ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 4, 1971 Математика

Р. С. ДАВТЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛАМИ ФУРЬЕ

§ 1. Введение

В 1939 году Д. Е. Меньшовым была доказана следующая теорема о представлении измеримых функций тригонометрическими рядами (см. [1]).

Теорема I (Д. Е. Меньшов). *Для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[-\pi, \pi]$, существует тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx+b_k \sin kx, \tag{1.1}$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

В дальнейшем А. А. Талаляном была доказана теорема (см. [2], теорему 1), являющаяся усилением теоремы 1. Она формулируется следующим образом.

Теорема II (А. А. Талалян). Существует тригонометрический ряд (1.1), обладающий тем свойством, что для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, из ряда (1.1) можно выделить подряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \cos n_k x+b_{n_k} \sin n_k x, \ 0 \leqslant n_1<n_2<\cdots,$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на том множестве, где $f(x)$ конечна и сходится к $f(x)$ по мере на том множестве, где $f(x)$ равна $+\infty$ или $-\infty$.

Заметим, что в доказательстве теоремы II существенно использована одна лемма Д. Е. Меньшова о свойствах интеграла Дирихле (см. [3], лемму 2), которая играет важную роль при доказательстве теоремы I. Однако теорема II, в отличие от теоремы I, доказывается без использования принципа локализации Римана для общих тригонометрических рядов и конструкции Д. Е. Меньшова построения нуль-рядов. Это обстоятельство позволяет, используя метод доказательства теоремы II, доказать следующую теорему о представлении измеримых функций интегралами Фурье.

Теорема 1. *Для любой почти везде конечной измеримой функции $F(x)$, определенной на $[0, \infty)$, существует непрерывная на $[0, \infty)$ функция $g(t)$ такая, что*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\lambda g(t)\cos xt\,dt = F(x) \tag{1.2}$$

для почти всех x, $x\in[0,\infty)$, *причем*

$$\lim_{t\to\infty} g(t)=0 \tag{1.3}$$

и

$$\overset{\rho}{\underset{0}{\mathrm{V}}}\, g\leqslant\rho \quad (\rho\in[0,\infty)). \tag{1.4}$$

Заметим, что аналогичная теорема при более слабой сходимости (сходимость по мере) интегралов (1.2) и без требования выполнения (1.4) была доказана в [4], где вместо ядра $\cos xt$ рассмотрены более общие ядра.

Согласно теореме 1, оказывается, что при помощи сравнительно узкого класса функций $g(t)$, удовлетворяющих условиям (1.3) и (1.4), косинус-интегралами Фурье представляются все конечные измеримые функции, определенные на $[0,\infty)$. В связи с этим представляет интерес следующая задача.

Пусть $\varphi(\rho)$—неубывающая функция, заданная на $[0,\infty)$, и через B_φ обозначен класс непрерывных функций $g(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{t\to\infty} g(t)=0 \quad \text{и} \quad \overset{\rho}{\underset{0}{\mathrm{V}}}\, g=O(\varphi(\rho)) \text{ при } \rho\to\infty.$$

Для каких функций $\varphi(\rho)$ можно утверждать, что B_φ является классом представления конечных функций в смысле (1.2)?

Теорема 1 означает, что можно взять $\varphi(\rho)\equiv\rho$.

Из доказательства теоремы 1 будет видно, что существует функция $\varphi(\rho)=o(\rho)$, для которой класс B_φ все же является классом представления (в указанном выше смысле) для всех конечных измеримых функций.

Кроме того, легко показать, что нельзя взять $\varphi(\rho)=O(1)$. Однако нам не удалось найти окончательных оценок для $\varphi(\rho)$.

§ 2. Вспомогательные леммы

Лемма 1 (Д. Е. Меньшов) (см. [3], лемму 1). Пусть $[c, d]$—любой отрезок, r и $\nu>8$ — произвольные натуральные числа и

$$\delta=\frac{d-c}{\nu r},\ c_s=c+s\nu\delta,\ a_s=c_s-\delta$$

$$(s=0,1,2,\cdots,r). \tag{2.1}$$

Тогда

$$\left|\sum_{s=1}^{r}\int_{a_s}^{c_s}\frac{\sin\rho(t-x)}{t-x}\,dt\right|<L$$

$$\left(x\in\left[c+\frac{d-c}{\nu},\ d-\frac{d-c}{\nu}\right],\ \rho\in(-\infty,\ \infty)\right), \tag{2.2}$$

где L — абсолютная константа*.

Замечание 1. Пусть $[c, d]\subset[0, \infty)$ и сохранены все обозначения леммы 1. Положим

$$E_r=[c,\ d]-\bigcup_{s=1}^{r}[a_s,\ c_s], \tag{2.3}$$

$$\varphi_r(t)=\begin{cases}0, & t\in E_r\\ 1, & t\in[c,\ d]-E_r.\end{cases} \tag{2.4}$$

Тогда

$$E_r\subset[c,\ d],\ \mu E_r=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)(d-c), \tag{2.5}$$

$$\left|\int_c^d\varphi_r(t)\left[\frac{\sin\rho(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\right]dt\right|<C$$

$$\left(x\in\left[c+\frac{d-c}{\nu},\ d-\frac{d-c}{\nu}\right],\ \ \rho\in[0,\ \infty)\right), \tag{2.6}$$

где C — абсолютная константа, $C>1$.

Действительно, выполнение (2.5) очевидно (см. (2.3) и (2.1)). Обратившись к (2.6), заметим, что если $x\in\left[c+\frac{d-c}{\nu},\ d-\frac{d-c}{\nu}\right]$ и $t\in[c,\ d]$, то $x+t\geqslant 2c+\frac{d-c}{\nu}$, и следовательно

$$\left|\int_c^d\varphi_r(t)\ \frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\,dt\right|=\left|\ \int\limits_{[c,\ d]-E_r}\frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\mu\{[c,\ d]-E_r\}}{2c+\frac{d-c}{\nu}}=\frac{\frac{d-c}{\nu}}{2c+\frac{d-c}{\nu}}\leqslant 1$$

$$\left(x\in\left[c+\frac{d-c}{\nu},\ d-\frac{d-c}{\nu}\right],\ \ \rho\in[0,\ \infty)\right).$$

С другой стороны (см. 2.2))

$$\left|\int_c^d\varphi_r(t)\ \frac{\sin\rho(x-t)}{x-t}\,dt\right|=\left|\sum_{s=1}^{r}\int_{a_s}^{c_s}\frac{\sin\rho(t-x)}{t-x}\,dt\right|<L$$

* ρ не обязано быть целым.

$$\left(x \in \left[c+\frac{d-c}{\nu},\ d-\frac{d-c}{\nu}\right],\ \rho \in [0, \infty)\right).$$

Из последних двух неравенств следует (2.6) при $C = L+1$.

