζ^* лежит в левой полуплоскости. Ясно, что если ζ^* лежит на границе указанных полуплоскостей, то справедлива любая из оценок (14) и (14′). Отметим еще, что $\rho_R(z)\asymp\rho_R(z')$, ибо $|z-z_l|=|z'-z_l|$.

Лемма 4. *Пусть $z', z''\in\overline{G}$. Тогда существует спрямляемая простая кривая $\lambda=\lambda(z', z'')\subset\overline{G}$ с концами в точках z' и z'' такая, что*

$$|\lambda(z', z'')|\leqslant U|z'-z''|,$$

где U—некоторая постоянная, зависящая лишь от $\overline{G}$.

Лемма 5. *Пусть $1\leqslant R\leqslant R_*$ и $\delta>0$. Тогда*

$$|\Gamma_R(z, \delta)|\leqslant V\delta, \tag{15}$$

где V -некоторая постоянная, зависящая лишь от $\overline{G}$.

Доказательства лемм 4 и 5 аналогичны. Сведем сначала доказательства этих лемм к доказательству некоторого неравенства.

Сведение в лемме 4. Отрезок $[z', z'']=(\bigcup_\nu\Lambda_\nu)\cup(\bigcup_\nu\Lambda_\nu^*)$, где Λ_ν и Λ_ν^* — непересекающиеся отрезки соответственно принадлежащие G^1 и $\overline{G}$. Пусть z_ν', z_ν'' — концы Λ_ν, $t_\nu'=\varphi(z_\nu', \overline{G})$, $t_\nu''=\varphi(z_\nu'', \overline{G})$, $\Lambda_\nu'=\varphi(\Lambda_\nu, \overline{G})$, λ_ν' — та из дуг окружности $|t|=1$ с концами в точках t_ν' и t_ν'', которая вместе с Λ_ν' является границей ограниченной области, не содержащей круга $|t|<1$, $\lambda_\nu=\psi(\lambda_\nu', \overline{G})$. Точки z_ν', z_ν'', $t_\nu'=e^{i\theta_\nu'}$, $t_\nu''=e^{i\theta_\nu''}$, обозначаем так, чтобы $\lambda_\nu'=\{e^{i\theta}: \theta_\nu'\leqslant\theta\leqslant\theta_\nu''\}$. В качестве $\lambda(z', z'')$ возьмем кривую $(\bigcup_\nu\lambda_\nu)\cup(\bigcup_\nu\Lambda_\nu^*)$. Если мы покажем, что

$$|\lambda_\nu|\leqslant U|\Lambda_\nu| \tag{16}$$

при всех ν, где $U\geqslant1$, то лемма 4 будет доказана. Действительно

$$|\lambda(z', z'')|\leqslant\sum_\nu|\lambda_\nu|+\sum_\nu|\Lambda_\nu^*|\leqslant U\sum_\nu|\Lambda_\nu|+\sum_\nu|\Lambda_\nu^*|\leqslant$$

$$\leqslant U(\sum_\nu|\Lambda_\nu|+\sum_\nu|\Lambda_\nu^*|)=U|z'-z''|.$$

Итак доказательство леммы 4 сведено к доказательству неравенства (16).

Сведение в лемме 5. Пусть α_R — диаметр Γ_R. Если $V\geqslant2\dfrac{|\Gamma_R|}{\alpha_R}$, то неравенство (15) справедливо при $\delta>\dfrac{1}{2}\alpha_R$, и потому далее полагаем, что $V\geqslant2\dfrac{|\Gamma_R|}{\alpha_R}$ и $\delta<\dfrac{1}{2}\alpha_R$. Заметим, что $\overline{G}_R\subset k(z, \delta)$ при $\delta<\dfrac{1}{2}\alpha_R$ и при таких δ либо $|\Gamma_R(z, \delta)|=0$, если $\Gamma_R\subset ck(z, \delta)$ и неравенство (15) справедливо, либо $\Gamma_R \cap k(z, \delta) \neq \Phi$, что и предполагаем в дальнейшем.

Пусть $\Lambda = \bigcup_\nu \Lambda_\nu$, где Λ_ν — непересекающиеся дуги границы круга $k(z, \delta)$, принадлежащие $\overline{G}_R$, z_ν', z_ν'' — концы Λ_ν, $t_\nu' = \varphi(z_\nu', \overline{G})$, $t_\nu'' = \varphi(z_\nu'', \overline{G})$, $\Lambda_\nu' = \varphi(\Lambda_\nu, \overline{G})$, λ_ν' — та из дуг окружности $|t| = R$ с концами в точках t_ν' и t_ν'', которая вместе с Λ_ν' является границей ограниченной области, не содержащей круга $|t| < R$, $\lambda_\nu = \psi(\lambda_\nu', \overline{G})$. Точки z_ν', z_ν'', $t_\nu' = Re^{i\theta_\nu'}$, $t_\nu'' = Re^{i\theta_\nu''}$ выбираем так, чтобы $\lambda_\nu' = \{Re^{i\theta}: \theta_\nu' \leqslant \theta \leqslant \theta_\nu''\}$. Ясно, что $\Gamma_R(z, \delta) \subset \bigcup_\nu \lambda_\nu$, и если мы докажем, что

$$|\lambda_\nu| \leqslant A\,|\Lambda_\nu| \tag{16'}$$

для всех ν, где A — постоянная, зависящая лишь от $\overline{G}$, то

$$|\Gamma_R(z, \delta)| \leqslant \sum_\nu |\lambda_\nu| \leqslant A \sum_\nu |\Lambda_\nu| < 2\pi A\delta,$$

и в качестве V мы можем взять $\max\left\{\sup\limits_{1<R<R_1} 2\frac{|\Gamma_R|}{\alpha_R}, 2\pi A\right\}$. Итак доказательство леммы 5 сведено к доказательству неравенства (16').

Докажем неравенство (16') ((16) доказывается аналогично). При каждом θ, $\theta_\nu' \leqslant \theta \leqslant \theta_\nu''$, положим $x(\theta) = \min |t|$, $t = xe^{i\theta} \in \Lambda_\nu$. Тогда

$$|\Lambda_\nu| \geqslant \int\limits_{\theta_\nu'}^{\theta_\nu''} |\psi'(x(\theta)\,e^{i\theta})|\,x(\theta)\,d\theta = J(\theta_\nu', \theta_\nu'') = J_\nu,$$

$$|\lambda_\nu| \leqslant \int\limits_{\lambda_\nu} |\psi'(t)|\,|dt| = \int\limits_{\theta_\nu'}^{\theta_\nu''} |\psi'(Re^{i\theta})|\,R\,d\theta = J_*(\theta_\nu', \theta_\nu'') = J_{*\nu}.$$

Неравенство (16') будет доказано, если покажем, что отношение $v_\nu = v(\theta_\nu', \theta_\nu'') = J_{*\nu} J_\nu^{-1}$ ограничено сверху при любых θ_ν' и θ_ν''. Для этого достаточно оценить v_ν в следующих случаях.

1) Всякая точка $z \in \lambda_\nu$ отстоит от точек z_j больше чем на ε.

3) Точки z_ν', $z_\nu'' \in u_j(\varepsilon)$.

Если ни 1) ни 2) не выполнены, то λ_ν разобьем на части, для каждой из которых выполнено одно из этих условий. Соответствующим образом разобьем Λ_ν.

