

В. П. ХАВИН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПРИВАЛОВА-ЗИГМУНДА О МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ*

§ 3. Начало доказательства теоремы 1

Будем считать, что $|f(\zeta)| \leq 1$ при всех $\zeta \in U \cup \Gamma$. Пусть t и τ — две точки единичной окружности Γ . Предположим, что $\tau = t e^{ih}$, где $h \in (0, \frac{1}{100})$, $\omega(\sqrt{h}) < \frac{1}{2}$. Нам предстоит оценить разность $|f(t) - f(\tau)|$. Для этого представим функцию f в виде

$$f = Bg, \quad (17)$$

где B — произведение Бляшке, построенное по нулям функции f :

$$B(z) = z^m \prod_k \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} \cdot \frac{\bar{z}_k}{|z_k|}$$

(см. (4)), а g принадлежит A (см. [3], гл. VI) и не имеет нулей в U . Применим к функции g лемму 3 с

$$\alpha = 2\omega(|f|, \beta(h), \sqrt{h}), \quad (18)$$

где $\beta(h)$ — число, выбор которого мы уточним позже. Пока предположим только, что $3\sqrt{h} < \beta(h) \leq 1$.

Условимся в дальнейшем вместо $\omega(|f|, \delta)$ писать просто $\omega(\delta)$. Ясно, что

$$f = \Phi_a I_a, \quad (19)$$

где $I_a = B \varphi_a$ (мы используем обозначения леммы 3; индекс a мы в дальнейшем будем опускать, имея в виду, что a определено равенством (18)). Из (19) следует, что

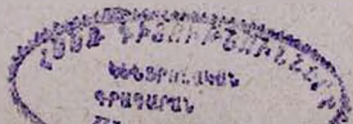
$$|f(t) - f(\tau)| \leq |\Phi(\tau) - \Phi(t)| + |\Phi(\tau)| |I(t) - I(\tau)|. \quad (20)$$

Начнем с оценки числа $|\Phi(\tau) - \Phi(t)|$. Условимся вместо $|\Phi|$ писать H . Имеем

$$\Phi(t) = H(t) \exp \int S_t \log H d\sigma,$$

$$\Phi(\tau) = H(\tau) \exp \int S_\tau \log H d\sigma,$$

* Продолжение, начало см. в №№ 2—3, 1971 г.



где интегралы следует понимать в смысле главного значения. Подынтегральные функции в последних выражениях чисто мнимые. Ясно, что

$$\begin{aligned} |\Phi(\tau) - \Phi(t)| &= H(t) \left| 1 - \frac{H(\tau)}{H(t)} \exp \left[\int (S_\tau - S_t) \log H d\sigma \right] \right| = \\ &= H(t) \left| 1 - \frac{H(t) - (H(t) - H(\tau))}{H(t)} \exp \left[\int (S_\tau - S_t) \log H d\sigma \right] \right| \leq \\ &\leq H(t) |1 - \exp \left[\int (S_\tau - S_t) \log H d\sigma \right]| + |H(t) - H(\tau)| \leq \\ &\leq H(t) \left| \int (S_\tau - S_t) \log H d\sigma \right| + |H(t) - H(\tau)| \leq \\ &\leq H(t) \left| \int (S_\tau - S_t) \log H d\sigma \right| + \omega(h). \end{aligned} \quad (21)$$

Мы воспользовались тем, что $\omega(H, \delta) \leq \omega_+(|f|, \delta) = \omega(\delta)$ при всех $\delta > 0$ (см. (8)).

Обозначим через Γ_t дугу окружности Γ длины $6h$ с центром в точке t :

$$\Gamma_t = \{te^{i\varphi} : |\varphi| < 3h\},$$

и пусть

$$\Delta_t = \Gamma \setminus \Gamma_t.$$

Следуя классическому доказательству теоремы И. И. Привалова, запишем тождество

$$\begin{aligned} \int (S_t - S_\tau) \log H d\sigma &= \int_{\Gamma_t} (\log H - \log H(t)) S_t d\sigma - \\ &- \int_{\Gamma_t} (\log H - \log H(\tau)) S_\tau d\sigma + \int_{\Delta_t} (S_t - S_\tau) (\log H - \log H(\tau)) d\sigma = \\ &= J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned} \quad (22)$$

(при доказательстве этого тождества следует учесть, что

$$\int_{\Delta_t} S_t d\sigma = \int_{\Gamma_t} S_t d\sigma = \int_{\Gamma} S_\tau d\sigma = 0).$$

Оценим интеграл J_1 . Имеем (см. (7)): $|H(\gamma)| > 2\omega(\beta(h)\sqrt{h}) > 2\omega(3h)$ при всех $\gamma \in \Gamma$. Поэтому для любой точки γ дуги Γ_t

$$\begin{aligned} H(\gamma) &> H(t) - |H(t) - H(\gamma)| = H(t) \left(1 - \frac{|H(t) - H(\gamma)|}{H(t)} \right) > \\ &\geq H(t) \left(1 - \frac{\omega(3h)}{2\omega(3h)} \right) > \frac{H(t)}{2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$|\log H(\gamma) - \log H(t)| \leq 2 \frac{|H(\gamma) - H(t)|}{H(t)} \leq 2 \frac{\omega(|\gamma|)}{H(t)},$$

если $\gamma = te^{i\varphi}$. Поэтому

$$|J_1| \leq \frac{2}{H(t)} \int_{\Gamma_t} \frac{|H(\gamma) - H(t)|}{|\gamma - t|} d\sigma(\gamma) \leq \frac{c_1}{H(t)} \int_0^{3h} \frac{\omega(u)}{u} du \leq \frac{c}{H(t)} \int_0^h \frac{\omega(u)}{u} du, \quad (24')$$

где c_1, c — абсолютные постоянные.

Точно так же можно проверить, что

$$|J_2| \leq \frac{c}{H(t)} \int_0^h \frac{\omega(u)}{u} du. \quad (24'')$$

Возвращаясь к (21), получаем

$$|\Phi(t) - \Phi(\tau)| \leq c \int_0^h \frac{\omega(u)}{u} du + \\ + \omega(h) + H(t) |J_3|, \quad (25)$$

где c — абсолютная постоянная.

§ 4. Оценка интеграла J_3

Именно на этом этапе доказательства мы в первый раз получим члены с $\omega(\beta(h)\sqrt{h})$.