Лемма 2. *Пусть A и M—некоторые положительные числа. Тогда для любой измеримой и почти везде конечной на $[0, A]$ функции $f(x)$, равной нулю вне некоторого множества $E \subset [0, A]$, для произвольных положительных η, σ, B, α и натурального $\nu > 8$ существуют отрезок $[q, s]$, функция $g(x)$ и измеримые множества R и G, которые удовлетворяют условиям:*

a′) $s > q > \sigma$, *$g(x)$ непрерывна на отрезке $[q, s]$ и*

$$g(q) = g(s) = 0,\ |g(x)| < \frac{8A}{\nu} \quad (x \in [q, s]);$$

b′) $R \subset E,\ \mu R > \left(1-\frac{8}{\nu}\right)\mu E;$

c′) $G \subset [0, A] - E,\ \mu G > A - \left(1+\frac{8}{\nu}\right)\mu E;$

d′) $\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_q^s g(t) \cos xt\, dt - f(x)\right| < \eta \quad (x \in R);$

e′) $\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_q^\rho g(t) \cos xt\, dt\right| < \frac{8A}{\nu} \quad (x \in G,\ \rho \in [q, s]);$

f′) $B + \overset{\rho}{\underset{q}{\mathrm{V}}}\, g \leqslant \alpha\rho \quad (\rho \in [q, s]).$

Кроме этого, при наличии дополнительного условия

$$|f(x)| < M \tag{2.7}$$

имеет место также неравенство

g′) $\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_q^\rho g(t) \cos xt dt\right| < 5\, CM\nu \quad (x \in R,\ \rho \in [q, s]),$

где $C > 1$— абсолютная константа, фигурирующая в формулировке замечания 1.

Доказательство. Легко видеть, что в силу C-свойства Лузина, множество E можно предположить замкнутым, а функцию $f(x)$—непрерывной на E. Так как для любого $\lambda > 0$ можно определить конечное число непересекающихся замкнутых интервалов: $[c_1, d_1]$, $[c_2, d_2], \cdots, [c_p, d_p]$, лежащих внутри $[0, A]$, и числа $l_1, l_2, \cdots, l_p$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\mu\left\{\bigcup_{i=1}^{p}[c_i, d_i]-E\right\}<\lambda, \ \mu\left\{E-\bigcup_{i=1}^{p}[c_i, d_i]\right\}<\lambda,$$

$$|f(x)-l_i|<\lambda \quad (x\in E\cap[c_i, d_i], i=1, 2,\cdots, p),$$

а при наличии (2.7) также $|l_i|<M$ $(i=1, 2,\cdots, p)$, то, не нарушая общности, можно считать

$$E=\bigcup_{i=1}^{p}[c_i, d_i], \tag{2.8}$$

$$f(x)=\begin{cases} l_i, & x\in[c_i, d_i] \ (i=1, 2,\cdots, p) \\ 0, & x\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{p}[c_i, d_i]. \end{cases} \tag{2.9}$$

Обозначая

$$M_1=\max_{1\leqslant i\leqslant p} l_i, \tag{2.10}$$

при дополнительном условии (2.7) будем иметь

$$M_1\leqslant M. \tag{2.11}$$

Для удобства будем считать, что

$$\eta<CM_1\nu \tag{2.12}$$

и

$$\eta<\frac{3\mu E}{\nu}. \tag{2.13}$$

Выберем натуральное число m настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{\pi}\frac{3M_1p\nu}{m}<\frac{4}{3\nu}\mu E, \tag{2.14}$$

$$4M_1A\mu E<m\alpha, \tag{2.15}$$

$$\frac{M_1}{m}<\frac{4}{\nu}. \tag{2.16}$$

Пусть α_i, β_i $(i=1, 2,\cdots, n)$ удовлетворяют условиям

$$\alpha_i<\beta_i\leqslant\alpha_{i+1} \ (i=1, 2,\cdots, n-1), \tag{2.17}$$

$$\beta_i-\alpha_i<\frac{\mu E}{m}, \tag{2.18}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i, \beta_i]=E. \tag{2.19}$$

Очевидно для каждого i $(1\leqslant i\leqslant n)$ существует единственное k $(1\leqslant \leqslant k\leqslant p)$ такое, что

$$[\alpha_i, \beta_i]\subset[c_k, d_k].$$

Положим

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[\alpha_i, \beta_i] \\ 0, & x\overline{\in}[\alpha_i, \beta_i] \end{cases} \quad (i=1, 2,\cdots, n). \tag{2.20}$$

Тогда ясно, что $f_i(x)$ постоянна на $[\alpha_i, \beta_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x). \tag{2.21}$$

Пусть i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — любое целое число, а σ_i — произвольное положительное число. Возьмем $h > 0$ так, чтобы

$$2h \frac{8\mu E}{\nu} < \frac{\eta}{3n} \tag{2.22}$$

и выберем $\sigma_i^{(1)}$ настолько большим, чтобы

$$2i \frac{8\mu E}{\nu} < \frac{\sigma_i^{(1)} - h}{2} \alpha - B, \tag{2.23}$$

$$\sigma_i^{(1)} > \sigma_i + h. \tag{2.24}$$

Пусть теперь

$$r_0 = 1, \; r_k = r_{k-1} \nu \quad (k \geqslant 1). \tag{2.25}$$

Для каждого $k = 0, 1, 2, \cdots$ положим в замечании 1 $[c, d] = [\alpha_i, \beta_i]$, $r = r_k$ и возьмем ν, удовлетворяющее условию настоящей леммы. Тем самым мы можем определить последовательности функций $\{\varphi_{r_k}(x)\}$ $(k = 0, 1, \cdots)$ и множеств $\{E_{r_k}\}$ $(k = 0, 1, \cdots)$ так, чтобы выполнялись условия, получающиеся из (2.5) и (2.6) заменой c, d, r соответственно на α_i, β_i, r_k $(k = 0, 1, \cdots)$. Рассмотрим функции

$$\psi_k(x) = l\,(1 - \nu\, \varphi_{r_k}(x)) \quad (k = 0, 1, \cdots), \tag{2.26}$$

где

$$l = f_i(x), \; x \in [\alpha_i, \beta_i] \tag{2.27}$$

(вспомним, что $f_i(x)$ постоянна на $[\alpha_i, \beta_i]$).

Нетрудно убедиться, что если $0 \leqslant k_1 < k_2$, то интеграл от ψ_{k_2} по каждому интервалу постоянства функции ψ_{k_1} равен нулю (надо учесть (2.25), (2.26) и конструкцию функций $\varphi_{r_k}(x)$ $(k = 0, 1, \cdots)$). Отсюда следует, что функции ψ_k $(k = 0, 1, \cdots)$ образуют ортогональную систему в $L_2[\alpha_i, \beta_i]$. А так как в силу (2.26) и (2.4) L_2-нормы функций ψ_k $(k = 0, 1, \cdots)$ ограничены в совокупности, то можно взять k_0 настолько большим, чтобы

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \psi_{k_0}(t) \cos x_j t \, dt \right| < \frac{\eta}{6n\sigma_i^{(1)}} \quad (j = 1, 2, \cdots, v), \tag{2.28}$$