В первом случае мы можем считать, что (см. (1) и (2)) для $t \in \Lambda_\nu'$ выполняется второе из неравенств (1) и мы имеем

$$J_*(\theta_\nu', \theta_\nu'') \leqslant c_2(\theta_\nu'' - \theta_\nu'),\quad J(\theta_\nu', \theta_\nu'') \geqslant c_1(\theta_\nu'' - \theta_\nu'),\quad v_\nu < \frac{c_2}{c_1}.$$

Во втором случае, при $\alpha_j > 1$ имеем

$$J_\nu \leqslant c_2 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \left[\left(1-\frac{1}{R}\right)^2 + 4\,\frac{1}{R}\sin^2\frac{\theta_j-\theta}{2} \right]^{\frac{\alpha_j-1}{2}} R\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \left[\left(1-\frac{1}{R}\right)^{\alpha_j-1} R + R^{\frac{\alpha_j+1}{2}} \right] |\theta_j-\theta|^{\alpha_j-1}\,d\theta = c_2 J^*_\nu,$$

$$J_\nu \geqslant c_1 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \left[\left(1-\frac{1}{x(\theta)}\right)^2 + 4\,\frac{1}{x(\theta)}\sin^2\frac{\theta_j-\theta}{2} \right]^{\frac{\alpha_j-1}{2}} x(\theta)\,d\theta \cdot >$$

$$\cdot > c_1 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \left[\left(1-\frac{1}{x(\theta)}\right)^{\alpha_j-1} x(\theta) + x(\theta)^{\frac{\alpha_j+1}{2}} |\theta_j-\theta|^{\alpha_j-1} \right] d\theta \geqslant$$

$$\geqslant c_1 J^*_\nu, \quad v_\nu < \cdot \frac{c_2}{c_1}.$$

Во втором случае, при $\alpha_j<1$ рассмотрим сначала подслучай, когда одна из точек z'_ν и z''_ν лежит на границе $k(z_j, \varepsilon)$, например, точка z'. Тогда существует $h_1>0$ такое, что $|\theta'_\nu-\theta_j| \geqslant h_1$. Пусть, для определенности, $\theta'_\nu<\theta''_\nu\leqslant\theta_j$ (случай $\theta'_\nu<\theta_j<<\theta''_\nu$ рассматривается аналогично). Имеем

$$J_\nu < c_2 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\alpha_j} |\theta_j-\theta|^{\alpha_j-1} d\theta \leqslant \frac{2c_2}{\alpha_j}\left[(\theta_j-\theta'_\nu)^{\alpha_j} - (\theta_j-\theta''_\nu)^{\alpha_j}\right],$$

$$J_\nu \geqslant c_1 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \frac{x(\theta)^{1-\alpha_j}}{\left[(x(\theta)-1)^2 + 4x(\theta)\sin^2\dfrac{\theta_j-\theta}{2}\right]^{\frac{1-\alpha_j}{2}}}\,d\theta.$$

Подынтегральная функция, как функция от $x(\theta)$ достигает максимального значения в $1\leqslant x(\theta)\leqslant\infty$ при $x(\theta)=\infty$, и мы имеем

$$J_\nu \geqslant c_1\left((\theta_j-\theta'_\nu)-(\theta_j-\theta''_\nu)\right),$$

$$v_\nu \leqslant \frac{2}{\alpha_j}\,\frac{c_2}{c_1}\,\frac{(\theta_j-\theta'_\nu)^{\alpha_j}-(\theta_j-\theta''_\nu)^{\alpha_j}}{(\theta_j-\theta'_\nu)-(\theta_j-\theta''_\nu)} \leqslant \frac{2}{\alpha_j}\,\frac{c_2}{c_1}\,\frac{1}{(\theta_j-\theta'_\nu)^{1-\alpha_j}} \leqslant \frac{2}{\alpha_j}\,\frac{c_2}{c_1}\,\frac{1}{h_1^{1-\alpha_j}}.$$

Из изложенного следует, что при любом расположении точек z'_ν и z''_ν относительно точек z_j отношение $\dfrac{|\lambda_\nu|}{|\Lambda_\nu|}$ ограничено, если только точки z'_ν и z''_ν одновременно не лежат в $u_j(\varepsilon)$ и $\alpha_j<1$. Случай, когда z', $z''\in u_j(\varepsilon)$ и $\alpha_j<1$ теперь и рассмотрим. При этом θ'_ν и θ''_ν лежат в промежутке $[\theta_j-h_1, \theta_j+h_1]$. Пусть сначала θ'_ν и θ''_ν лежат по разные стороны от θ_j. Как и выше имеем

$$|\lambda_\nu|\leqslant J_\nu\leqslant\frac{2}{\alpha_j}c_2[(\theta''_\nu-\theta_j)^{\alpha_j}+(\theta_j-\theta'_\nu)^{\alpha_j}].$$

Полагая $\xi'_\nu=\varphi_*(z'_\nu)$, $\xi''_\nu=\varphi_*(z''_\nu)$, $\gamma_\nu=\varphi_*([z'_\nu, z''_\nu])$, в силу леммы 3 и следствия 4, имеем

$$|z'_\nu-z_j|<\cdot|\xi'_\nu-\xi_j|^{\alpha_j},\ |z''_\nu-z'_\nu|\cdot>|\gamma_\nu|[|\xi'_\nu-\xi_j|+|\gamma_\nu|]^{\alpha_j-1}.$$

(Мы считаем, что $|z'_\nu-z_j|\leqslant|z''_\nu-z_j|$). Далее имеем

$$|\xi'_\nu-\xi_j|<\cdot c'_2(\theta_j-\theta'_\nu),\ |\gamma_\nu|=\int\limits_{\gamma_\nu}|d\xi|\geqslant\int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu}c_1|d\theta|=c_1(\theta''_\nu-\theta'_\nu).$$

Таким образом, $|z''_\nu-z'_\nu|\cdot>(\theta''_\nu-\theta'_\nu)[\theta_j-\theta'_\nu+\theta''_\nu-\theta'_\nu]^{\alpha_j-1}$ и

$$\frac{|\lambda_\nu|}{|\Lambda_\nu|}<\cdot\frac{(\theta''_\nu-\theta_j)^{\alpha_j}+(\theta_j-\theta'_\nu)^{\alpha_j}}{(\theta''_\nu-\theta'_\nu)(\theta_j-\theta'_\nu+\theta''_\nu-\theta'_\nu)^{\alpha_j-1}}.$$

Полагая $x=\dfrac{\theta_j-\theta'_\nu}{\theta''_\nu-\theta'_\nu}$, имеем

$$\frac{|\lambda_\nu|}{|\Lambda_\nu|}<\cdot\frac{(1-x)^{\alpha_j}+x^{\alpha_j}}{(1+x)^{\alpha_j-1}}<2\,[(1-x)^{\alpha_j}+x^{\alpha_j}]\leqslant 4.$$

Пусть теперь θ'_ν и θ''_ν лежат по одну сторону от θ_j, например, $\theta'_\nu<\theta''_\nu<\theta_j$. Имеем

$$\frac{|\lambda_\nu|}{|\Lambda_\nu|}<\cdot\frac{(\theta_j-\theta'_\nu)^{\alpha_j}-(\theta_j-\theta''_\nu)^{\alpha_j}}{(\theta''_\nu-\theta'_\nu)(\theta_j-\theta'_\nu+\theta''_\nu-\theta'_\nu)^{\alpha_j-1}}.$$

Полагая $x=\dfrac{\theta_j-\theta''_\nu}{\theta_j-\theta'_\nu}$, имеем

$$\frac{|\lambda_\nu|}{|\Lambda_\nu|}<\cdot\frac{1-x^{\alpha_j}}{(1-x)[2-x]^{\alpha_j-1}}\leqslant 2\frac{1-x^{\alpha_j}}{1-x}\leqslant 2.$$

Леммы 4 и 5 доказаны.

Следствие 5. Пусть функция $F(z)$ непрерывна в $\overline{G}$, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $F(z)$ в $\overline{G}$, $\lambda\geqslant1$. Тогда

$$\omega(\lambda\delta)\leqslant\sigma\lambda\omega(\delta),\ \delta>0,\ \sigma\leqslant 2U.$$

Доказательство. Пусть z', $z''\in\overline{G}$, $|z'-z''|\leqslant\lambda\delta$, $\delta>0$. Соеди ним z' и z'' кривой $\lambda(z', z'') \in \overline{G}$, как указано в лемме 4, и отложим на ней $N \leqslant [\lambda U]+1$ точки z_ν, расстояние между которыми равно δ, $z = z'$, $|z_N - z''| \leqslant \delta$. Тогда

$$|F(z') - F(z'')| \leqslant \sum_{\nu=1}^{N-1} |F(z_\nu) - F(z_{\nu+1})| + |F(z_N) - F(z'')| \leqslant$$
$$\leqslant N\omega(\delta) \leqslant (\lambda U + 1)\,\omega(\delta) \leqslant 2U\lambda\omega(\delta).$$

Отсюда и из определения модуля непрерывности следует заключение следствия.