Отметим, что

$$S_z(\gamma) - S_z(\tau) = (t - \tau) \frac{2\gamma}{(\gamma - t)(\gamma - \tau)} \quad (\gamma \in \Gamma, \gamma \neq t, \gamma \neq \tau). \quad (26)$$

Поэтому

$$|J_3| \leq 2h \int_{\Delta_t} \frac{|\log H(\gamma) - \log H(\tau)|}{|\gamma - t| |\gamma - \tau|} d\sigma(\gamma) = 2h \left(\int_{\Delta_t^1} + \int_{\Delta_t^2} \right), \quad (27)$$

где

$$\Delta_t^1 = \left\{ \gamma \in \Delta_t : \gamma = \tau e^{i\varphi}, \varphi \in [-\pi, \pi], \omega(|\varphi|) \leq \frac{1}{2} H_a(\tau) \right\}, \quad \Delta_t^2 = \Delta_t \setminus \Delta_t^1.$$

Если $\gamma \in \Delta_t$, то

$$|\gamma - t| \geq |\gamma - \tau| \left(1 - \frac{|t - \tau|}{|\gamma - \tau|} \right) \geq q |\gamma - \tau|,$$

где q — положительная абсолютная постоянная. В то же время при $\gamma \in \Delta_t^1$

$$\begin{aligned}
 H(\gamma) &\geq H(\tau) - |H(\tau) - H(\gamma)| \geq H(\tau) \cdot \left(1 - \frac{\omega(|\varphi|)}{H(\tau)}\right) \geq \\
 &\geq H(\tau) \left(1 - \frac{\frac{1}{2}H(\tau)}{H(\tau)}\right) = \frac{1}{2} H(\tau).
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta_t^1} \frac{|\log H(\gamma) - \log H(\tau)|}{|\gamma - t| |\gamma - \tau|} d\sigma(\gamma) &\leq \frac{2}{qH(\tau)} \int_{\Delta_t^1} \frac{|H(\gamma) - H(\tau)|}{|\gamma - \tau|^2} d\sigma(\gamma) \leq \\
 &\leq \frac{C}{H(t)} \int_h^\infty \frac{\omega(u)}{u^2} du,
 \end{aligned} \quad (28)$$

так как $H(\tau) \geq \frac{1}{2} H(t)$ (см. (23)).

Оценке интеграла $\int_{\Delta_t^2}$ предположим простую лемму.

Лемма 4.

$$\begin{aligned}
 J(\zeta, \varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{\gamma \in \Gamma: |\gamma - \zeta| > \varepsilon\}} \frac{|\log H_\sigma(\gamma)|}{|\gamma - \zeta|^2} d\sigma(\gamma) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} A(f, c\sqrt{\varepsilon}) + \\
 &+ \frac{1}{\varepsilon} \int |\log |f|| d\sigma,
 \end{aligned} \quad (29)$$

каковы бы ни были число $\varepsilon \in (0, 1)$ и точка $\zeta \in \Gamma$ (c — абсолютная постоянная, величина $A(f, \delta)$ была определена в (15)).

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 J(\zeta, \varepsilon) &= \int_{\sqrt{\varepsilon} > |\zeta - \gamma| > \varepsilon} + \int_{|\zeta - \gamma| > \sqrt{\varepsilon}} \leq \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\{\gamma \in \Gamma: |\gamma - \zeta| < \sqrt{\varepsilon}\}} |\log |f|| d\sigma + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} |\log |f|| d\sigma_1.
 \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Положим

$$\alpha(\varepsilon) = \sup \left\{ \eta^2 \int_{|\gamma - \zeta| > \eta} \frac{|\log |f(\gamma)||}{|\gamma - \zeta|^2} d\sigma(\gamma) : 0 < \eta \leq \varepsilon, \zeta \in \Gamma \right\}. \quad (30)$$

Из леммы 4 следует, что $\alpha(\varepsilon) = o(1)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), так как

$$\alpha(\varepsilon) \leq A(f, c\sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon \int |\log |f|| d\sigma. \quad (31)$$

Продолжим теперь оценку интеграла $\int_{\Delta_t^2}$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_t^2} \frac{|\log H(\gamma) - \log H(\tau)|}{|\gamma - \tau| |\gamma - \tau|} d\sigma(\gamma) &\leq \frac{1}{q} \left(\int_{\Delta_t^2} \frac{|\log H(\gamma)|}{|\gamma - \tau|^2} d\sigma(\gamma) + \right. \\ &\left. + \int_{\Delta_t^2} \frac{|\log H(\tau)|}{|\gamma - \tau|^2} d\sigma(\gamma) \right) = \frac{1}{q} (s_1 + s_2), \end{aligned} \quad (32)$$

где q — абсолютная постоянная.

Оценим интеграл s_1 . Рассмотрим две возможности:

$$\begin{aligned} \text{а) } H_a(\tau) &< 2\omega \left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}} \right); \\ \text{б) } H_a(\tau) &> 2\omega \left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}} \right). \end{aligned}$$

В случае а) рассмотрим число $u^* = \inf \left\{ u > 0: \omega(u) > \frac{1}{2} H_a(\tau) \right\}$. Если множество, стоящее под знаком infimum'a, пусто, то $\Delta_t^1 = \Delta_t$, и $\Delta_t^2 = \Lambda$, так что $s_1 = 0$. Если же $\Delta_t^2 \neq \Lambda$, то, очевидно, $\omega(u^*) = \frac{1}{2} H_a(\tau) \geq \frac{1}{2} a = \omega(\beta(h) \sqrt{h})$ (см. (18)). Поэтому

$$u^* > \beta(h) \sqrt{h},$$

так как в противном случае из определения числа u^* и из монотонности функции ω следовало бы, что

$$\omega(\beta(h) \sqrt{h}) > \frac{1}{2} H_a(\tau) \geq \omega(\beta(h) \sqrt{h}).$$

Кроме того

$$\omega(u^*) \geq \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|,$$

так как $H_a > |f|$.

Положим

$$\chi(h) = \inf \left\{ v > 0: v > \beta(h) \sqrt{h}, \omega(v) > \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)| \right\}. \quad (33)$$

Тогда

$$u^* \geq \chi(h).$$

Заметим еще, что при $\gamma = \tau e^{i\varphi} \in \Delta_t^2$ ($\varphi \in [-\pi, \pi]$) справедливо неравенство $\omega(|\varphi|) > \frac{1}{2} H(\tau)$, и потому $|\varphi| \geq u^*$, $|\gamma - \tau| \geq cu^*$. Значит

$$s_1 \leq c_1 \int_{|\gamma - \tau| \geq cu^*} \frac{|\log H(\gamma)|}{|\gamma - \tau|^2} d\sigma(\gamma) \leq c_2 \frac{\alpha(u^*)}{(u^*)^2} \leq$$

$$\leq c_2 \alpha(u^*) \cdot \frac{1}{\chi(h)} \cdot \frac{\omega(u^*)}{u^*} \cdot \frac{1}{\omega(u^*)} \leq 2c_2 \alpha(u^*) \frac{\omega(\chi(h))}{|\chi(h)|^2 \cdot \frac{1}{2} H(\tau)}$$

($c, c_1, c_2, \dots$ — абсолютные постоянные; см. п. 1 в конце § 1).

Из условия а) следует, что

$$\omega(u^*) \leq \omega\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h))\sqrt{h}}}\right),$$

так как $\omega(u^*) = \frac{1}{2} H(\tau)$. Поэтому $u^* \leq \left(\frac{h}{\omega(\beta(h))\sqrt{h}}\right)^{1/2}$. Итак, в случае а)

$$s_1 \leq c_3 \alpha\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h))\sqrt{h}}}\right) \frac{\omega(\chi(h))}{|\chi(h)|^2} \frac{1}{H(\tau)}. \quad (34)$$

Если функция f обращается в нуль на Γ , то $\chi(h) = \beta(h)\sqrt{h}$.