где x_j $(j = 1, 2, \cdots, v)$ — некоторые числа, образующие $\frac{\eta}{6n\sigma_i^{(1)}} \cdot \frac{1}{2M_1 A^2}$ — сеть отрезка $[0, \sigma_i^{(1)}]$, т. е. для любого $x \in [0, \sigma_i^{(1)}]$ существует j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant v$ такое, что

$$|x - x_{j_0}| < \frac{\eta}{6n\sigma_l^{(1)}} \frac{1}{2M_1 A^2}. \tag{2.29}$$

Обозначим

$$\theta_l(x) \equiv \begin{cases} \psi_{k_0}(x), & x \in [\alpha_l, \beta_l] \\ 0, & x \overline{\in} [\alpha_l, \beta_l], \end{cases} \tag{2.30}$$

$$E^l \equiv E_{r_{k_0}}, \tag{2.31}$$

$$G_l(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^A \theta_l(t) \cos xt\, dt \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha_l}^{\beta_l} \theta_l(t) \cos xt dt. \tag{2.32}$$

Поскольку $\psi_{r_{k_0}}$ и $E_{r_{k_0}}$ определены аналогично (2.3) и (2.4), то, учитывая замечание 1, (2.26) и (2.27), будем иметь

$$\theta_l(x) = f_l(x) \quad (x \in E^l \cup \{[0, A] - [\alpha_l, \beta_l]\}), \tag{2.33}$$

$$E^l \subset [\alpha_l, \beta_l],\ \mu E^l = \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)(\beta_l - \alpha_l), \tag{2.34}$$

$$\int_0^A |\theta_l(x)|\, dx = \int_{\alpha_l}^{\beta_l} |\psi_{k_0}(x)|\, dx = \int_{E_l} |l|\, dx +$$

$$+ \int_{[\alpha_l, \beta_l] - E_l} |l|\, (\nu - 1)\, dx = |l|\, \mu E^l + |l|\, (\nu - 1)\, \mu\{[\alpha_l, \beta_l] - E^l\} =$$

$$= |l| \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)(\beta_l - \alpha_l) + |l|\, (\nu - 1)\, \frac{1}{\nu}\, (\beta_l - \alpha_l) =$$

$$= 2\,|l|\, \frac{\nu - 1}{\nu}\, (\beta_l - \alpha_l) < 2M_1\, (\beta_l - \alpha_l), \tag{2.35}$$

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\rho G_l(u) \cos xu\, du \right| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\rho \int_{\alpha_l}^{\beta_l} \theta_l(t)\ \cos ut\ \cos ux\, dt\, du \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \int_{\alpha_l}^{\beta_l} \theta_l(t)\, dt \int_0^\rho \cos ut \cos ux\, du \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \int_{\alpha_l}^{\beta_l} \theta_l(t)\, dt \int_0^\rho [\cos u\,(x - t) + \cos u\,(x + t)]\, du \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \int_{\alpha_l}^{\beta_l} \theta_l(t) \left[\frac{\sin \rho\,(x - t)}{x - t} + \frac{\sin \rho\,(x + t)}{x + t} \right] dt \right| =$$

$$= \frac{|l|}{\pi}\left|\int_{\alpha_l}^{\beta_l}(1-\nu\varphi_{r_{k_0}}(t))\left[\frac{\sin\rho(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\right]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|l|}{\pi}\left|\int_{\alpha_l}^{\beta_l}\left[\frac{\sin\rho(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\right]dt\right| +$$

$$+\frac{|l|\nu}{\pi}\left|\int_{\alpha_l}^{\beta_l}\varphi_{r_{k_0}}(t)\left[\frac{\sin\rho(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\right]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 4|l| + C|l|\nu \leqslant 2CM_1\nu$$

$$\left(x\in\left[\alpha_l+\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu},\quad \beta_l-\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu}\right],\ \rho>0\right)^*, \tag{2.36}$$

так как $C>1$, $\nu>8$ и $|l|<M_1$.

Для произвольного $x\in[0,\sigma_l^{(1)}]$ выберем j_0 $(1\leqslant j_0\leqslant v)$ так, чтобы выполнялось (2.29), тогда в силу (2.28), (2.30) и (2.35)

$$|G_l(x)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\int_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\cos xt\,dt\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\int_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\cos d_{j_0}t\,dt\right| +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\int_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\left[\cos x_{j_0}t-\cos xt\right]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{6n\sigma_l^{(1)}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\int_{\alpha_l}^{\beta_l}2\theta_l(t)\sin\frac{x_{j_0}-x}{2}t\sin\frac{x_{j_0}+x}{2}t\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{6n\sigma_l^{(1)}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,|x_{j_0}-x|\int_{\alpha_l}^{\beta_l}|\theta_l(t)|\,t\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{6n\sigma_l^{(1)}}+|x_{j_0}-x|\,A\cdot 2M_1(\beta_l-\alpha_l) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{6n\sigma_l^{(1)}}+2|x_{j_0}-x|\,A^2M_1 < \frac{\eta}{3n\sigma_l^{(1)}}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$|G_l(x)| < \frac{\eta}{3n\sigma_l^{(1)}}\quad (x\in[0,\sigma_l^{(1)}]), \tag{2.37}$$

---

* Первый из последних двух интегралов оценивается с помощью неравенства $\left|\int_a^b\frac{\sin\rho(x\pm t)}{x\pm t}dt\right| < 2\pi$, справедливого для любых a, b, ρ и x.

из которого непосредственно следует

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sigma_l^{(1)}} |G_l(t)\cos xt|\,dt \leqslant \frac{\eta}{3n} \quad (x\in[0,\ \infty)). \tag{2.38}$$

Так как $\theta_l(x)\in L_2[0,\ \infty)$, то в силу теоремы Планшереля (см. [5], теорему 50)

$$\theta_l(x)=\underset{\lambda\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\lambda} G_l(t)\cos xt\,dt \quad (x\in[0,\ \infty)).$$

Следовательно, существуют $\sigma_l^{(2)}$, $\sigma_l^{(2)}>\sigma_l^{(1)}$ и измеримое множество R_l такие, что

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sigma_l^{(2)}} G_l(t)\cos xt\,dt-\theta_l(x)\right|<\frac{\eta}{6n} \quad (x\in R_l), \tag{2.39}$$

$$R_l\subset[0,\ A],\ \mu R_l>A-\frac{\eta}{6n}. \tag{2.40}$$

Положим

$$\tau=\frac{4}{3\nu\rho}\mu E, \tag{2.41}$$

$$G_1=[0,\ A]-\bigcup_{k=1}^{\rho}[c_k-\tau,\ d_k+\tau], \tag{2.42}$$

$$F_l=[0,\ A]-\left[\alpha_l-\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu},\quad \beta_l+\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu}\right], \tag{2.43}$$

тогда будем иметь

$$x+t\geqslant|x-t|>\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu} \quad (x\in F_l,\ t\in[\alpha_l,\ \beta_l]), \tag{2.44}$$

$$x+t\geqslant|x-t|>\tau \quad (x\in G_1\ t\in E), \tag{2.45}$$

$$F_l\subset[0,\ A]-[\alpha_l,\ \beta_l], \tag{2.46}$$

$$\mu F_l\geqslant\mu\{[0,\ A]-[\alpha_l,\ \beta_l]\}-2\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu}. \tag{2.47}$$