Лемма 6. *Имеют место оценки* $(0 < \delta < h)$

$$\int\limits_{\overline{\Gamma}_R(z,\delta)} |\zeta - z|^s\, |d\zeta| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{s+1} V\delta^{s+1}, & -1 < s \leqslant 0, \\ V\delta^{s+1}, & s \geqslant 0, \end{cases} \qquad \overline{\Gamma}_R(z,\delta) = \Gamma_R \cap \overline{k(z,\delta)},$$

$$\int\limits_{\overline{\Gamma}_R(z,\delta,h)} |\zeta - z|^s\, |d\zeta| \leqslant \begin{cases} \dfrac{s}{s+1} V\delta^{s+1}, & s < -1, \\ \dfrac{1}{s+1} Vh^{s+1} & -1 < s < 0 \\ Vh^{s+1}, & s \geqslant 0 \end{cases} \qquad \overline{\Gamma}_R(z,\delta,h) = \Gamma_R \cap \overline{k(z,\delta,h)}.$$

Доказательство. Для $\overline{\Gamma}_R(z,\delta) = \Gamma_R \cap \overline{k(z,\delta)}$, в силу леммы 5, при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$|\overline{\Gamma}_R(z,\delta)| < \Gamma_R(z,\delta+\varepsilon) \leqslant V(\delta+\varepsilon),\ \delta > 0;$$

в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $|\overline{\Gamma}_R(z,\delta)| \leqslant V\delta$. Ради краткости записи положим $S(x) = |\overline{\Gamma}_R(z,x)|$, $x > 0$. Тогда при $-1 < s < 0$ имеем

$$\int\limits_{\overline{\Gamma}_R(z,\delta)} |\zeta - z|^s\, |d\zeta| = \int_0^\delta x^s\, dS(x) = S(x)\, x^s\Big|_0^\delta - s\int_0^\delta x^{s-1} S(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant S(\delta)\,\delta - sV\int_0^\delta x^s\, dx \leqslant V\delta^{s+1} - \frac{s}{s+1} V\delta^{s+1} = \frac{1}{s+1} V\delta^{s+1}.$$

При $s \geqslant 0$ получаем

$$\int\limits_{\overline{\Gamma}_R(z,\delta)} |\zeta - z|^s\, |d\zeta| \leqslant S(x)\, x^s\Big|_0^\delta \leqslant V\delta^{s+1}.$$

Аналогично при $s < 0$

$$J_s = \int\limits_{\overline{\Gamma}_R(z,\delta,h)} |\zeta - z|^s\, |d\zeta| = S(x)\, x^s\Big|_\delta^h - sV\int_\delta^h x^s\, dx.$$

Отсюда при $s \neq -1$ имеем

$$J_s \leqslant Vh^{s+1} - \frac{s}{s+1} Vh^{s+1} + \frac{s}{s+1} V\delta^{s+1} = \frac{1}{s+1} Vh^{s+1} + \frac{s}{s+1} V\delta^{s+1}.$$

Если $s>-1$, то $J_s\leqslant\frac{1}{s+1}Vh^{s+1}$, и если $s<-1$, то $J_s\leqslant\frac{s}{s+1}V\delta^{s+1}$. При $s\geqslant 0$ очевидно, что $J_s\leqslant Vh^{s+1}$. Лемма доказана.

Далее нам потребуется ядро типа Джексона

$$J_{n,m}(\theta)=\frac{1}{\gamma_{n,m}}\left(\frac{\sin\left[\frac{n}{m}\right]\theta}{\sin\theta}\right)^m\quad \gamma_{n,m}=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\left[\frac{n}{m}\right]\theta}{\sin\theta}\right)^m d\theta,$$

где $m>0$ — четное число и n — натуральное. Отметим некоторые свойства этого ядра.

1) Ядро $J_{n,m}(\theta)$ есть четный тригонометрический полином порядка не выше n,

2) $\left|\frac{\sin\left[\frac{n}{m}\right]\theta}{\sin\theta}\right|\leqslant\left[\frac{n}{m}\right],\ |\theta|<\frac{\pi m}{n},\quad\left|\frac{\sin\left[\frac{n}{m}\right]\theta}{\sin\theta}\right|\leqslant\frac{1}{|\theta|},\ |\theta|<\pi,$

3) $\gamma_{n,m}\asymp n^{m-1}$,

4) $\int_{-\pi}^{\pi}J_{n,m}(\theta)\,\theta^s\,d\theta\asymp\frac{1}{n^s},\ 0\leqslant s\leqslant m,$

5) $\int_{|\theta|>a>0}J_{n,m}(\theta)\,\theta^s\,d\theta<\frac{1}{n^{m-1}a^{m-1-s}},\ 0\leqslant s\leqslant m.$

Пусть $\overline{G}\in\Psi^*$. Положим $R>1$,

$$P_n(z,\zeta)=\int_{-\pi}^{\pi}J_{n,m}(\theta)\sum_{p=1}^{k}\frac{(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta}-z)^p}\,d\theta,\ \zeta\in\overline{G}^1,\ z\in G.$$

Покажем, что $p_n(z,\zeta)$ есть полином от z степени не выше $n-1$. Разлагая в ряд по степеням $e^{i\theta}$, последовательно получаем

$$(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^{p-1}=(\psi(Re^{-i\theta}\varphi(\zeta))-\zeta)^{p-1}=(\gamma R\varphi(\zeta)\,e^{-i\theta}+(\gamma_0-\zeta)+$$
$$+\gamma_1R^{-1}\varphi(\zeta)^{-1}e^{i\theta}+\cdots)^{p-1}=\gamma^{p-1}R^{p-1}\varphi(\zeta)^{p-1}e^{-i(p-1)\theta}\times$$
$$\times\left(1+\sum_{q=1}^{\infty}\gamma_{p,q}(\zeta)\,e^{iq\theta}\right),$$

где $\gamma_{p,q}(\zeta)$ — функции, регулярные в G^1 и непрерывные в $\overline{G}^1$,

$$\frac{1}{(\zeta_{R,\theta}-z)^p}=\frac{1}{\gamma^pR^p\varphi(\zeta)^pe^{-ip\theta}\left(1+\frac{\gamma_0-z}{\gamma R\varphi(\zeta)}e^{i\theta}+\frac{\gamma_1}{\gamma R^2\varphi(\zeta)^2}e^{2i\theta}+\cdots\right)^p}=$$

$$=\frac{1}{\gamma^pR^p\varphi(\zeta)^pe^{-ip\theta}}\left(1+\sum_{q=1}^{\infty}p_{p,q}(z,\zeta)\,e^{iq\theta}\right),$$

$$\frac{(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta}-z)^p}=\frac{1}{\gamma R}e^{i\theta}\left(1+\sum_{q=1}^{\infty}p^{*}_{p,q}(z,\zeta)\,e^{iq\theta}\right).$$

Здесь $p_{p,q}(z, \zeta)$ и $\overset{*}{p}_{p,q}(z, \zeta)$ — полиномы от z степени q, коэффициенты которых есть функции от ζ, регулярные в G^1 и непрерывные в $\overline{G}^1$. Теперь ясно, что $p_n(z, \zeta)$ есть полином от z степени не выше n.

4°. Доказательство теоремы. Пусть $p_n(z, \zeta)$ — полином, введенный в конце пункта 3°, $R = 1 + \frac{1}{n} \leqslant R_1$, $k \geqslant \frac{4}{\alpha}(r+1)$, $\alpha = \min\limits_{j=1,\ldots,l}(\alpha_j, 1)$, $m=4(k+1)$, ν, $0 \leqslant \nu \leqslant r$, — целое число

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\, p_n(z, \zeta)\, d\zeta, \quad z \in G.$$

Имеем

$$f^{(\nu)}(z) - p_n^{(\nu)}(z) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta) \left[\frac{\nu!}{(\zeta - z)^{\nu+1}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{p=1}^{k} \frac{(p+\nu-1)!}{(p-1)!}\, \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{p+\nu}}\right] d\zeta\, d\theta. \tag{17}$$

Заметим, что

$$f(\zeta) - \sum_{\mu=0}^{r} \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(z)(\zeta - z)^{\mu} = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{z}^{\zeta} (\zeta - \tau)^{r-1}[f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(z)]\, d\tau = f_r(\zeta), \tag{18}$$