В случае б) при любом $\gamma = \tau e^{i\varphi} \in \Delta_i^2$ имеем

$$\omega(|\varphi|) > \frac{1}{2} H(\tau) > \omega\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h))\sqrt{h}}}\right).$$

Поэтому

$$|\varphi| > \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h))\sqrt{h}}}, \quad |\gamma - \tau| > c_4 \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h))\sqrt{h}}},$$

и по определению функции α

$$s_1 \leq \alpha\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h))\sqrt{h}}}\right) \frac{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}{c_4^2 h}. \quad (35)$$

Оценим теперь интеграл s_2 . Полагая $\gamma = \tau e^{i\varphi}$, получим

$$\begin{aligned} s_2 &\leq |\log H(\tau)| \int_{\substack{\gamma \in \Delta_i^2 \\ |\gamma - \tau| > u^*}} \frac{d\gamma}{|\gamma - \tau|^2} \leq c_5 |\log H(\tau)| \frac{1}{u^*} = \\ &= c_5 \frac{|\log H(\tau)|}{\omega(u^*)} \frac{\omega(u^*)}{u^*} \leq c_5 \frac{|\log H(\tau)|}{\frac{1}{2} H(\tau)} \cdot \frac{2 \omega(\chi(h))}{\chi(h)}, \end{aligned} \quad (36)$$

где c_5 — абсолютная постоянная.

Из (25), (27), (28) и (32) получаем теперь, что

$$\begin{aligned} |\Phi(t) - \Phi(\tau)| &\leq c \left\{ \int_0^h \frac{\omega(u)}{u} du + \omega(h) + h \int_h^\infty \frac{\omega(u)}{u^2} du + \right. \\ &\quad \left. + hH(t) s_1 + hH(t) s_2 \right\}, \end{aligned} \quad (37)$$

где c — абсолютная постоянная. Учитывая (28), (34), (35) и (36), получим

$$hH(t) s_1 \leq \alpha \left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}} \right) \left[\omega(\beta(h)\sqrt{h}) + h \frac{\omega(\chi(h))}{[\chi(h)]^2} \right],$$

$$hH(t) s_2 \leq ch |\log l(h)| \cdot \frac{\omega(\chi(h))}{\chi(h)},$$

где $l(h)$ — большее из двух чисел: $2\omega(\beta(h)\sqrt{h})$ и $\min_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|$ (напомним, что $H(\gamma) > l(h)$ при всех $\gamma \in \Gamma$). Учитывая неравенство $\Omega(h) \geq c\omega(h)$ (см. § 1), получим

$$|\Phi(t) - \Phi(\tau)| \leq c \left\{ \Omega(h) + \alpha \left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}} \right) \left[\omega(\beta(h)\sqrt{h}) + h \frac{\omega(\chi(h))}{[\chi(h)]^2} \right] + h |\log l(h)| \frac{\omega(\chi(h))}{\chi(h)} \right\}, \quad (38)$$

где c — абсолютная постоянная.

Оценка разности $|\Phi(t) - \Phi(\tau)|$ закончена.

§ 5. Окончание доказательства теоремы 1

Оценим теперь $|\Phi(\tau)| \cdot |I(t) - I(\tau)|$ (см. (20)*). Обозначим через t^* ближайшую к t точку множества Γ^a (см. (10), (17) и (18)). Пусть $t^* = te^{i\rho}$, где $|\rho| \leq \pi$. Если $|\rho| < \beta(h)\sqrt{h}$, то

$$\begin{aligned} |f(t) - f(\tau)| &\leq |f(t)| + |f(\tau)| \leq 2|f(t)| + ||f(t)| - |f(\tau)|| \leq \\ &\leq 2(|f(t^*)| + ||f(t)| - |f(t^*)||) + \omega(h) \leq 2\alpha + 2\omega(|\rho|) + \\ &+ \omega(h) \leq 4\omega(\beta(h)\sqrt{h}) + 2\omega(\beta(h)\sqrt{h}) + \omega(h) \leq 7\omega(\beta(h)\sqrt{h}). \end{aligned} \quad (39)$$

Предположим теперь, что

$$|\rho| \geq \beta(h)\sqrt{h}. \quad (40)$$

В этом случае мы получим две различные оценки модуля разности $|I(t) - I(\tau)|$ (см. ниже (48) и (51)). Обе эти оценки будут использованы при выводе окончательного неравенства.

Ясно, что $|t^* - t| = 2 \left| \sin \frac{\rho}{2} \right| > \frac{2|\rho|}{\pi}$. Поэтому при любом $\gamma \in \Gamma^a$ при условии (40) верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\gamma - \tau| &\geq |\gamma - t| - |t - \tau| = |\gamma - t| \left(1 - \frac{|t - \tau|}{|\gamma - t|} \right) \geq \\ &\geq |\gamma - t| \left(1 - \frac{h}{|t^* - t|} \right) \geq |\gamma - t| \left(1 - \frac{h}{2/\pi|\rho|} \right) \geq \end{aligned}$$

* Если $\min_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)| > 0$, то при всех достаточно малых h множество Γ^a пусто, и

$$> |\gamma - t| \left(1 - \frac{h}{2/\pi\beta(h) \sqrt{h}} \right) > |\gamma - t| \left(1 - \frac{\pi}{6} \right) > \frac{|\gamma - t|}{3}. \quad (41)$$

Точки t и τ расположены на одной и той же открытой дуге L окружности Γ , дополнительной к замкнутому множеству Γ^a , так как $t^* = te^{i\varphi}$, где $|\varphi| > \beta(h) \sqrt{h} > 3h$, а $\tau = te^{i\theta}$. Функция $I = I_a$ аналитична на этой дуге. Поэтому

$$|I(t) - I(\tau)| \leq \max_{\xi \in P_{t,\tau}} |I'(\xi)| \cdot h, \quad (42)$$

где $P_{t,\tau}$ — содержащаяся в L дуга с концами t и τ (длина этой дуги равна h). Имеем (см. (19))

$$|I'(\xi)| \leq |\varphi'(\xi)| + |B'(\xi)| \leq 2 \int_{\Gamma^a} \frac{d\mu(\gamma)}{|\gamma - \xi|^3} + m + \sum_k \frac{1 - |t_k|^2}{|t_k - \xi|^2}. \quad (43)$$

Впредь мы будем считать, что $m = 0$.