Учитывая (2.32), (2.45), (2.35), (2.18), (2.41) и (2.14), получим

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\rho} G_l(u)\cos xu\,du\right|=\frac{2}{\pi}\left|\int\limits_0^{\rho}\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\cos ut\cos xu\,dt\,du\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\left[\frac{\sin\rho(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\right]dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\,\frac{2}{\tau}\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l} |\theta_l(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\pi}\,\frac{4M_1(\beta_l-\alpha_l)}{\tau} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\,\frac{4M_1\mu E}{m}\cdot\frac{3\nu p}{4\mu E} = \frac{1}{\pi}\,\frac{3M_1 p\nu}{m} < 4\,\frac{\mu E}{3\nu}\ (x\in G_1,\ \rho\in[0,\infty)). \quad (2.48)$$

Аналогично при $x\in F_l$ (см. (2.44)) и любом $\rho>0$ будем иметь

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\rho} G_l(u)\cos xu\,du\right| \leqslant \frac{4}{\pi}M_1\nu < 2M_1\nu \quad (2.49)$$

$$(x\in F_l,\ \rho\in[0,\infty)).$$

Отметим также, что в силу (2.35), (2.18) и (2.16) справедливо неравенство

$$|G_l(x)| = \left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\cos xt\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}|\theta_l(t)|\,dt \leqslant 2M_1(\beta_l-\alpha_l) < 2M_1\frac{\mu E}{m} < \frac{8}{\nu}\mu E \quad (x\in[0,\infty)). \quad (2.50)$$

Пусть теперь (см. (2.22))

$$q_l \equiv \sigma_l^{(1)} - h, \quad s_l \equiv \sigma_l^{(2)} + h \quad (2.51)$$

$$g_l(x) = \begin{cases} G_l(x), & x\in[\sigma_l^{(1)}, \sigma_l^{(2)}] \\ G_l(\sigma_l^{(1)})\,\dfrac{x-q_l}{h}, & x\in[q_l, \sigma_l^{(1)}] \\ -G_l(\sigma_l^{(2)})\,\dfrac{x-s_l}{h}, & x\in[\sigma_l^{(2)}, s_l] \\ 0, & x\overline{\in}[q_l, s_l],\ x>0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Тогда, учитывая (2.22) и (2.50), получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\limits_{q_l}^{\sigma_l^{(1)}} + \int\limits_{\sigma_l^{(2)}}^{s_l}\right)|g_l(t)\cos xt|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot 2h\,\frac{8\mu E}{\nu} < \frac{\eta}{3n}\ (x\in[0,\infty)). \quad (2.53)$$

Если $\rho\in[\sigma_l^{(1)}, \sigma_l^{(2)}]$, а $x_0, x_1, \cdots, x_v$ — произвольные числа, причем

$$\sigma_l^{(1)} = x_0 < x_1 < \cdots < x_v = \rho, \quad (2.54)$$

то

$$\sum_{k=1}^{v} \left|g_l(x_k) - g_l(x_{k-1})\right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{v} \left|\int_{\alpha_l}^{\beta_l} \theta_l(t) \left[\cos x_k t - \cos x_{k-1} t\right] dt\right| =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{v} \left|\int_{\alpha_l}^{\beta_l} \theta_l(t) \sin \frac{x_k + x_{k-1}}{2} t \cdot \sin \frac{x_k - x_{k-1}}{2} t\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_{\alpha_l}^{\beta_l} t\, |\theta_l(t)|\, dt\right) \sum_{k=1}^{v} (x_k - x_{k-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, A\, (\rho - \sigma_l^{(1)}) \int_{\alpha_l}^{\beta_l} |\theta_l(t)|\, dt.$$

Отсюда с помощью неравенств (2.35), (2.18) и (2.15) легко получим

$$\bigvee_{\sigma_l^{(1)}}^{\rho} g_l \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, A\, (\rho - \sigma_l^{(1)}) \cdot 2M_1\, (\beta_l - \alpha_l) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, A\, (\rho - \sigma_l^{(1)})\, 2\, M \frac{\mu E}{m} \leqslant \frac{\alpha}{2}\, (\rho - \sigma_l^{(1)}). \tag{2.55}$$

С другой стороны, используя (2.52) и (2.50), будем иметь

$$\bigvee_{q_l}^{\sigma_l^{(1)}} g_l \leqslant |\, G_l(\sigma_l^{(1)})| \leqslant \frac{8}{\nu}\, \mu E, \tag{2.56}$$

$$\bigvee_{\sigma_l^{(3)}}^{s_l} g_l \leqslant \frac{8}{\nu} \mu E. \tag{2.57}$$

Предположим, что все вышеуказанные рассуждения и построения сделаны для всех целых i, где $1 \leqslant i \leqslant n$. При этом, ввиду произвольности чисел $\sigma_l\, (1 \leqslant i \leqslant n)$, можно было их последовательно определить следующим образом:

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_l = s_{l-1} \quad (2 \leqslant i \leqslant n). \tag{2.58}$$

Введем обозначения:

$$q \equiv q_1, \quad s \equiv s_n. \tag{2.59}$$

$$R \equiv \left(\bigcup_{l=1}^{n} E^l\right) \cap \bigcap_{l=1}^{n} \left\{R_l \cap \left(\left[\alpha_l + \frac{\beta_l - \alpha_l}{\nu},\ \ \beta_l - \frac{\beta_l - \alpha_l}{\nu}\right] \cup F_l\right)\right\}, \tag{2.60}$$

$$G \equiv G_1 \cap \bigcap_{l=1}^{n} R_l, \tag{2.61}$$

$$g(x) \equiv \begin{cases} g_l(x), \ x \in [q_l,\ s_l] \ \ (i = 1, 2, \cdots, n) \\ 0 - \text{в остальных точках } x \in [0, \infty). \end{cases} \tag{2.62}$$

Последнее определение допустимо в силу очевидных неравенств $s_{i-1} < q_i \, (2 \leqslant i \leqslant n)$, являющихся следствием (2.58), (2.24) и первого равенства (2.51).

Покажем теперь, что функция (2.62) и множества (2.60) и (2.61) удовлетворяют требованиям леммы 2. Действительно, условие a′) непосредственно следует из соотношений (2.62), (2.51), (2.52), (2.32), (2.50) и (2.59); b′) получается из (2.60), (2.46), (2.47), (2.40), (2.13) и (2.34), а c′)—из (2.41), (2.42), (2.40), (2.13) и (2.61).