где интегрирование производится по некоторой спрямляемой кривой $L(z, \zeta)$, соединяющей точки z и ζ и лежащей в $\overline{G}$. В силу леммы 5 мы можем считать, что $|L(z, \zeta)| < V|\zeta - z|$ и $L(z, \zeta) \subset \overline{G} \cap K(z, V|\zeta - z|)$ и потому для $\rho > 0$ имеем

$$|f_r(\zeta)| \leqslant \frac{1}{(r-1)!} V^r |\zeta - z|^r\, \omega(V|\zeta - z|) < \cdot \begin{cases} \dfrac{\omega(\rho)}{\rho} |\zeta - z|^{r+1}, & |\zeta - z| > \rho, \\ \omega(\rho)|\zeta - z|^r, & |\zeta - z| \leqslant \rho. \end{cases} \tag{19}$$

Не умаляя общности мы можем считать, что $f(z)$ обращатся в нуль вместе с r первыми производными в некоторой точки $z_0 \in \Gamma$, и потому

$$\sum_{\mu=0}^{r} \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(z)(\zeta - z)^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{r-1} \frac{(\zeta - z)^{\mu}}{\mu!\,(r-\mu-1)!}\int\limits_{z_0}^{z} (z - \tau)^{r-\mu-1}[f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(z_0)]\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{r!}[f^{(r)}(z) - f^{(r)}(z_0)](\zeta - z)^r = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{z_0}^{z} (\zeta - \tau)^{r-1}[f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(z)]\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{r!}[f^{(r)}(z) - f^{(r)}(z_0)](\zeta - z)^r = p_r(z, \zeta).$$

Здесь интегрирование производится по кривой $L(z_0, z)$, построенной так же как $L(z, \zeta)$. Обозначая через d_2 диаметр $\overline{G}_2$, имеем

$$|p_r(z, \zeta)| \leqslant \left(\frac{V^r}{(r-1)!} + \frac{1}{r!}\right) d_2^r\, \omega(d_2) < \cdot \frac{|\omega(\rho)}{\rho}, \ \rho < d_2, \ \zeta \in \Gamma_2. \tag{20}$$

Учитывая, что $f(\zeta) = f_r(\zeta) + p_r(z, \zeta)$, представим в (17) интеграл по Γ в виде суммы двух интегралов. Интеграл

$$\int_\Gamma f_r(\zeta)\left[\frac{\nu!}{(\zeta - z)^{\nu+1}} - \sum_{p=1}^{k} \frac{(p+\nu-1)!}{(p-1)!} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{p+\nu}}\right] d\zeta$$

разобьем на два интеграла по $\Gamma[z, \rho]$ и $\Gamma(z, \rho)$ и заменим интегрирование по $\Gamma(z, \rho)$ для слагаемого

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z,\rho)} f_r(\zeta)\frac{\nu!}{(\zeta - z)^{\nu+1}} d\zeta$$

интегрированием по $\gamma_\rho = \overline{G} \cap \{\zeta: |\zeta - z| = \rho\}$. В интеграле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma p_r(z, \zeta)\left[\frac{\nu!}{(\zeta - z)^{\nu+1}} - \sum_{p=1}^{k} \frac{(p+\nu-1)!}{(p-1)!} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{p+\nu}}\right] d\zeta,$$

пользуясь аналитичностью $p_r(z, \zeta)$ в $\overline{G}^1$ по ζ, заменим интегрирование по Γ на интегрирование по Γ_2. Далее, учитывая, что

$$\frac{\nu!}{(\zeta - z)^{\nu+1}} - \sum_{p=1}^{k} \frac{(p+\nu-1)!}{(p-1)!} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{p+\nu}} = \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\left[\frac{1}{\zeta - z} - \sum_{p=1}^{k} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{p}}\right] =$$

$$= \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^k}{(\zeta_{R,\theta} - z)^k (\zeta - z)} = \nu! \sum_{p=0}^{\nu} C_{k+p-1}^{k-1} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^k}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{k+p}(\zeta - z)^{\nu-p+1}},$$

получим формулу, в которой произведем оценку модуля левой части, пользуясь (19) и (20):

$$|f^{(\nu)}(z) - p_n^{(\nu)}(z)| < \cdot \int_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\left[\sum_{p=0}^{\nu} \frac{1}{\rho}\int_{\Gamma[z,\rho]} \frac{|\zeta_{R,\theta} - \zeta|^k}{|\zeta_{R,\theta} - z|^{k+p}} |\zeta - z|^{r-\nu+p} |d\zeta| + \right.$$

$$+ \int_{\gamma_\rho} |\zeta - z|^{r-\nu-1} |d\zeta| + \sum_{p=1}^{k} \int_{\Gamma(z,\rho)} \frac{|\zeta_{R,\theta} - \zeta|^{p-1}}{|\zeta_{R,\theta} - z|^{p+\nu}} |\zeta - z|^r |d\zeta| +$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{\nu} \frac{1}{\rho}\int_{\Gamma_2} \frac{|\zeta_{R,\theta} - \zeta|^k}{|\zeta_{R,\theta} - z|^{k+p}} |d\zeta|\right] d\theta \cdot \omega(\rho). \tag{21}$$

Далее полагаем, что $z \in \Gamma$ и $\rho = \rho_R(z)$, и нам нужно показать, что правая часть в (21)$< \cdot \rho^{r-\nu}\omega(\rho)$.

Оценим сначала интегралы по Γ_2. Полагая $\delta = \rho(\overline{G}, \Gamma_2)$ и учитывая, что $|\zeta_{R,\theta} - \zeta| < \left(|\theta| + \frac{1}{n}\right)^\alpha$, имеем

$$J_p(\Gamma_2)=\int_{\Gamma_2}\frac{1}{\rho}\frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^k}{|\zeta_{R,\theta}-z|^{k+p}}|d\zeta|<\cdot\ \frac{1}{\rho}\frac{\left(|\theta|+\frac{1}{n}\right)^{k\alpha}}{\delta^{k+p}}|\Gamma_2|<\cdot\ \frac{1}{\rho}\left(|\theta|^{k\alpha}+\frac{1}{n^{k\alpha}}\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}J_{n,m}(\theta)\,J_p(\Gamma_2)\,d\theta<\cdot\ \frac{1}{\rho}\frac{1}{n^{k\alpha}}\leqslant\frac{1}{\rho n^{2(r+1)}}<\cdot\rho_R(z)^r,\ p=0,\cdots,\nu.$$

Далее очевидно, что

$$J(\gamma_\rho)=\int_{\gamma_\rho}|\zeta-z|^{r-\nu-1}|d\zeta|\leqslant 2\pi\rho^{r-\nu}<\cdot\rho_R(z)^{r-\nu},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}J_{n,m}(\theta)\,J(\gamma_\rho)\,d\theta<\cdot\rho_R(z)^{r-\nu}.$$

Оценим интегралы по $\Gamma(z,\rho)$

$$J_p^*(\Gamma(z,\rho))=\int_{\Gamma(z,\rho)}\frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^{p-1}}{|\zeta_{R,\theta}-z|^{p+\nu}}|\zeta-z|^r|d\zeta|<\cdot\rho^{r-\nu-p}J_p^*,\ J_p^*=\int_{\Gamma(z,\rho)}|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^{p-1}|d\zeta|,$$

и задача свелась к оценке интегралов J_p^*. Пусть z_j — ближайшая угловая точка от ζ, $\zeta\in\Gamma(z,\rho)$, и пусть сначала z лежит в окрестности радиуса ε угловой точки z_j. В этом случае имеем

$$J_p^*<\cdot\int_{\Gamma(z,\rho)}\theta_*^{p-1}\left(|\zeta-z_j|^{1/\alpha_j}+\theta_*\right)^{(p-1)(\alpha_j-1)}|d\zeta|.$$

Здесь и везде далее $\theta_*=|\theta|+\dfrac{1}{n}$. Если $\alpha_j>1$, то

$$\left(|\zeta-z_j|^{1/\alpha_j}+\theta_*\right)^{(p-1)(\alpha_j-1)}<\cdot|\zeta-z|^{(p-1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}+|z-z_j|^{(p-1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}+\theta_*^{(p-1)(\alpha_j-1)},$$

и мы имеем

$$J_p^*<\cdot\ \theta_*^{p-1}\rho^{(p-1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}+1}+\theta_*^{p-1}|z-z_j|^{(p-1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}\rho+\theta_*^{(p-1)\alpha_j}\rho,$$