Лемма 5. Если мера μ непрерывна (т. е. мера любого одноточечного подмножества окружности Γ равна нулю), то при $\xi \in \Gamma \setminus Z_f$

$$2 \int_{\Gamma} \frac{d\mu(\gamma)}{|\gamma - \xi|^2} + \sum_k \frac{1 - |t_k|^2}{|t_k - \xi|^2} < \frac{\eta(\xi)}{[\text{dist}(\xi, Z_f)]^2}, \quad (44)$$

где $Z_f = \{\gamma \in \Gamma: f(\gamma) = 0\}$, $\eta(\xi) \rightarrow 0$, если $\text{dist}(\xi, Z_f) \rightarrow 0$ ($\text{dist}(\xi, E)$ — расстояние от точки ξ до множества E , μ и t_k обозначают то же, что в лемме 1).

Функцию η можно считать монотонной.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\int_{\Gamma} \frac{d\mu(\gamma)}{|\gamma - \xi|^2} = 2 \int_d^{\infty} F_u(\xi) \frac{du}{u^3}, \quad (45)$$

где $F_u(\xi) = \mu\{\gamma \in \Gamma: |\gamma - \xi| < u\}$, $d = \text{dist}(\xi, Z_f)$.

Каждая из функций F_u непрерывна на Γ , и

$$F_u(\xi) \downarrow 0 \text{ при } u \downarrow 0$$

в каждой точке $\xi \in \Gamma$. Из теоремы Дини следует, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} \max_{\xi \in \Gamma} F_u(\xi) = 0.$$

Поэтому интеграл в (45) не больше, чем $\int_d^{\infty} \frac{\lambda(u)}{u^3} du$, где λ — ограниченная

непрерывная функция, причем $\lim_{u \rightarrow 0} \lambda(u) = 0$. Применяя правило Лопиталя, убеждаемся в том, что последний интеграл есть $o(d^{-2})(d \rightarrow +0)$.

Из условия, которому подчинены корни функции f , расположенные в круге U , следует, что

$$\text{dist}(\xi, Z_f) \leq c |t_k - \xi| \quad (46)$$

(c не зависит от ξ и k).

Поэтому ряд $\sum_k (1 - |t_k|^2) \frac{[d(\xi)]^2}{|t_k - \xi|^2}$ при всех $\xi \in \Gamma \setminus Z_f$ мажорируется сходящимся рядом $c \sum_k (1 - |t_k|)$, что обеспечивает возможность почленного перехода к пределу при $d(\xi) \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Сопоставляя (42), (43) и (44) с тем фактом, что

$$d(\xi) \geq c_2^2(h) \sqrt{h} \quad \text{при всех } \xi \in P_{t, \tau}$$

(c — абсолютная постоянная; см. (40) и (41)), предполагая, что для любой точки $\xi \in P_{t, \tau}$

$$d(\xi) \leq \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}}, \quad (47)$$

получим (см. (13))

$$|I(t) - I(\tau)| \leq (\zeta(h) + \nu(\Gamma)) [\beta(h)]^{-2},$$

$$\zeta(h) = \gamma \left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}} \right) + \int_{\Gamma^a} |\log |f|| d\sigma + |\log a| \sigma(\Gamma^a), \quad (48)$$

где $\nu(\Gamma)$ — сумма всех чисто точечных нагрузок, входящих в μ .

Если же неравенство (47) нарушается для какой-нибудь точки $\xi_0 \in P_{t, \tau}$, то, принимая во внимание неравенство

$$\text{diam } P_{t, \tau} \leq h,$$

получим, что для любой точки $\xi \in P_{t, \tau}$

$$d(\xi) \geq \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}} - h \geq \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}} \cdot \frac{4}{5},$$

так как $\omega(|f|, \delta) \leq 2$ при всех $\delta > 0$, а $h < \frac{1}{100}$.

Поэтому

$$\begin{aligned} |\Phi(\tau)| |I(t) - I(\tau)| &\leq |I(t) - I(\tau)| \leq \\ &\leq h \max_{\xi \in P_{t, \tau}} \left| 2 \int_{\Gamma^a} \frac{d\lambda_n(\gamma)}{|\gamma - \xi|^2} + \sum_k \frac{1 - |t_k|^2}{|t_k - \xi|^2} \right| \leq \\ &\leq C \frac{h}{\min_{\xi \in P_{t, \tau}} [d(\xi)]^2} \leq C_1 \omega(\beta(h) \sqrt{h}), \end{aligned} \quad (49)$$

где C_1 — постоянная, которую можно выразить через $\mu(\Gamma)$, последовательность $\{t_k\}$ и M_n (см. лемму 3).

Вернемся еще раз к оценкам (42) и (43). Принимая во внимание (41), заключаем, что

$$> |\gamma - t| \left(1 - \frac{h}{2/\pi \beta(h) \sqrt{h}} \right) > |\gamma - t| \left(1 - \frac{\pi}{6} \right) > \frac{|\gamma - t|}{3}. \quad (41)$$

Точки t и τ расположены на одной и той же открытой дуге L окружности Γ , дополнительной к замкнутому множеству Γ^a , так как $t^* = te^{i\rho}$, где $|\rho| > \beta(h) \sqrt{h} > 3h$, а $\tau = te^{i\theta}$. Функция $I = I_a$ аналитична на этой дуге. Поэтому

$$|I(t) - I(\tau)| \leq \max_{\xi \in P_{t, \tau}} |I'(\xi)| \cdot h, \quad (42)$$

где $P_{t, \tau}$ — содержащаяся в L дуга с концами t и τ (длина этой дуги равна h). Имеем (см. (19))

$$|I'(\xi)| \leq |\varphi'(\xi)| + |B'(\xi)| \leq 2 \int_{\Gamma^a} \frac{d\mu(\gamma)}{|\gamma - \xi|^2} + m + \sum_k \frac{1 - |t_k|^2}{|t_k - \xi|^2}. \quad (43)$$

Впредь мы будем считать, что $m = 0$.

Лемма 5. Если мера μ непрерывна (т. е. мера любого одноточечного подмножества окружности Γ равна нулю), то при $\xi \in \Gamma \setminus Z_f$

$$2 \int \frac{d\mu(\gamma)}{|\gamma - \xi|^2} + \sum_k \frac{1 - |t_k|^2}{|t_k - \xi|^2} < \frac{\eta(\xi)}{[\text{dist}(\xi, Z_f)]^2}, \quad (44)$$

где $Z_f = \{\gamma \in \Gamma: f(\gamma) = 0\}$, $\eta(\xi) \rightarrow 0$, если $\text{dist}(\xi, Z_f) \rightarrow 0$ ($\text{dist}(\xi, E)$ — расстояние от точки ξ до множества E , μ и t_k обозначают то же, что в лемме 1).

Функцию η можно считать монотонной.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\int \frac{d\mu(\gamma)}{|\gamma - \xi|^2} = 2 \int_d^{\infty} F_u(\xi) \frac{du}{u^3}, \quad (45)$$

где $F_u(\xi) = \mu\{\gamma \in \Gamma: |\gamma - \xi| < u\}$, $d = \text{dist}(\xi, Z_f)$.