Пусть теперь $x \in R$. Согласно (2.62) и (2.20) имеем

$$J \equiv \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^s g(t) \cos xt \, dt - f(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{q_i}^{s_i} g_i(t) \cos xt dt - f_i(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{q_i}^{\sigma_i^{(1)}} + \int_{\sigma_i^{(2)}}^{s_i} \right) |g_i(t) \cos xt| \, dt +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{\sigma_i^{(1)}}^{\sigma_i^{(2)}} g_i(t) \cos xt dt - f_i(x) \right| \cdot$$

Первая сумма последнего выражения не превосходит $\frac{\eta}{3}$ (см. (2.53)). Учитывая, что из $x \in R$ следует $x \in R_i$ и $x \in E^i \cup ([0, A] - [\alpha_i, \beta_i])$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ (см. (2.60) и (2.34)), преобразуем вторую сумму согласно (2.52), (2.33) и оценим ее с помощью (2.38) и (2.39). Тогда

$$J \leqslant \frac{\eta}{3} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{\sigma_i^{(1)}}^{\sigma_i^{(2)}} G_i(t) \cos xt dt - \theta_i(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{3} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_0^{\sigma_i^{(1)}} G_i(t) \cos xt \, dt \right| +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_0^{\sigma_i^{(2)}} G_i(t) \cos xt dt - \theta_i(x) \right| <$$

$$< \frac{\eta}{3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta}{3n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta}{6n} < \eta.$$

Таким образом, условие d′) выполнено. Обратившись к e′), заметим, что если $\rho\in[q, s]$, то, как легко видеть из (2.62), существуют i' $(1\leqslant i'\leqslant n)$ и $\rho'\in[q_{i'}, s_{i'}]$ такие, что

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_q^\rho g(t)\cos xt\,dt\right|=\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_q^{\rho'} g(t)\cos xt\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{i'-1}\left|\int\limits_{q_i}^{s_i} g_i(t)\cos xt\,dt\right|+\left|\int\limits_{q_{i'}}^{\rho'} g_{i'}(t)\cos xt\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{i'}\left(\int\limits_{q_i}^{\sigma_i^{(1)}}+\int\limits_{\sigma_i^{(2)}}^{s_i}\right)|g_i(t)\cos xt|\,dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{i'}\left|\int\limits_0^{\sigma_i^{(1)}} G_i(t)\cos xt\,dt\right|+$$

$$+\sum_{i=1}^{i'-1}\left|\int\limits_0^{\sigma_i^{(2)}} G_i(t)\cos xt\,dt\right|+\left|\int\limits_0^{\rho'} G_{i'}(t)\cos xt\,dt\right|^{*}. \qquad (2.63)$$

Пусть $x\in G$. Применяя к (2.63) неравенства (2.53), (2.38), (2.48), (2.39) (в силу (2.30) $\theta_i(x)=0$ при $x\in G$) и учитывая (2.13), получим

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_q^\rho g(t)\cos xt\,dt\right|\leqslant\sum_{i=1}^{i'}\frac{\eta}{3n}+\sum_{i=1}^{i'}\frac{\eta}{3n}+$$

$$+\sum_{i=1}^{i'-1}\frac{\eta}{6n}+4\frac{\mu E}{3\nu}\leqslant\frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{6}+4\frac{\mu E}{3\nu}=$$

$$=\frac{5\eta}{6}+4\frac{\mu E}{3\nu}<\frac{8\mu E}{\nu}\leqslant\frac{8A}{\nu}.$$

Это значит, что условие e′) выполняется.

Пусть теперь $\rho\in[q, s]$. Тогда существуют ρ' и i' $(1\leqslant i'\leqslant n)$ такие, что

$$\rho'\leqslant\rho,\ \rho'\in[q_{i'}, s_{i'}] \qquad (2.64)$$

и

$$\bigvee_q^\rho g(t)=\bigvee_q^{\rho'} g=\sum_{i=1}^{i'-1}\bigvee_{q_i}^{s_i} g_i+\bigvee_{q_{i'}}^{\rho'} g_{i'}\leqslant$$

---

* Суммы вида $\sum\limits_{i=1}^{i'-1}$ при $i'=1$ считаем равными нулю.

$$\leqslant \sum_{l=1}^{i'} \bigvee_{q_l}^{\sigma_l^{(1)}} g_l + \sum_{l=1}^{i'} \bigvee_{\sigma_l^{(2)}}^{s_l} g_l + \sum_{l=1}^{i'-1} \bigvee_{\sigma_l^{(1)}}^{\sigma_l^{(2)}} g_l + \bigvee_{\sigma_{i'}^{(1)}}^{\rho'} g_{i'}\ ^*.$$

Имея в виду (2.64), неравенства (2.55)—(2.57), (2.23) и первое равенство (2.51), получим

$$\bigvee_{q}^{\rho} g \leqslant 2\sum_{l=1}^{i'} \frac{8}{\nu}\mu E + \frac{\alpha}{2}\sum_{l=1}^{i'-1} (\sigma_l^{(2)} - \sigma_l^{(1)}) +$$

$$+ \frac{\alpha}{2}(\rho' - q_{i'}) < 2i' \frac{8}{\nu}\mu E + \frac{\alpha}{2}\sum_{l=1}^{i'-1} (q_{l+1} - q_l) +$$

$$+ \frac{\alpha}{2}(\rho - q_{i'}) < \frac{\sigma_{i'}^{(1)} - h}{2}\alpha - B + \frac{\alpha}{2}(\rho - q_1) =$$

$$= \frac{\alpha}{2} q_{i'} - B + \frac{\alpha}{2}(\rho - q) \leqslant \alpha\rho - B.$$

Итак, условие $f')$ также выполняется.

Остается проверить последнее утверждение леммы 2. Сопоставляя неравенства (2.36) и (2.49), будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} \left|\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{\rho} G_l\ (u) \cos xudu\right| < 2CM_1\nu \\ \left(x \in \left[\alpha_l + \dfrac{\beta_l - \alpha_l}{\nu},\ \beta_l - \dfrac{\beta_l - \alpha_l}{\nu}\right] \cup F_l,\ \rho > 0\right) \end{array}\right\}. \qquad (2.65)$$

Пусть $\rho \in [q, s]$, тогда существуют i' $(1 \leqslant i' \leqslant n)$ и $\rho' \in [q_{i'}, s_{i'}]$, для которых может выполняться (2.63). Если теперь $x \in R$, то для некоторого i_0 $(1 \leqslant i_0 \leqslant n)$ будет $x \in E^{i_0}$. Но тогда $\theta_l(x) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq i_0)$ (см. (2.30) и (2.34)), так что из (2.63) получим

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{\rho} g\ (t) \cos xtdt\right| \leqslant \sum_{l=1}^{i'} \left(\int_{q_l}^{\sigma_l^{(1)}} + \int_{\sigma_l^{(2)}}^{s_l} \right) |g_l\ (t) \cos xt|\ dt +$$

$$+ \sum_{l=1}^{i'} \left| \int_0^{\sigma_l^{(1)}} G_l\ (t) \cos xtdt \right| + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i_0}}^{i'-1} \left| \int_0^{\sigma_l^{(2)}} G_l\ (t) \cos xtdt - \theta_l\ (x) \right| +$$

$$+ \left| \int_0^{\sigma_{i_0}^{(2)}} G_{i_0}\ (t) \cos xtdt \right| + \left| \int_0^{\rho'} G_{i'}\ (t) \cos xtdt \right|.$$

---

* $\sum_{l=1}^{i'-1}$ при $i' = 1$, и $\bigvee_{\sigma_{i'}^{(1)}}^{\rho'}$ при $\rho' < \sigma_{i'}^{(1)}$ считаются равными нулю.