а учитывая, что $\rho\asymp\dfrac{1}{n}\left(|z-z_j|^{1/\alpha_j}+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1}>\dfrac{1}{n^{\alpha_j}}$, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}J_{n,m}(\theta)\,J_p^*(\Gamma(z,\rho))\,d\theta<\cdot\ \frac{1}{n^{p-1}}\rho^{r-\nu-(p-1)\frac{1}{\alpha_j}}+$$

$$+\frac{\rho^{r-\nu-p+1}}{n^{p-1}}\left(|z-z_j|^{1/\alpha_j}\right)^{(p-1)(\alpha_j-1)}+\frac{\rho^{r-\nu-p+1}}{n^{(p-1)\alpha_j}}<\cdot\rho^{r-\nu}.$$

Если $\alpha_j<1$, то при $|z-z_j|>2\rho$ имеем

$$J_p^* < \cdot \int\limits_{\Gamma(z,\rho)} \frac{\theta_*^{p-1}}{\left(|z-z_j|^{1/\alpha_j}+\frac{1}{n}\right)^{(p-1)(1-\alpha_j)}}|d\zeta| < \cdot n^{p-1}\rho^p\theta_*^{p-1},$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\, J_p^*(\Gamma(z,\rho))\,d\theta < \cdot \rho^{r-\nu},\ p=1,\cdots,k.$$

Если $|z-z_j|<2\rho$, то $\rho \asymp \frac{1}{n}\left(|z-z_j|^{1/\alpha_j}+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1} < \cdot \frac{1}{n^{\alpha_j}}$, $\rho \cdot > \frac{1}{n} \times \times \left(\rho^{1/\alpha_j}+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1}$, и из последнего неравенства получаем

$$\frac{1}{n} < \cdot \rho\left(\rho^{1/\alpha_j}+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha_j} < \rho^{1/\alpha_j}+\frac{1}{n^{1-\alpha_j}}\rho.$$

Полагая здесь $\rho=\frac{1}{n^{\alpha_j}}x$, имеем $A < x^{1/\alpha_j}+x$, где $A>0$—постоянная, откуда заключаем, что x ограничен снизу и, следовательно, $\rho\cdot>\frac{1}{n^{\alpha_j}}$. Таким образом, $\rho\asymp\frac{1}{n^{\alpha_j}}$, и мы имеем

$$J_p^* < \cdot \int\limits_{\Gamma(z,\rho)} \theta_*^{(p-1)\alpha_j}|d\zeta| < \cdot \theta_*^{(p-1)\alpha_j}\rho,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\, J_p(\Gamma(z,\rho))\,d\theta < \cdot \rho^{r-\nu-p}\frac{1}{n^{\alpha_j(p-1)}}\rho < \cdot \rho^{r-\nu},\ p=1,\cdots,k.$$

Пусть теперь z лежит вне окрестности радиуса ε угловых точек. В этом случае $\rho\asymp\frac{1}{n}$ и $|\zeta_{R,\theta}-\zeta| < \cdot \theta_*$, и мы имеем

$$J_\rho^* < \cdot \int\limits_{\Gamma(z,\rho)} \theta_*^{p-1}|d\zeta| < \cdot \theta_*^{p-1}\rho,\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\, J_p(\Gamma(z,\rho))\,d\theta < \cdot$$

$$< \cdot \frac{1}{n^{p-1}}\rho^{r-\nu-p+1} < \rho^{r-\nu},\ p=1,\cdots,k.$$

Итак, интегралы по $\Gamma(z,\rho)$ в (21) рассмотрены и получены нужные оценки. Осталось рассмотреть интегралы по $\Gamma[z,\rho]$. Учитывая, что $|\zeta-z|^{r-\nu+p} < \cdot |\zeta_{R,\theta}-\zeta|^{r-\nu+p}+|\zeta_{R,\theta}-z|^{r-\nu+p}$, видим, что нам достаточно оценить интегралы

$$I_q = \int\limits_{\Gamma[z,\rho]} \frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^{q+r}}{|\zeta_{R,\theta}-z|^{q+\nu}}|d\zeta|,\ q=k-r+p,\ q=k-\nu+p,\ p=0,\cdots,\nu.$$

Если мы покажем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\, I_q\, d\theta < \cdot\, \rho^{r-\nu+1},$$

то теорема будет доказана.

Пусть сначала $|\theta| > \dfrac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}$. Тогда $|\zeta_{R,\theta} - \zeta| < \cdot\, \theta^{\alpha}_{*}$, $I_q < \cdot\, \dfrac{\theta^{(q+r)\alpha}}{\rho^{q+\nu}}$ и

$$\int\limits_{|\theta| > \frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\, I_q\, d\theta < \cdot\, \frac{1}{n^{m-1}\rho^{q+\nu}} \int\limits_{\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}}^{\pi} \theta^{(q+r)\alpha-m}\, d\theta < \cdot$$

$$< \cdot\, \frac{1}{n^{\frac{1}{2}(q+r)\alpha + \frac{1}{2}(m-1)}\rho^{q+\nu}} < \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}(q+r)\alpha + \frac{1}{2}(m-1) - 2q - 2\nu} <$$

$$< \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k+r}{2}\alpha + 2(k+1) - \frac{1}{2} - 2k - 2\nu} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k+r}{2}\alpha + \frac{3}{2} - 2\nu} < \cdot\, \rho^{r-\nu+1}.$$

Далее рассматриваем случай $|\theta| < \dfrac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}$ и в скобках после I_q указываем по какой части $\Gamma[z, \rho]$ производится интегрирование. Разобьем $\Gamma[z, \rho]$ в зависимости от положения точки z. Пусть z_j, $j = 1, \cdots, l$, —все угловые точки. Определим множества Γ_*, $\Gamma(j)$, $\Gamma_{**} \subset \Gamma[z, \rho]$ следующим образом:

а) Пусть для всех $j = 1, \cdots, l$ выполнено $|z - z_j| > \dfrac{\varepsilon}{4}$. Тогда

$$\Gamma_* = \left\{\zeta\colon \zeta \in \Gamma[z, \rho];\ |\zeta_{R,\theta} - z| > \frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}},\ |\zeta_{R,\theta} - z_j| > \frac{\varepsilon}{6},\ j = 1, \cdots, l\right\},$$

$$\Gamma(j) = \left\{\zeta\colon \zeta \in \Gamma[z, \rho];\ |\zeta_{R,\theta} - z_j| < \frac{\varepsilon}{6}\right\},\ j = 1, \cdots, l,$$

$$\Gamma_{**} = \left\{\zeta\colon \zeta \in \Gamma[z, \rho];\ |\zeta_{R,\theta} - z| < \frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}\right\}.$$

в) Пусть для некоторого j_0 выполняется условие $|z - z_{j_0}| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ (ясно, что такая точка z_{j_0} единственна). Тогда Γ_* определим, как в а), $\Gamma(j)$ определим, как в а) для $j \neq j_0$, и не определяем для $j = j_0$, и

$$\Gamma_{**} = \left\{\zeta\colon \zeta \in \Gamma[z, \rho];\ |\zeta_{R,\theta} - z| < \frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\zeta\colon \zeta \in \Gamma[z; \rho];\ |\zeta_{R,\theta} - z_{j_0}| < \frac{\varepsilon}{6}\right\}.$$

Очевидно, что в обоих случаях $\Gamma = \Gamma_* \cup \Gamma_{**} \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{l} \Gamma(j)\right)$.