Каждая из функций F_u непрерывна на Γ , и

$$F_u(\xi) \downarrow 0 \text{ при } u \downarrow 0$$

в каждой точке $\xi \in \Gamma$. Из теоремы Дини следует, что

$$\lim_{u \rightarrow 0} \max_{\xi \in \Gamma} F_u(\xi) = 0.$$

Поэтому интеграл в (45) не больше, чем $\int_d^{\infty} \frac{\lambda(u)}{u^3} du$, где λ — ограниченная непрерывная функция, причем $\lim_{u \rightarrow 0} \lambda(u) = 0$. Применяя правило Лопиталя, убеждаемся в том, что последний интеграл есть $o(d^{-2})(d \rightarrow +0)$.

Из условия, которому подчинены корни функции f , расположенные в круге U , следует, что

$$\text{dist}(\xi, Z_f) \leq c |t_k - \xi| \quad (46)$$

(c не зависит от ξ и k).

Поэтому ряд $\sum_k (1 - |t_k|^2) \frac{[d(\xi)]^2}{|t_k - \xi|^2}$ при всех $\xi \in \Gamma \setminus Z_f$ мажорируется сходящимся рядом $c \sum_k (1 - |t_k|)$, что обеспечивает возможность почленного перехода к пределу при $d(\xi) \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Сопоставляя (42), (43) и (44) с тем фактом, что

$$d(\xi) \geq c\beta(h) \sqrt{h} \text{ при всех } \xi \in P_{t,\tau}$$

(c — абсолютная постоянная; см. (40) и (41)), предполагая, что для любой точки $\xi \in P_{t,\tau}$

$$d(\xi) \leq \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}}, \quad (47)$$

получим (см. (13))

$$|I(t) - I(\tau)| \leq (\zeta(h) + \nu(\Gamma)) [\beta(h)]^{-2},$$

$$\zeta(h) = \gamma \left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}} \right) + \int_a^{\Gamma} |\log |f|| d\sigma + |\log a| \sigma(\Gamma^a), \quad (48)$$

где $\nu(\Gamma)$ — сумма всех чисто точечных нагрузок, входящих в μ .

Если же неравенство (47) нарушается для какой-нибудь точки $\xi_0 \in P_{t,\tau}$, то, принимая во внимание неравенство

$$\text{diam } P_{t,\tau} \leq h,$$

получим, что для любой точки $\xi \in P_{t,\tau}$

$$d(\xi) \geq \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}} - h \geq \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}} \cdot \frac{4}{5},$$

так как $\omega(|f|, \delta) \leq 2$ при всех $\delta > 0$, а $h < \frac{1}{100}$.

Поэтому

$$\begin{aligned} |\Phi(\tau)| |I(t) - I(\tau)| &\leq |I(t) - I(\tau)| \leq \\ &\leq h \max_{\xi \in P_{t,\tau}} \left[2 \int_a^{\Gamma} \frac{d\mu_a(\gamma)}{|\gamma - \xi|^2} + \sum_k \frac{1 - |t_k|^2}{|t_k - \xi|^2} \right] \leq \\ &\leq C \frac{h}{\min_{\xi \in P_{t,\tau}} [d(\xi)]^2} \leq C_1 \omega(\beta(h) \sqrt{h}), \end{aligned} \quad (49)$$

где C_1 — постоянная, которую можно выразить через $\mu(\Gamma)$, последовательность $\{t_k\}$ и M_a (см. лемму 3).

Вернемся еще раз к оценкам (42) и (43). Принимая во внимание (41), заключаем, что

$$|\gamma - \xi| > \frac{1}{3} |t^* - t|, \quad (50)$$

если $\gamma \in \Gamma^a$, а $\xi \in P_{t^*}$. Поэтому из (42) и (43) непосредственно (с учетом (44) и (50)) получим

$$|I(t) - I(\gamma)| \leq \frac{C}{|t^* - t|^2} (\lambda_a(\Gamma) + \sum_k (1 - |t_k|)) \cdot h = \frac{D}{|t^* - t|^2} \cdot h, \quad (51)$$

где $D = D_f$ зависит лишь от последовательности $\{t_k\}$, $\mu(\Gamma)$, $\sup |\log a| \times \times \int_{\Gamma^a} \|\log |f|\| d\sigma$, $\int_{\Gamma} \|\log |f|\| d\sigma$.

Наконец, заметим, что

$$\begin{aligned} |\Phi(\gamma)| &\leq |\Phi(t)| + \omega(h) \leq |\Phi(t^*)| + \omega(|\rho|) + \\ &+ \omega(h) = 2\omega(\beta(h) \sqrt{h}) + \omega(|\rho|) + \omega(h). \end{aligned}$$

Вспоминая, что $|I(\gamma)| \leq 1$ при всех $\gamma \in \Gamma$, получим

$$|\Phi(\gamma)| |I(t) - I(\gamma)| \leq 4\omega(\beta(h) \sqrt{h}) + 2\omega(h) + \omega(|\rho|) |I(t) - I(\gamma)|. \quad (52)$$

Приступая к оценке последнего слагаемого, представим $|I(t) - I(\gamma)|$ в виде $|I(t) - I(\gamma)|^{1/2} \cdot |I(t) - I(\gamma)|^{1/2}$, для оценки первого сомножителя используем неравенство (51), а для второго — (48). Получим

$$\begin{aligned} \omega(|\rho|) |I(t) - I(\gamma)| &\leq \omega(|\rho|) \cdot \frac{\sqrt{D_f}}{|t - t^*|} \cdot \sqrt{h} \cdot \frac{\sqrt{\zeta(h) + \nu(\Gamma)}}{\beta(h)} \leq \\ &\leq 2 \frac{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}{\sqrt{h} [\beta(h)]^2} \sqrt{D_f} \sqrt{h} \sqrt{\zeta(h) + \nu(\Gamma)} = \\ &= 2 \sqrt{D_f} \frac{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}{[\beta(h)]^2} \sqrt{\zeta(h) + \nu(\Gamma)} \quad (53) \end{aligned}$$

(мы воспользовались оценкой $\frac{\omega(|t - t^*|)}{|t - t^*|} \leq 2 \frac{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}{\beta(h) \sqrt{h}}$ и неравен-

ством $\text{dist}(\xi, Z_f) \leq \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}}$ ($\xi \in P_{t^*}$); если это последнее неравенство не выполнено при каком-нибудь $\xi \in P_{t^*}$, то выполнено (49)).