Применяя к слагаемым правой части этого неравенства соответственно (2.53), (2.38), (2.39), (2.65), (2.65) и учитывая (2.12), имеем

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_q^{\rho} g(t)\cos xt dt\right| \leqslant \frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{6}+$$

$$+2CM_1\nu+2CM_1\nu<5CM_1\nu \quad (x\in R). \tag{2.66}$$

Но при выполнении (2.7) имеет место (2.11), так что в этом случае из (2.66) вытекает g'). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любых положительных чисел A и $\varepsilon<1$ можно определить $\delta>0$ такое, что какова бы ни была измеримая функция $f(x)$,*

$$f(x)=0 \quad при \quad x\overline{\in} E,\ E\subset[0,\ A], \tag{2.67}$$

и

$$|f(x)|\leqslant\delta,\ x\in E, \tag{2.68}$$

и каковы бы ни были $\alpha>0$, $\sigma>0$, $\eta>0$ и $B>0$, существуют измеримое множество R и функция $g(x)$, для которых выполняются следующие условия:

a) $g(x)$ — *непрерывная функция, определенная на $[q,\ s]$, где $s>q>\sigma$, причем*

$$g(q)=g(s)=0,\ |g(x)|<\varepsilon\ (x\in[q,\ s]),$$

b) $R\subset E$, $\mu R>\mu E-\varepsilon$,

c) $\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_q^s g(t)\cos xt dt-f(x)\right|<\eta \quad (x\in R)$,

d) $\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_q^{\rho} g(t)\cos xt dt\right|<\varepsilon \ (x\in R,\ q\leqslant\rho\leqslant s)$,

e) $B+\bigvee_q^{\rho} g\leqslant\alpha\rho \quad (q\leqslant\rho\leqslant s)$.

Доказательство. Возьмем натуральное число $\nu>8$ настолько большим, чтобы

$$\frac{8A}{\nu}<\varepsilon \tag{2.69}$$

и выберем $\delta>0$ настолько малым, чтобы

$$5C\delta\nu<\varepsilon, \tag{2.70}$$

где C — абсолютная постоянная, фигурирующая в формулировке леммы 2. Покажем, что выбранное так число δ удовлетворяет требованию леммы 3. Действительно, пусть $f(x)$—измеримая функция, а E—измеримое множество такие, что

$$f(x)=0 \text{ при } x\overline{\in}E,\quad E\subset[0,\ A],$$

$$|f(x)| \leqslant \delta \quad (x \in E),$$

и пусть α, σ, η и B — произвольные положительные числа. Применим лемму 2 к функции $f(x)$, полагая в формулировке леммы $M \equiv \delta$. Тогда мы можем найти функцию $g(x)$ и множество R, которые удовлетворяют условиям a'), b'), d'), f') и условию g') при $M = \delta$. Отсюда, в силу (2.69) и (2.70), получим утверждения a)—e) леммы 3. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $A > 1$ — некоторое число, а $f(x)$ — почти везде конечная на $[0, A]$ измеримая функция, равная нулю вне некоторого множества $E \subset [0, A]$. Тогда для любых положительных чисел α, σ, B и $\delta < 1$ существуют функция $g(x)$ и измеримые множества P и Q, удовлетворяющие условиям:*

1) *$g(x)$ — непрерывная функция, определенная на $[q, s]$, где $s > q > \sigma$, причем*

$$g(q) = g(s) = 0, \quad |g(x)| < \delta \quad (x \in [q, s]),$$

2) $P \subset E$, $\mu P > \mu E - \delta$,

3) $\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_q^s g(t) \cos xt dt - f(x) \right| < \delta \quad (x \in P)$,

4) $Q \subset [0, A] - E$, $\mu Q > \mu \{[0, A] - E\} - \delta$,

5) $\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_q^\rho g(t) \cos xt dt \right| < \delta \quad (x \in Q, \ \rho \in [q, s])$,

6) $B + \bigvee\limits_q^\rho g \leqslant \alpha\rho \quad (\rho \in [q, s])$.

Эта лемма получается из леммы 2 при $\eta \equiv \delta$ и некотором ν, $\nu > 8A\delta^{-1}$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Возьмем две последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_i\}$ и $\{A_i\}$, где

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_i > \cdots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < +\infty, \tag{3.1}$$

$$1 < A_1 < A_2 < \cdots < A_i < \cdots, \quad A_i \to \infty. \tag{3.2}$$

Для каждой пары $\varepsilon = \varepsilon_i$ и $A = A_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ определим число $\delta = \delta_i$ согласно лемме 3, т. е. так, чтобы при наличии условий вида (2.67), (2.68), для произвольных σ, η, B и α выполнялись все утверждения a)—e) леммы 3, в которых вместо ε, A и δ взяты, соответственно, ε_i, A_i и δ_i. При этом из формулировки леммы 3 ясно, что можно считать $\delta_i < \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$. В силу (3.1) будем иметь

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l < +\infty. \tag{3.3}$$

Пусть $F(x)$—функция, фигурирующая в формулировке теоремы. Применим лемму 4, полагая в ее формулировке $A = A_1$, $f(x) = F(x)$ $(x \in [0, A_1])$, $E = [0, A_1]$, $\sigma = 0$, $B = 0$, $\alpha = 1$ и $\delta = \delta_2$. Тогда мы можем определить измеримое множество $P = P_1$ и непрерывную функцию $g(x) \equiv g_1(x)$ $(x \in [q, s_1])$, где $s_1 > q > 0$, для которых выполняются условия:

$$g_1(q) = g_1(s_1) = 0, \ |g_1(x)| < \delta_2 \ (x \in [q, s_1]), \tag{3.4}$$

$$P_1 \subset [0, A_1], \ \mu P_1 > A_1 - \delta_2, \tag{3.5}$$

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{s_1} g_1(t) \cos xt dt - F(x) \right| < \delta_2 \ (x \in P_1), \tag{3.6}$$

$$\bigvee_q^{\rho} g_1(x) \leqslant \rho \quad (\rho \in [q, s_1]). \tag{3.7}$$

Предположим, что для некоторого $l > 2$ определены измеримое множество P_{l-1} и непрерывная функция $g_{l-1}(x)$ $(x \in [q, s_{l-1}]$, где $s_{l-1} > q$—некоторое число), которые удовлетворяют условиям:

$$\bigvee_q^{\rho} g_{l-1} \leqslant \rho \quad (\rho \in [q, s_{l-1}]), \tag{3.8}$$

$$P_{l-1} \subset [0, A_{l-1}], \ \mu P_{l-1} > A_{l-1} - \delta_l, \tag{3.9}$$

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{s_{l-1}} g_{l-1}(t) \cos xt dt - F(x) \right| < \delta_l \ (x \in P_{l-1}), \tag{3.10}$$

$$g_{l-1}(q) = g_{l-1}(s_{l-1}) = 0. \tag{3.11}$$

Положим

$$f_{l-1}(x) = F(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{s_{l-1}} g_{l-1}(t) \cos xt dt \quad (x \in [0, \infty)), \tag{3.12}$$