Оценим сначала $I_q(\Gamma_*)$. Заметим, что при $\zeta\in\Gamma_*$ имеем

$$|\zeta_{R,\theta}-\zeta|\prec\cdot\theta_*,\quad |\zeta-z|\leqslant|\zeta_{R,\theta}-\zeta|+|\zeta_{R,\theta}-z|\prec\cdot|\zeta_{R,\theta}-z|.$$

Используя лемму 6, получим

$$I_q(\Gamma_*)\prec\cdot\int_{\Gamma_*}\frac{\theta_*^{q+r}}{|\zeta-z|^{q+\nu}}|d\zeta|\prec\cdot\theta_*^{q+r}\sqrt{n}^{\,q+\nu-1},$$

$$\int_{|\theta|<\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\,I_q(\Gamma_*)\,d\theta\prec\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{q+r-\frac{1}{2}(q+\nu-1)}\prec\cdot$$

$$\prec\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k-\frac{1}{2}(k-r+\nu-1)}\prec\left(\frac{1}{n}\right)^{2(r-\nu+1)}\prec\cdot\rho^{r-\nu+1}.$$

Отметим, что на $\Gamma(j)$ имеем $|\zeta_{R,\theta}-z|\geqslant|z-z_j|-|\zeta_{R,\theta}-z_j|>\frac{\varepsilon}{12}$, и потому

$$I_q(\Gamma(i)),\prec\cdot\int_{\Gamma_j}\theta_*^{(q+r)\alpha_j}|d\zeta|\prec\cdot\theta_*^{k\alpha_j},$$

$$\int_{|\theta|<\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\,I_q(\Gamma(j))\prec\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k\alpha_j}\prec\left(\frac{1}{n}\right)^{3(r+1)}\prec\cdot\rho^{r-\nu+1}.$$

Оценим $I_q(\Gamma_{**})$. Для этого перейдем на вспомогательную плоскость ξ и обозначим прообразы точек ζ, $\zeta_{R,\theta}$, z, z_j (z_j — ближайшая угловая точка z) и Γ_{**} при отображении $z=\psi_*(\xi)$ через ξ, $\xi_{R,\theta}$, ξ_0, ξ_j и γ_{**}. Если $|z-z_j|>\frac{\varepsilon}{4}$, то $\Gamma_{*\nu}=\left\{\zeta\colon \zeta\in\Gamma;\ |\zeta_{R,\theta}-z|<\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}\right\}$, и потому $|\zeta_{R,\theta}-z_j|\geqslant|z-z_j|-|\zeta_{R,\theta}-z|>\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon}{6}=\frac{\varepsilon}{12}$ и $|\zeta-z_j|\geqslant|z-z_j|-$ $-|\zeta-\zeta_{R,\theta}|-|\zeta_{R,\theta}-z|>\frac{\varepsilon}{4}-\theta_*-\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}$ и при n достаточно больших $\zeta-z|>\frac{\varepsilon}{8}$. Теперь имеем $|\zeta_{R,\theta}-\zeta|\prec\cdot\theta_*\left(|\zeta_{R,\theta}-z_j|^{1/\alpha_j}+\theta_*\right)^{\alpha_j-1}\asymp\theta_*$,

$$|\zeta_{R,\theta}-z|\cdot>|\xi_{R,\theta}-\xi_0|\,\left[\,|z-z_j|^{1/\alpha_j}+|\xi_{R,\theta}-\xi_0|\right]^{\alpha_j-1}\asymp|\xi_{R,\theta}-\xi_0|,$$

$\zeta'_\xi\asymp 1$, $\rho_R(z)\asymp\frac{1}{n}$ и имеем

$$I_q(\Gamma_{**})=\int_{\Gamma_{**}}\frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^{q+r}}{|\zeta_{R,\theta}-z|^{q+\nu}}|d\zeta|\prec\cdot\int_{\gamma_{**}}\frac{\theta_*^{q+r}}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu}}|d\xi|\prec\cdot$$

$$\prec\cdot\int_{\gamma_{**}}\frac{\theta_*^{q+r}}{|\xi_{R,\theta}(\xi)-\xi_0|^{q+\nu}}|d\xi_{R,\theta}(\xi)|\prec\cdot\theta_*^{q+r}\,n^{q+\nu-1},$$

$$\int\limits_{|\theta|<\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\, I_q(\Gamma_{**})\, d\theta < \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{q+r} n^{q+\nu-1} < \cdot \rho^{r-\nu+1}.$$

Пусть теперь $|z-z_j|<\frac{1}{4}\varepsilon$. Тогда $|z-z_j|\asymp|\xi_0-\xi_j|^{\alpha_j}$, $|\zeta_{R,\theta}-z_j|\asymp$ $\asymp|\xi_{R,\theta}-\xi_j|^{\alpha_j}$ и при $\alpha_j<2$ имеем

$$I_q(\Gamma_{**}) < \cdot \int\limits_{\gamma_{**}} \frac{\theta_*^{q+r}\,(|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+\theta_*)^{(q+r)(\alpha_j-1)}\,|\xi-\xi_j|^{\alpha_j-1}\,|d\xi|}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu}\,(|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+|\xi_{R,\theta}-\xi_0|)^{(q+\nu)(\alpha_j-1)}}. \tag{22}$$

Если же $\alpha_j=2$, то как в замечании 2 введем точку z' и $\xi_0'=\varphi_*(z')$. Не нарушая общности, мы можем считать, что $z\in\Gamma'_+$. Разобьем Γ_{**} на две части: Γ_{**}^+ — множество тех $\zeta\in\Gamma_{**}$, для которых $\zeta_{R,\theta}$ лежит в правой полуплоскости по отношению к вектору $k=\frac{1}{2}(z+z')-z_j$ (см. замечание 2) и Γ_{**}^- — множество тех $\zeta\in\Gamma_{**}$, для которых $\zeta_{R,\theta}$ лежит в левой полуплоскости по отношению к тому же вектору. Соответственно этому γ_{**} разобьем на γ_{**}^+ и γ_{**}^-. Тогда $I(\Gamma_{**})$ можно разбить на два интеграла по Γ_{**}^+ и по Γ_{**}^-. Первый интеграл после замены переменной и оценки числителя и знаменателя даст интеграл (22), взятый по γ_{**}^+, который можно заменить интегралом по γ_{**}. Во втором интеграле (по Γ_{**}^-) заменим сначала z на z', что увеличит интеграл, а затем произведем замену переменной и оценки числителя и знаменателя. Это приведет к интегралу (22) по γ_{**}^-, в котором ξ_0 заменено на ξ_0'. В этом интеграле интегрирование по γ_{**}^- можно заменить интегрированием по γ_{**}. Таким образом, $I(\Gamma_{**})<\cdot$ суммы интегралов вида (22), в одном из которых ξ_0 заменено на ξ_0'. Эти интегралы оцениваются одинаковым способом и дают одинаковый результат, поскольку $\rho_R(z')\asymp\rho_R(z)$. Потому далее мы можем считать, что и при $\alpha_j=2$ имеет место неравенство (22). Займемся оценкой интеграла (22).

Рассмотрим сначала случай $\alpha_j>1$. Если $|\xi_{R,\theta}-\xi_j|\leqslant\theta_*$, то $|\xi-\xi_j|^{\alpha_j-1}<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi|^{\alpha_j-1}+|\xi_{R,\theta}-\xi_j|^{\alpha_j-1}<\cdot\theta_*^{\alpha_j-1}$, и числитель в подынтегральном выражении в (22) можно заменить на $\theta_*^{(q+r+1)\alpha_j-1}$, а знаменатель—на $|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}$. Если $|\xi_{R,\theta}-\xi_j|>\theta_*$, то

$$|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+\theta_*<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi_0|+|\xi_0-\xi_j|,\quad |\xi-\xi_j|\leqslant|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+|\xi_{R,\theta}-\xi_0|+$$

$$+|\xi_0-\xi_j|<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi_0|+|\xi_0-\xi_j|$$

и потому

$$(|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+\theta_*)^{(r-\nu)(\alpha_j-1)}|\xi-\xi_j|^{\alpha_j-1}<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)}+$$

$$+|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)},$$

и подынтегральное выражение в (22) можно заменить на

$$\frac{\theta_*^{q+r}(|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)}+|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)})}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu}}.$$

Таким образом

$$I_q(\Gamma_{**}) \prec \int_{\gamma_{**}}\left(\frac{\theta_*^{(q+r+1)\alpha_j-1}}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}}+\frac{\theta_*^{q+r}}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu-(r-\nu+1)(\alpha_j-1)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\theta_*^{q+r}|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)}}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu}}\right)|d\xi|.$$

Используя лемму 5, получаем

$$I_q(\Gamma_{**}) \prec \theta_*^{(q+r+1)\alpha_j-1}\, n^{(q+\nu)\alpha_j-1}+\theta_*^{q+r}\, n^{q+\nu-(r-\nu+1)(\alpha_j-1)-1}+$$

$$+\theta_*^{q+r}\, n^{q+\nu-1}|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)}.$$

$$\int\limits_{|\theta|<\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\, I_q(\Gamma_{**})\, d\theta \prec \left(\frac{1}{n}\right)^{(r-\nu+1)\alpha_j}+$$

$$+\left(\frac{1}{n}|\xi_0-\xi_j|^{\alpha_j-1}\right)^{r-\nu+1} \prec \rho^{\,r-\nu+1}.$$

Последнее неравенство следует из того, что $\rho \succ \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j}$, $\rho \succ \frac{1}{n}|\xi_0-\xi_j|^{\alpha_j-1}$, ибо $\rho \asymp \frac{1}{n}\left(|\xi_0-\xi_j|+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1}$.