Итак (см. (20), (38), (52), (53) и (49)), получаем окончательно:

если t и τ — точки окружности Γ , $\tau = te^{ih}$, $0 < h < \frac{1}{100}$, $\omega(\sqrt{h}) < \frac{1}{2}$,

$|\rho| > \beta(h) \sqrt{h}$, то

$$|f(t) - f(\tau)| \leq c \left\{ \Omega(h) + \alpha \left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}} \right) \left[\omega(\beta(h) \sqrt{h}) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + h \frac{\omega(\chi(h))}{[\chi(h)]^2} \Big] + h |\log l(h)| \frac{\omega(\chi(h))}{\chi(h)} + \\
& + \frac{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}{[\beta(h)]^2} \sqrt{\eta \left(\left(\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})} \right)^{1/2} \right) + 2 \int_{\Gamma^a} |\log |f|| \, d\sigma + \nu(\Gamma) +} \\
& + \omega(\beta(h) \sqrt{h}) \Big\},
\end{aligned}$$

где c — число, зависящее лишь от $\mu, \|f\|_{\Gamma}$ и последовательности $\{t_k\}$; $l(h) = \alpha = 2\omega(\beta(h) \sqrt{h})$, $\chi(h) = \beta(h) \sqrt{h}$, если функция f обращается в нуль на окружности Γ , а в противном случае l и χ отделены от нуля; α и η — монотонные на $(0, +\infty)$ неотрицательные функции,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \eta(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \alpha(x) = 0.$$

Если же $|\rho| < \beta(h) \sqrt{h}$, то

$$|f(t) - f(\tau)| \leq 7\omega(\beta(h) \sqrt{h})$$

(см. (39)).

Теперь можно уточнить выбор $\beta(h)$. Если $\nu(\Gamma) > 0$, то мы положим $\beta(h) = 1$. Если $\nu(\Gamma) = 0$, то $\beta(h)$ нужно выбрать так, чтобы коэффициент при $\omega(\beta(h) \sqrt{h})$ оставался ограниченным, и $\lim_{h \rightarrow +0} \beta(h) = 0$. Для этого в том случае, когда f имеет корни на Γ , положим, например (см. (15))

$$\beta(h) = h^{1/4} + [\alpha(ch^{1/8})]^{1/2} + [\eta(ch^{1/8}) + 2A(f, \sigma(\Gamma^{2\omega(\sqrt{h})}))]^{1/4},$$

где c — положительное число, не зависящее от h . Тогда (см. п. 2 в конце § 1) получим

$$\omega(\beta(h) \sqrt{h}) \geq \omega(h^{3/4}) \geq \kappa h^{3/4}, \quad [\beta(h)]^2 \geq \alpha(ch^{1/8}),$$

$$[\beta(h)]^2 \geq \sqrt{\eta(ch^{1/8}) + 2 \int_{\Gamma^a} |\log |f|| \, d\sigma},$$

$$\frac{1}{[\beta(h)]^2} \alpha \left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}} \right) \leq \frac{1}{\alpha(ch^{1/8})} \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}} h^{1/8} \right) \leq 1,$$

$$\frac{1}{[\beta(h)]^2} \left[\eta \left(\left(\frac{h}{\omega(\beta(h) \sqrt{h})} \right)^{1/2} \right) + 2 \int_{\Gamma^a} |\log |f|| \, d\sigma \right]^{1/2} \leq 1,$$

если $\kappa = c^{-2}$.

В то же время

$$\begin{aligned}
h |\log l(h)| \frac{\omega(\chi(h))}{\chi(h)} & \leq \sqrt{h} |\log \omega(\beta(h) \sqrt{h})| \frac{\omega(\beta(h) \sqrt{h})}{\beta(h)} \leq \\
& \leq h^{1/4} |\log \kappa h^{3/4}| \omega(\beta(h) \sqrt{h}).
\end{aligned}$$

Итак

$$\omega(f, h) = O(\omega(\sqrt{h}) + \Omega(h)) \quad (h \rightarrow +0),$$

$$\omega(f, h) = O(\omega(\sigma(\sqrt{h})) + \Omega(h)) \quad (h \rightarrow +0),$$

если $\gamma(\Gamma) = 0$.

Если же f не обращается в нуль на Γ , то можно положить $\beta(h) = 3\sqrt{h}$. В этом случае

$$\omega(\beta(h)\sqrt{h}) = \omega(3h) = O(\Omega(h)) \quad (h \rightarrow +0),$$

$$\omega(f, h) = O(\Omega(h)) \quad (h \rightarrow +0).$$

Теорема 1 доказана.

§ 6. Точность теоремы 1

Теорема 2. Пусть φ — функция, заданная на открытой полуоси $(0, +\infty)$, возрастающая и такая, что

$$\varphi(x_1 + x_2) \leq \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \quad (x_1, x_2 > 0), \quad \lim_{x \rightarrow +0} \varphi(x) = 0 \quad (54)$$

(короче, φ — какой-нибудь модуль непрерывности).

Если

$$\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u} du < +\infty, \quad (55)$$

то существует такая функция f класса A , что

$$\omega(|f|, \delta) = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta \rightarrow +0),$$

$$\omega(f, \delta) \geq \varphi(\sqrt{\delta}) + \Phi(\delta) \quad \text{при всех } \delta \text{ из интервала } (0, 1),$$

где

$$\Phi(\delta) = \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u} du + \delta \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{\varphi(u)}{u^2} du.$$

Доказательство. Функция φ совпадает со своим модулем непрерывности. Не умаляя общности, можно считать, что φ непрерывно дифференцируема в интервале $(0, +\infty)$, и

$$\frac{\varphi'(\delta)}{\varphi(\delta)} \leq \frac{1}{\delta} \quad (\delta > 0) \quad (56)$$

(см. § 1, п. 5). Последнее неравенство следует из монотонности отношения $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$:

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \right) = \frac{\varphi'(\delta)}{\delta} - \frac{\varphi(\delta)}{\delta^2} \leq 0.$$

Пусть w —заданная на единичной окружности Γ функция, обладающая следующими свойствами:

$$w(e^{i\theta}) = \varphi(|\theta|), \quad \text{если } -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}; \quad (57)$$

$$w(e^{i(\pi+\theta)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\frac{\pi}{4} < \theta < 0; \\ \exp \varphi(|\theta|), & \text{если } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (58)$$

(мы будем считать, что $\varphi(0)=0$);

w непрерывна на Γ и строго положительна на $\Gamma \setminus \{1\}$; (59)

$$\omega(w, \delta) = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta \rightarrow +0). \quad (60)$$

Из условий (57) и (59) следует, что функция $\log w$ суммируема на Γ . Положим

$$g(t) = \exp \left[\int_{\Gamma} \log w \cdot S_t d\sigma \right] \quad (t \in U). \quad (61)$$

Функцию g можно продолжить на замкнутый круг $U \cup \Gamma$ с сохранением непрерывности. Это следует из того, что в некоторой окрестности V_γ каждой точки γ множества $\Gamma \setminus \{1\}$ функция $\log w$ непрерывна, и модуль непрерывности $\omega(\log w, V_\gamma, \delta)$ ее сужения на V_γ удовлетворяет условию Дини

$$\int_0^\delta \frac{\omega(\log w, V_\gamma, \delta)}{\delta} d\delta < +\infty,$$

а $\lim_{t \rightarrow 1, |t| < 1} |g(t)| = 0$ (мы считаем, что $|g(\gamma)| = w(\gamma)$, если $\gamma \in \Gamma$ — см.

лемму 2).