$$B_{l-1} = \bigvee_q^{s_{l-1}} g_{l-1}(t).$$

В силу (3.10) и (3.11) имеем

$$|f_{l-1}(x)| < \delta_l \quad (x \in P_{l-1}). \tag{3.13}$$

Применим лемму 3 к функции $f(x) = f_{l-1}(x)$, полагая в формулировке леммы $A = A_{l-1}$, $\varepsilon = \varepsilon_l$, $\delta = \delta_l$, $E = P_{l-1}$, $\sigma = s_{l-1}$, $B = B_{l-1}$, $\eta = \frac{\delta_{l+1}}{2}$, $\alpha = 1$. Тогда мы можем определить измеримое множество R, отрезок $[q', s']$ $(s' > q' > s_{l-1})$ и непрерывную на $[q', s']$ функцию $g^*(x)$, для которых выполняются условия:

$$g^*(q') = g^*(s') = 0, \ |g^*(x)| < \varepsilon_l \ (x \in [q', s']), \tag{3.14}$$

$$R \subset P_{l-1}, \ \mu R > \mu P_{l-1} - \varepsilon_l, \tag{3.15}$$

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q'}^{s'} g^*(t) \cos xt dt - f_{l-1}(x) \right| < \frac{\delta_{l+1}}{2} \quad (x \in R), \tag{3.16}$$

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q'}^{\rho} g^*(t) \cos xt dt \right| < \varepsilon_l \quad (x \in R, \ \rho \in [q', s']), \tag{3.17}$$

$$B_{l-1} + \bigvee_{q'}^{\rho} g^*(t) \leqslant \rho \quad (\rho \in [q', s']). \tag{3.18}$$

Положим

$$B' = B_{l-1} + \bigvee_{q}^{s'} g^*(t) \equiv \bigvee_{q'}^{s_{l-1}} g_{l-1}(t) + \bigvee_{q'}^{s'} g^*(t) \tag{3.19}$$

и применим лемму 4 к функции

$$f(x) = f_{l-1}(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q'}^{s'} g^*(t) \cos xt dt, \tag{3.20}$$

полагая в формулировке леммы

$$A \equiv A_l, \ E \equiv [0, A_l] \setminus R, \ \sigma \equiv s', \ B \equiv B', \ \alpha \equiv 1, \ \delta = \frac{\delta_{l+1}}{2}.$$

Тогда можно определить измеримые множества P и Q, отрезок $[q_l, s_l]$ $(s_l > q_l > s')$ и непрерывную на $[q_l, s_l]$ функцию $g^{**}(x)$, для которых выполняются следующие условия:

$$g^{**}(q_l) = g^{**}(s_l) = 0, \ |g^{**}(x)| < \frac{\delta_{l+1}}{2} \quad (x \in [q_l, s_l]), \tag{3.21}$$

$$P \subset [0, A_l] \setminus R, \ \mu P > \mu \, |[0, A_l] \setminus R| - \frac{\delta_{l+1}}{2}, \tag{3.22}$$

$$Q \subset R, \ \mu Q > \mu R - \frac{\delta_{l+1}}{2}, \tag{3.23}$$

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q'}^{s'} g^*(t) \cos xt dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q_l}^{s_l} g^{**}(t) \cos xt dt - f_{l-1}(x) \right| < \frac{\delta_{l+1}}{2} \tag{3.24}$$

$$(x \in P)$$

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q_l}^{\rho} g^{**}(t) \cos xt dt \right| < \frac{\delta_{l+1}}{2} \quad (x \in Q, \ \rho \in [q_l, s_l]), \tag{3.25}$$

$$B' + \bigvee_{q_l}^{\rho} g^{**} \leqslant \rho \quad (\rho \in [q_l, s_l]). \tag{3.26}$$

Введем обозначения

$$P_i = P \cup Q \cap R = P \cup Q, \tag{3.27}$$

$$Q_i = Q \cap R = Q, \tag{3.28}$$

$$g_i(x) = \begin{cases} g_{i-1}(x), & x \in [q, s_{i-1}] \\ g^*(x), & x \in [q', s'] \\ g^{**}(x), & x \in [q_i, s_i] \\ 0 & \text{— в остальных точках } [q, s_i]. \end{cases} \tag{3.29}$$

В силу равенств (3.11), (3.14), (3.21) и непрерывности функций $g_{i-1}(x)$, $g^*(x)$, $g^{**}(x)$ функция $g_i(x)$ непрерывна на $[q, s_i]$. Из определения функции $g_i(x)$ (см. (3.29)) и из неравенств (3.14), (3.21) следует, что

$$|g_i(x)| < \varepsilon_i + \delta_{i+1} \quad (x \in [s_{i-1}, s_i]), \tag{3.30}$$

$$g_i(q) = g_i(s_i) = 0. \tag{3.31}$$

Используя соотношения (3.12), (3.16), (3.24) и (3.25), получим

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{s_i} g_i(t) \cos xt dt - F(x) \right| < \delta_{i+1} \quad (x \in P_i), \tag{3.32}$$

а из (3.17), (3.25), (3.28) и (3.29) имеем

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{s_{i-1}}^{\rho} g_i(t) \cos xt dt \right| < \varepsilon_i + \delta_{i+1} \tag{3.33}$$

$$(x \in Q_i, \ \rho \in [s_{i-1}, s_i]).$$

Учитывая (3.9), (3.15), (3.22) и (2.23), убедимся, что

$$P_i \subset [0, A_i], \ \mu P_i > A_i - \delta_{i+1}, \tag{3.34}$$

$$Q_i \subset [0, A_{i-1}], \ \mu Q_i > A_{i-1} - (\varepsilon_i + \delta_i + \delta_{i+1}). \tag{3.35}$$

Заметим также, что в силу (3.26), (3.18), (3.19) и (3.8) справедливо соотношение

$$\bigvee_q^{\rho} g_i(t) \leqslant \rho \quad (\rho \in [q, s_i]). \tag{3.36}$$

Имея в виду (3.36), (3.34), (3.32) и (3.31), заключаем, что к полученной функции $g_i(x)$ применимы те же рассуждения, которые были применены к $g_{i-1}(x)$, только в этих рассуждениях нужно заменить i на $i+1$.

С другой стороны, на первом шагу уже определена функция $g_1(x)$, удовлетворяющая условиям (3.4)—(3.7), которые аналогичны соотношениям (3.31), (3.34), (3.32), (3.36).