Рассмотрим случай $\alpha_j<1$. Имеем, в силу (11) и (14) (см. также (22))

$$I_q(\Gamma_{**}) \prec \int_{\gamma_{**}}\frac{\theta_*^{q+r}(|\xi_0-\xi_j|+|\xi_{R,\theta}-\xi_0|)^{(q+\nu)(1-\alpha_j)}}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu}(|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+\theta_*)^{(q+r)(1-\alpha_j)}}\frac{|d\xi|}{|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}}. \tag{23}$$

Рассмотрим несколько подслучаев. 1) $|\xi_0-\xi_j|<\frac{A}{n}$, где $A>0$ — некоторая постоянная. При этом из геометрических соображений ясно, что $|\xi_{R,\theta}-\xi_0| \asymp |\xi_{R,\theta}-\xi_j| \succ |\xi_0-\xi_j|$, и потому

$$I_q(\Gamma_{**}) \prec \int_{\gamma_{**}}\frac{\theta_*^{(q+r)\alpha_j}}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}}|d\xi|.$$

Представим γ_{**} в виде объединения γ' и γ'', на которых соответственно $|\xi-\xi_j|\leqslant\frac{1}{n}$ и $|\xi-\xi_j|>\frac{1}{n}$, $\xi\in\gamma_{**}$. При этом получаем

$$I_q(\Gamma_{**}) \prec \int_{\gamma'}\theta_*^{(q+r)\alpha_j}\, n^{(q+\nu)\alpha_j}\frac{|d\xi|}{|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}}+$$

$$+\int_{\gamma''} \theta_*^{(q+r)\alpha_j}\, n^{1-\alpha_j} \frac{|d\xi_{R,\theta}|}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}}.$$

Используя лемму 5, имеем

$$I_q(\Gamma_{**}) < \cdot\, \theta_*^{(q+r)\alpha_j}\, n^{(q+\nu)\alpha_j-\alpha_j} + \theta_*^{(q+r)\alpha_j}\, n^{(q+\nu)\alpha_j-1+1-\alpha_j},$$

$$\int\limits_{|\theta|<\frac{\pi}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\, I_q(\Gamma_{**})\, d\theta < \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{(r-\nu+1)\alpha_j} < \cdot\, \rho^{r-\nu+1}.$$

Последнее следует из того, что $\rho \asymp \frac{1}{n}\left(|\xi_0-\xi_j|+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1} \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j}$.

2) $|\xi_0-\xi_j| > \frac{A}{n}$. Представим $\gamma_{**}=\gamma'\cup\gamma''$, $\gamma'=\{\xi\colon \xi\in\gamma_{**};\ |\xi_{R,\theta}-\xi_0|>A_1|\xi_0-\xi_j|\}$, $\gamma''=\{\xi\colon \xi\in\gamma_{**};\ |\xi_{R,\theta}-\xi_0|<A_1|\xi_0-\xi_j|\}$, где A_1 — некоторая постоянная $0<A_1<\frac{1}{2}$. Тогда $|\xi_{R,\theta}-\xi_j| \geqslant |\xi_0-\xi_j|-|\xi_{R,\theta}-\xi_0| > (1-A_1)|\xi_0-\xi_j|$, $\xi\in\gamma''$, и из (23) имеем

$$I_q(\Gamma_{**}) < \cdot \int_{\gamma'} \frac{\theta_*^{(q+r)\alpha_j}\,|d\xi|}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}\,|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}} +$$

$$+\int_{\gamma''} \frac{\theta_*^{q+r}\,|d\xi|}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu}\,|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu)(1-\alpha_j)}\,|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}}.$$

Положим $\gamma'=\gamma_1'\cup\gamma_2'$, $\gamma_1'=\{\xi\colon \xi\in\gamma';\ |\xi-\xi_j|\geqslant A_1|\xi_0-\xi_j|\}$, $\gamma_2'=\{\xi\colon \xi\in\gamma';\ |\xi-\xi_j|<A_1|\xi_0-\xi_j|\}$, и аналогичным образом $\gamma''=\gamma_1''\cup\gamma_2''$. Тогда

$$I_q(\Gamma_{**}) < \cdot \int_{\gamma_1'} \frac{\theta_*^{(q+r)\alpha_j}}{|\xi_0-\xi_j|^{1-\alpha_j}} \frac{|d\xi_{R,\theta}(\xi)|}{|\xi_{R,\theta}(\xi)-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}} +$$

$$+\int_{\gamma_2'} \frac{\theta_*^{(q+r)\alpha_j}}{|\xi_0-\xi_j|^{(q+\nu)\alpha_j}} \frac{|d\xi|}{|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}} +$$

$$+\int_{\gamma_1''} \frac{\theta_*^{q+r}}{|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(1-\alpha_j)}} \frac{|d\xi_{R,\theta}(\xi)|}{|\xi_{R,\theta}(\xi)-\xi_0|^{q+\nu}} + \int_{\gamma_2''} \frac{\theta_*^{q+r}\, n^{q+\nu}}{|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu)(1-\alpha_j)}} \frac{|d\xi|}{|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}}.$$

Заметим, что для $\xi\in\gamma_2''$ имеем $\theta_* \cdot\!> |\xi_{R,\theta}-\xi| \geqslant |\xi_0-\xi_j|-|\xi_{R,\theta}-\xi_0|-|\xi-\xi_j| > (1-2A_1)|\xi_0-\xi_j|$, т. е. $\theta_* > A_2|\xi_0-\xi_j|$, где $A_2>0$ — некоторая постоянная. Следовательно при $\theta_* \leqslant A_3|\xi_0-\xi_j|$ интеграл по γ_2'' отсутствует. Далее, применяя лемму 5, и учитывая в интеграле по γ_1', что $|\xi_{R,\theta}-\xi_0| > A_1|\xi_0-\xi_j|$, получаем оценку

$$
I_q(\Gamma_{**}) < \cdot \begin{cases} \dfrac{\theta_*^{(q+r)\alpha_j}}{|\xi_0-\xi_j|^{(q+\nu-1)\alpha_j}} + \dfrac{\theta_*^{q+r}\; n^{q+\nu-1}}{|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(1-\alpha_j)}} = M_q(\theta), \\ \qquad\qquad \theta_* \leqslant A_2|\xi_0-\xi_j|; \\ M_q(\theta)+N_q(\theta),\; N_q(\theta) = \dfrac{\theta_*^{(q+r)}\; n^{q+\nu}}{|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu)(1-\alpha_j)-\alpha_j}}, \\ \qquad\qquad \theta_* > A_2|\xi_0-\xi_j|. \end{cases} \tag{24}
$$

Теперь имеем

$$
\int\limits_{|\theta|<\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\, I_q(\Gamma_{**})\, d\theta \leqslant \int\limits_{|\theta|<\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\, M_q(\theta)\, d\theta + \int\limits_{|\theta|>A_2|\xi_0-\xi_j|} J_{n,m}(\theta)\, N_q(\theta)\, d\theta = \varepsilon_n + \delta_n. \tag{25}
$$

Обозначая $x=|\xi_0-\xi_j|$, легко получаем, пользуясь (24) и (25)

$$
\varepsilon_n < \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{(q+r)\alpha_j} \frac{1}{x^{(q+\nu-1)\alpha_j}} + \left(\frac{x^{\alpha_j-1}}{n}\right)^{r-\nu+1},
$$

$$
\delta_n < \cdot\, n^{q+\nu-m+1}\, x^{q+r-m-(r-\nu)(1-\alpha_j)+\alpha_j-1},
$$

и $\varepsilon_n+\delta_n < \rho^{r-\nu+1}$, поскольку $\rho \asymp \dfrac{1}{n}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1} \asymp \dfrac{x^{\alpha_j-1}}{n}$, $nx>A$, $m=4(k+1)$, $k-r\leqslant q\leqslant k$, $k>\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)r$.