Положим

$$f(t) = \exp \left[-\frac{1+t}{1-t} \right] \cdot g(t) \quad (t \in (U \cup \Gamma) \setminus \{1\}), \quad (62)$$

$$f(1) = 0.$$

Легко видеть, что f принадлежит классу A , и

$$\omega(|f|, \delta) = \omega(w, \delta) = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta \rightarrow +0).$$

Если $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, то

$$f(e^{i\theta}) = \varphi(\theta) \cdot \exp[iD(\theta)],$$

где

$$D(\theta) = -\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log w(e^{iu}) \operatorname{ctg} \frac{u-\theta}{2} du.$$

Проверим, что

$$D(\theta) = -\frac{2}{\theta} + R(\theta) + O(1) \quad (\theta \rightarrow +0), \quad (63)$$

где R — функция, дифференцируемая на промежутке $(0, \pi/4)$ и удовлетворяющая условию

$$R'(\theta) = o\left(\frac{1}{\theta^2}\right) \quad (\theta \rightarrow +0). \quad (64)$$

Пусть $h(\theta) = \log \omega(e^{i\theta})$. Если $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, то (см. (57))

$$h'(\theta) = \frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}.$$

Как отмечалось в начале доказательства (см. (56))

$$h'(\theta) \leq \frac{1}{\theta} \quad \left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (65)$$

Положим

$$R(\theta) = -\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\theta/2} + \int_{3\theta/2}^{\pi} \right) h(u) \frac{1}{u-\theta} du \quad \left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (66)$$

Легко проверить, что

$$D(\theta) = -\frac{2}{\theta} + R(\theta) - \frac{1}{\pi} \int_{\theta/2}^{3\theta/2} \frac{h(u)}{u-\theta} du + r(\theta) \quad \left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad (67)$$

где r — функция, аналитическая на интервале $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Имеем

$$-\pi R'(\theta) = -\frac{h(\theta/2)}{\theta/2} + \int_{-\pi}^{\theta/2} \frac{h(u)}{(u-\theta)^2} du - \frac{h\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\theta/2} + \int_{3\theta/2}^{\pi} \frac{h(u)}{(u-\theta)^2} du. \quad (68)$$

Ясно, что $|h(\theta)| = |\log \varphi(e^{i\theta})| \leq |\log C| |\theta|$. Поэтому

$$\frac{\left| h\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| + \left| h\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right|}{\theta} = O\left(\frac{|\log \theta|}{\theta}\right) \quad (\theta \rightarrow +0), \quad (69)$$

$$\left| \int_{-\pi}^{\theta/2} \frac{h(u)}{(u-\theta)^2} du \right| \leq \int_{-\pi/4}^0 \frac{|h(u)|}{(u-\theta)^2} du + \int_0^{\theta/2} \frac{|h(u)|}{(u-\theta)^2} du + O(1) \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi/4} \frac{|\log Cu|}{(u+\theta)^2} du + \frac{4}{\theta^2} \int_0^{\theta/2} |\log C\theta| du + O(1) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/4} \frac{|\log u|}{(u+\theta)^2} du + O\left(\frac{|\log \theta|}{\theta}\right) \leq \frac{1}{\theta} \int_0^{\pi/4} \frac{|\log v| + |\log \theta|}{v+1} dv + \\
&\quad + O\left(\frac{|\log \theta|}{\theta}\right) = O\left(\frac{(\log \theta)^2}{\theta}\right) \quad (\theta \rightarrow +0).
\end{aligned} \tag{70}$$

Наконец

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{3\theta/2}^{\pi} \frac{h(u)}{(u-\theta)^2} du \right| \leq \int_{3\theta/2}^{\pi/4} \frac{|h(u)| du}{(u-\theta)^2} + O(1) \leq \\
&\leq \left| h\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right| \int_{3\theta/2}^{\pi/4} \frac{du}{(u-\theta)^2} + O(1) = O\left(\frac{|\log \theta|}{\theta}\right) \quad (\theta \rightarrow +0).
\end{aligned} \tag{71}$$

Итак (см. (68)–(71))

$$R'(\theta) = O\left(\frac{|\log \theta|^2}{\theta}\right) \quad (\theta \rightarrow +0),$$

так что (64) выполнено, если функция R определяется равенством (66).

Осталось проверить, что

$$\int_{\theta/2}^{3\theta/2} \frac{h(u)}{u-\theta} du = O(1) \quad (\theta \rightarrow +0).$$

Имеем

$$\left| \int_{\theta/2}^{3\theta/2} \frac{h(u)}{u-\theta} du \right| = \left| \int_{\theta/2}^{3\theta/2} \frac{h(u) - h(\theta)}{u-\theta} du \right| \leq \frac{2}{\theta} \cdot \theta = 2$$

(мы воспользовались оценкой (65) и теоремой Лагранжа о среднем). Утверждения (63) и (64) доказаны.

Ясно, что $\lim D(\theta) = -\infty$, и что D — функция, непрерывная в интервале $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Пусть θ — достаточно малое положительное число,

и пусть $B(\theta)$ — такая точка промежутка $(0, \theta)$, что

$$D(B(\theta)) = D(\theta) - \pi.$$

Применяя (63), (64) и теорему Лагранжа о среднем, получим

$$\begin{aligned}
\pi &= D(\theta) - D(B(\theta)) = \\
&= \frac{2}{c^2} (\theta - B(\theta)) \cdot (1 + o(1)) + O(1) \quad (\theta \rightarrow +0),
\end{aligned}$$

где c — некоторая точка промежутка $(B(\theta), \theta)$. Поэтому

$$\theta - B(\theta) = \left(\frac{\pi}{2} + O(1)\right) \cdot (1 + o(1)) c^2 \leq O(1) \cdot \theta^2 \quad (\theta \rightarrow +0).$$

В то же время

$$|f(e^{i\theta}) - f(e^{iB(\theta)})| = |\varphi(\theta) e^{iD(\theta)} - \varphi(B(\theta)) e^{i(D(\theta)-\pi)}| = \\ = \varphi(\theta) + \varphi(B(\theta)) \geq \varphi(\theta).$$

Значит, найдется такое положительное C , что

$$\frac{|f(e^{i\theta}) - f(e^{iB(\theta)})|}{\varphi(\sqrt{\theta - B(\theta)})} > \frac{\varphi(\theta)}{\varphi(C\theta)} > \frac{1}{C}$$

при всех достаточно малых положительных θ ($\theta < \theta_0$). Всякое достаточно малое положительное число δ совпадает с некоторым числом вида $\theta - B(\theta)$, где $\theta \in (0, \theta_0)$. Поэтому

$$C\omega(f, \delta) > \varphi(\sqrt{\delta}), \quad (72)$$

если число δ положительно и достаточно мало.

Оценим теперь снизу разность $|f(-1) - f(e^{i\theta})|$ при θ , принадлежащих промежутку $\left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$ и близких к π .