Таким образом, мы можем определить последовательности чисел $q = s_0 < s_1 < \cdots$, функций $\{g_i(x)\}$ $(x \in [q, s_i], \ i=1, 2, \cdots)$ и множеств $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$, для которых выполняются условия (3.31), (3.34), (3.32), (3.36) при $i \geqslant 1$, условия (3.30), (3.33), (3.35) при $i \geqslant 2$ и, кроме того

$$g_{i+1}(x) = g_i(x) \quad (x \in [q, s_i], \ i \geqslant 1). \tag{3.37}$$

Положим

$$g(x)=\begin{cases}0\quad, & x\in[0,\ q]\\ g_i(x), & x\in[q,\ s_i],\ i\geqslant 1,\end{cases}\tag{3.38}$$

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} Q_i.\tag{3.39}$$

Ясно, что равенство (3.38) определяет непрерывную функцию на $[0,\infty)$, которая согласно (3.36) и (3.30) удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0,\ \bigvee_0^{\infty} g\leqslant \rho.$$

Докажем, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\lambda} g(t)\cos xtdt=F(x)\quad (x\in E).\tag{3.40}$$

Пусть $x_0\in E$. Выберем i_0 так, чтобы

$$x_0\in Q_i\ \ (i\geqslant i_0)\tag{3.41}$$

и рассмотрим интегралы

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\lambda} g(t)\cos x_0 t\, dt\quad \text{при } \lambda>s_{i_0}.$$

Очевидно

$$\int_0^{\lambda} g(t)\cos x_0 tdt=\int_0^{s_i} g(t)\cos x_0 t\, dt+\int_{s_i}^{\lambda} g(t)\cos x_0\, tdt,\tag{3.42}$$

где $i\geqslant i_0$ и $s_i<\lambda\leqslant s_{i+1}$.

В силу (3.32), (3.38), (3.41) и того, что $Q_i\subset P_i$ (см. (3.27), (3.28)), получаем

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{s_i} g(t)\cos x_0\, tdt-F(x_0)\right|<\delta_{i+1}.\tag{3.43}$$

С другой стороны, согласно (3.33) и (3.41), где вместо i взято $i+1$, будем иметь

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{s_i}^{\lambda} g(t)\cos x_0\, t\, dt\right|<\varepsilon_{i+1}+\delta_{i+2}\quad (i\geqslant i_0).\tag{3.44}$$

Из (3.42), (3.43) и (3.44) находим

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\lambda} g(t)\cos x_0 tdt-F(x_0)\right|<\varepsilon_{i+1}+\delta_{i+1}+\delta_{i+2},\tag{3.45}$$

где $s_i<\lambda\leqslant s_{i+1}$, $i\geqslant i_0$.

Так как $i \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, то из (3.45), (3.1) и (3.3) и из того, что x_0 — произвольная точка множества E, следует справедливость (3.40). Учитывая это, заметим, что согласно (3.35), (3.39) и (3.2) имеет место равенство

$$\mu\{[0, \infty) - E\} = 0,$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Замечание 2. Пусть $\alpha_i \downarrow 0$ при $i \to +\infty$. Используя конструкцию построения универсального тригонометрического ряда относительно подрядов (см. [2]), можно построить непрерывную на $[0, \infty)$ функцию $\psi(t)$ и последовательность чисел $\{s_n\}$, где $0 = s_0 < s_1 < \cdots$ и $s_i \to \infty$, такие, что

1°. $\lim\limits_{t \to \infty} \psi(t) = 0, \quad \psi(s_n) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$

2°. $\overset{\rho}{\underset{0}{V}} \psi \leqslant \varphi(\rho) \quad (\rho \in [0, \infty)),$

где $\varphi(\rho) = \alpha_n \rho$ при $\rho \in [s_{n-1}, s_n]$ $n = 1, 2, \cdots$.

3°. Для произвольной измеримой функции $F(x)$, конечной почти всюду на $[0, \infty)$, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_1^\infty$ такая, что

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda g(t) \cos xt dt = F(x)$$

для почти всех $x \in [0, \infty)$, где

$$g(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [s_{n_i}, s_{n_i+1}] \ (i = 1, 2, \cdots) \\ 0 & \text{— в остальных точках } [0, \infty). \end{cases}$$

Замечание 2 означает, что в теореме 1 условие (1.4) можно заменить более сильным требованием

$$\overset{\rho}{\underset{0}{V}} g \leqslant \varphi(\rho) \quad (\rho \in [0, \infty)),$$

где $\varphi(\rho)$ — некоторая возрастающая функция, не зависящая от представляемой функции $F(x)$ и удовлетворяющая условию

$$\varphi(\rho) = o(\rho) \quad \text{при } \rho \to \infty.$$

С другой стороны, если $g(t)$ непрерывна на $[0, \infty)$ и удовлетворяет условиям: $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 0$, $\overset{\rho}{\underset{0}{V}} g \leqslant K$ (K — постоянная) и

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda g(t) \cos xt dt = F(x)$$

для почти всех $x \in [0, \infty)$, где $F(x)$ — почти всюду конечная измеримая функция, то

$$\left|\int_0^\lambda g(t)\cos xt\,dt\right| = \frac{1}{x}\left|\int_0^\lambda g(t)\,d\sin xt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{x}\; g(t)\sin xt\,\Big|_0^\lambda\right| + \frac{1}{x}\left|\int_0^\lambda \sin xt\,dg(t)\right| \leqslant \frac{K}{x} + \frac{K}{x} = \frac{2K}{x},$$

так что

$$|F(x)| \leqslant \frac{2K}{x} \text{ (почти всюду).}$$

Отсюда следует, что в теореме 1 условие (1.4) нельзя заменить условием $\bigvee_0^\rho g = O(\varphi(\rho))$, при $\rho \to \infty$ ни для какого $\varphi(\rho)$, удовлетворяющего условию $\varphi(\rho) = O(1)$, при $\rho \to \infty$.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и оказанную помощь при ее решении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 20.V.1971

Ռ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ. Չափելի ֆունկցիաները Ֆուրյեի ինտեգրալներով ներկայացնելու մասին (*ամփոփում*)

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ։ [0, ∞)-*ում որոշված ցանկացած համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի* $F(x)$ *ֆունկցիայի համար գոյություն ունի* [0, ∞)-*ում որոշված* $g(t)$ *անընդհատ ֆունկցիա այնպիսին, որ*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda g(t)\cos xt\,dt = F(x)$$

[0, ∞)-*ին պատկանող համարյա բոլոր x-երի համար, ընդ որում՝*

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \text{ և } \bigvee_0^\rho g \leqslant \rho \quad (\rho \in [0, \infty))։$$

R. S. DAVTIAN. *Representation of measurable functions by Fourie integrals* (summary)

The following theorem is proved:

Theorem. For an arbitrary almost every where finite measurable on [0, ∞) function $F(x)$ there exsts a function $g(t)$, continous on [0, ∞), such that

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda g(t)\cos xt\,dt = F(x)$$

for almost all $x \in [0, \infty)$, and

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \quad \text{and} \quad \bigvee_0^\rho g \leqslant \rho \quad (\rho \in [0, \infty)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Е. Меньшов.* Sur la representation des fonctions mesurables par des series t gonometriques, Матем. сб., 9 (51), 1941, 667—692.
2. *А. А. Талалян.* Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядо Изв. АН СССР, сер. матем., 27, 1963, 621—660.
3. *Д. Е. Меньшов.* Sur les series de Fourier des fonctions continues, Матем. сб., 8 (5(1940, 493—518.
4. *А. А. Талалян.* О представлении измеримых функций интегралами с ядрами ун тарных преобразований пространства L_2 (0, ∞), Матем. сб., 53 (95), № 3, 196 287—312.
5. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948, стр. 9