Теорема доказана для n достаточно больших. Ясно, что она справедлива и для всех $n=0, 1, \cdots$ (с некоторыми другими постоянными A_ν).

Замечание 3. Пусть $\overline{G}=\bigcup\limits_{k=1}^{m}\overline{G}^{(k)}$, $\overline{G}^{(k)}\cap\overline{G}^{(k')}=\varnothing$, $k\neq k'$, $k, k'=1,\cdots,m$, $\overline{G}^{(k)}\in\Psi^*$. Применяя метод работ П. Я. Киселева [8], [9], мы получим теоремы приближения полиномами функций, регулярных во внутренних точках множества $\overline{G}$ и имеющих r ($r=0, 1,\cdots$) непрерывных производных на $\overline{G}$ (см. также работу В. К. Дзядыка [3], стр. 1163). Имеются и другие обобщения.

Ленинградский государственный университет

Поступило 10.V.1971

Ն. Ա. ԼԵԲԵԴԵՎ. Ն. Ա. ՇԻՐՈԿՈՎ. Ֆունկցիաների հավասարաչափ մոտարկման մասին այնպիսի փակ բազմությունների վրա, որոնք ունեն վերջավոր թվով անկյունային կետեր ոչ զրոյական արտաքին անկյուններով *(ամփոփում)*

Դիցուք $\overline{G}$*-ն փակ տիրույթ է,* $\Gamma=\partial\overline{G}$, $\psi(t)=a_1t+a_0+a_{-1}t^{-1}+\cdots$; $a_1>0$, *կոնֆորմ արտապատկերում է* $|t|>1$ *տիրույթը* $C\overline{G}$*-ի վրա,* $\Gamma_R=\psi(\{|t|=R\})$, $R>1$, $\rho_R(z)=\operatorname{dist}(z, \Gamma_\rho)$, $l>0$ *ամբողջ թիվ է։*

$$|t_j| = 1,\ j=1,\cdots,l,\ t_j \neq t_{j'},\ j \neq j',\ 0 < \alpha_j \leqslant 2,$$

$$\alpha_j \neq 1,\ j=1,\cdots,l,\ 0 < h \leqslant \frac{1}{2} \min_{j \neq j'} (|t_j - t_{j'}|, 1),\ 0 < c_1 < c_2 < \infty.$$

կասենք, որ $\overline{G} \in \Psi^* (c_1, c_2, t_1, \alpha_1, \ldots, t_l, \alpha_l)$, եթե $\psi(t)$-ն անընդհատ է $1 < |t| < \infty$-ում

$$c_1 \left|1 - \frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j - 1} < |\psi'(t)| < c_2 \left|1 - \frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j - 1},\ \left|\arg \frac{t_j}{t}\right| < h,$$

$$c_1 < |\psi'(t)| < c_2,\quad \left|\arg \frac{t_j}{t}\right| \geqslant h,\ j = 1,\cdots,l,\ \psi(t)\left(1 - \frac{t_j}{t}\right)^{-\alpha_j}$$

անընդհատ է t_j կետում։ Ապացուցված է թեորեմ, որը ընդհանրացնում է Վ. Կ. Ձյադիկի և Ն. Ն. Վորոբյովի համապատասխան թեորեմները [1—7]։

Դիցուք $f(z) \in A^{(r)} H^{\omega(\delta)}$, $z \in \overline{G}$, $r \geqslant 0$, ամբողջ է $\overline{G} \in \Psi^* (c_1, c_2, t_1, \alpha_1, \cdots, t_l, \alpha_l)$։

Այդ դեպքում $n = 1, 2, \ldots$ համար գոյություն ունի $P_n(z)$ բազմանդամ, որի աստիճանը $\leqslant n$-ից այնպես, որ $\nu = 0, \ldots, r$ դեպքում տեղի ունի

$$|(f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leqslant A_\nu \rho_{1+\frac{1}{n}}(z)^{r-\nu}\, \omega(\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)),\ z \in \Gamma,$$

որտեղ A_ν-ը հաստատուններ են, կախված միայն $\overline{G}$-ից։ Նշված են որոշ ընդհանրացումներ։

N. A. LEBEDEV, N. A. SHIROKOV. *On uniform approximation of functions on closed sets with finite number of angular points with nonzero exterior angles*

(summary)

Let $\overline{G}$ be a closed domain, $\Gamma = \partial \overline{G}$, $\psi(t) = a_1 t + a_0 + a_{-1} t^{-1} + \cdots$, $a_1 > 0$, the conformal map of $|t| > 1$ onto $C\overline{G}$;

$$\Gamma_R = \psi(\{|t| = R\}),\ R > 1,\ \rho_R(z) = \text{dist}(z, \Gamma_R),\ l > 0$$

an integer, $|t_j| = 1$, $j = 1,\cdots,l$, $t_j \neq t_{j'}$, $j \neq j'$; $0 < \alpha_j \leqslant 2$,

$$\alpha_j \neq 1,\ j = 1,\cdots,l;\ 0 < h \leqslant \frac{1}{2} \min_{j \neq j'}, (|t_j - t_{j'}|, 1),\ 0 < c_1 < c_2 < \infty.$$

By definition $\overline{G} \in \Psi^* (c_1, c_2, t_1, \alpha_1, \cdots, t_l, \alpha_l)$ if $\psi(t)$ is continuous in $1 < |t| < \infty$,

$$c_1 \left|1 - \frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j - 1} < |\psi'(t)| < c_2 \left|1 - \frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j - 1},\ \left|\arg \frac{t_j}{t}\right| < h,$$

$$c_1 < |\psi'(t)| < c_2,\ \left|\arg \frac{t_j}{t}\right| \geqslant h,\ j = 1,\cdots,l,\ \psi(t)\left(1 - \frac{t_j}{t}\right)^{-\alpha_j}$$

is continuous at the point t_j. A theorem is proved which generalises the corresponding theorems of V. K. Dzjadik, N. N. Vorobjev [1—7]. Let the function $f(z) \in A^{(r)} H^{\omega(\delta)}$, $z \in \overline{G}$, $r \geqslant 0$ be an integer, $G \in \Psi^* (c_1, c_2, t_1, \cdots, \alpha_l)$. Then for $n = 1, 2, \cdots$ there exists a polynomial $p_n(z)$ of degree $\leqslant n$ such that for $\nu = 0,\cdots,r$ the condition

$$|f^{(\nu)}(z) - p_n^{(\nu)}(z)| \leqslant A_\nu \rho_{1+\frac{1}{n}}(z)^{r-\nu}\, \omega(\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)),\ z \in \Gamma,$$

is satisfied, where A_ν are constants depending only on $\overline{G}$. Some generalisations are indicated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. К. Дзядык.* О проблеме С. М. Никольского в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, № 5, 1959, 697—736.
2. *В. К. Дзядык.* К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского (первое сообщение), Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 6, 1962, 797—824.
3. *В. К. Дзядык.* К теории приближения аналитических функций, непрерывных в замкнутых областях и о проблеме С. М. Никольского (второе сообщение), Изв. АН СССР, сер. матем., 27, № 5, 1963, 1135—1164.
4. *В. К. Дзядык.* О конструктивной характеристике классов Гельдера на замкнутых множествах с кусочно гладкой границей, допускающей ненулевые углы, УМЖ, 20, № 5, 1968, 603—619.
5. *В. К. Дзядык.* Исследования по теории приближений аналитических функций, проводимые в Институте математики АН УССР, УМЖ, 21, № 2, 1969, 173—192.
6. *Н. Н. Воробьев.* О приближении непрерывных функций некоторых классов, заданных на жордановых дугах, УМЖ, 19, № 3, 1967, 90—95.
7. *Н. Н. Воробьев.* Об одновременом приближении функций и их производных в комплексной области, УМЖ, 20, № 1, 1968, 113—119.
8. *П. Я. Киселев.* О приближении аналитических функций полиномами в конечном числе областей, УМЖ, 14, № 2, 1962, 202—205.
9. *П. Я. Киселев.* Некоторые вопросы аппроксимации аналитических функций в конечном числе областей, Сб. „Исследование по современным проблемам конструктивной теории функций", Баку, 1965, 326—332.