Ясно, что

$$|f(-1) - f(e^{i\theta})| > |g_1(-1) - g_1(e^{i\theta})| - r_1(\theta), \quad (73)$$

где

$$g_1(t) = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-3\pi/4} \varphi(\pi+u) \frac{e^{iu} + t}{e^{iu} - t} du \right], \quad (t \in U)$$

и

$$r_1(\theta) = O(\pi - \theta) \quad (\theta \rightarrow \pi - 0).$$

Полагая $\theta = \pi - \delta$, получим

$$|g_1(-1) - g_1(e^{i\theta})| = \left| 1 - \frac{g_1(e^{i\theta})}{g_1(-1)} \right| > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/4} \varphi(u) \operatorname{ctg} \frac{u}{2} du - \\ - \int_0^{\pi/4} \varphi(u) \operatorname{ctg} \frac{u+\delta}{2} du > \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u} du - \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u+\delta} du \right] - r_2(\delta), \quad (74)$$

где $r_2(\delta) = O(\delta)$ ($\delta \rightarrow +0$).

Далее

$$\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u} du - \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u+\delta} du = \int_0^\delta \frac{\varphi(u)}{u} du + \int_\delta^1 \varphi(u) \left[\frac{1}{u} - \right. \\ \left. - \frac{1}{u+\delta} \right] du - \int_0^\delta \frac{\varphi(u)}{u+\delta} du = \Phi(\delta) - \delta \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u^2} \frac{\delta du}{u+\delta} - \int_0^\delta \frac{\varphi(u)}{u+\delta} du.$$

Заметим теперь, что

$$\delta \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u^2} \frac{\delta du}{u+\delta} < \frac{\delta}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u^2} du \leq \frac{1}{2} \Phi(\delta),$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\varphi(u)}{u+\delta} du \leq \varphi(\delta) \log 2.$$

Повтому

$$\int_{\frac{\delta}{2}}^1 \frac{\varphi(u)}{u} du - \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u+\delta} du > \frac{1}{2} \Phi(\delta) - \log 2 \cdot \varphi(\delta)$$

(эта оценка известна—см. [2]).

Возвращаясь к (73) и (74), получим

$$\omega(f, \delta) > |f(-1) - f(e^{i(\pi-\delta)})| > \frac{1}{4\pi} \Phi(\delta) - \frac{\log 2}{2\pi} \varphi(\delta) - r_3(\delta), \quad (75)$$

где $r_3(\delta) = O(\delta)$ ($\delta \rightarrow +0$).

Сопоставляя (75) с (72), при всех малых положительных δ получим

$$\begin{aligned} C \omega(f, \delta) &> \varphi(\sqrt{\delta}) + \frac{1}{4\pi} \Phi(\delta) - \frac{\log 2}{2\pi} \varphi(\delta) - r_3(\delta) > \\ &> \left(1 - \frac{\log 2}{2\pi}\right) \varphi(\sqrt{\delta}) + \frac{1}{4\pi} \Phi(\delta) - r_3(\delta), \end{aligned}$$

если C — достаточно большое (не зависящее от δ) число. Заметим

теперь, что $r_3(\delta) = O(\delta) = o(\varphi(\sqrt{\delta}))$ ($\delta \rightarrow +0$), так как $\frac{\delta}{\varphi(\sqrt{\delta})} = \frac{\sqrt{\delta}}{\varphi(\sqrt{\delta})} \cdot \sqrt{\delta} = O(\sqrt{\delta})$ ($\delta \rightarrow +0$).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть φ — функция, удовлетворяющая условиям (54) и (55) теоремы 2, а β — положительная функция, заданная на интервале $(0, 1)$. Если $\beta(+0) = 0$, то найдется внешняя функция g класса A такая, что

$$\omega(|g|, \delta) = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta \rightarrow +0),$$

$$\omega(g, \delta) > \varphi(\beta(\delta) \sqrt{\delta}) + \Phi(\delta)$$

при всех достаточно малых положительных δ .

Функцию β можно, не умаляя общности, считать возрастающей.

Доказательству этой теоремы предположим простую лемму.

Лемма 6. Пусть η — положительная функция, заданная на промежутке $(0, 1]$, причем $\lim_{\delta \rightarrow +0} \eta(\delta) = 0$. Тогда существует непрерывно дифференцируемая и суммируемая на промежутке $(0, 1]$ убывающая положительная функция ψ такая, что

$$\left. \begin{aligned} \eta(\xi) &= o\left(\int_0^\xi \psi(u) du\right) \\ \psi'(\xi) &= o\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \end{aligned} \right\} (\xi \rightarrow +0).$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно предполагать, что

$$\eta(\xi) = \left(\int_0^\xi g(u) du \right)^2,$$

где функция g положительна и суммируема на промежутке $(0,1)$ (достаточно рассмотреть возрастающую непрерывную на промежутке $[0,1]$ мажоранту функции $\sqrt{\eta}$, кусочно-линейную на каждом сегменте вида $[\varepsilon, 1]$ ($0 < \varepsilon < 1$). Введем в рассмотрение невозрастающую на интервале $(0,1)$ функцию g^* , равноизмеримую с функцией g (определение функции g^* и описание ее свойств можно найти в пункте 13 первой главы монографии [1]).

Пусть теперь $\Psi(x) = \int_0^1 x^a g^*(a) da$. Функция Ψ бесконечно дифференцируема и возрастает в промежутке $(0, 1)$, причем $\lim_{x \rightarrow +0} \Psi(x) = 0$. Кроме того ([1], стр. 57)

$$\begin{aligned} \Psi(x) &> \int_0^x x^a g^*(a) da > x^x \int_0^x g^*(a) da > \\ &> x^x \int_0^x g(a) da \geq x^x \sqrt{\eta(x)}, \end{aligned}$$

так что $\frac{\Psi(x)}{\eta(x)} \geq \text{const} \frac{1}{\sqrt{\eta(x)}} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +0$.

Наконец

$$\begin{aligned} \Psi''(x) &= \frac{1}{x^2} \int_0^1 a(a-1) x^a g^*(a) da = o\left(\frac{1}{x^2}\right) (x \rightarrow +0), \\ \Psi''(x) &\leq 0 \quad (x \in (0,1)), \end{aligned}$$

остается положить $\psi = \Psi'$. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 3 рассмотрим функцию w , заданную на окружности Γ , обладающую свойствами (58), (59), (60) и такую, что

$$w(e^{i\theta}) = \begin{cases} \varphi(\theta) & 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \\ \exp[-\psi(|\theta|)] & -\frac{\pi}{4} < \theta < 0, \end{cases}$$

где ψ — убывающая непрерывно дифференцируемая в промежутке $(0, \frac{\pi}{4})$ положительная функция, выбор которой мы уточним позже.

Пока предположим только, что

$$\psi'(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right) (x \rightarrow +0), \int_0^{\pi/4} \psi(x) dx < +\infty, \psi(x) > \frac{1}{\sqrt{x}} \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Рассмотрим функцию g , определенную формулой (61). Ясно, что $g \in A$ и что

$$\omega(|g|, \delta) = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta \rightarrow +0).$$

Отметим, что на дуге $\{e^{i\theta} : -\frac{\pi}{4} < \theta < 0\}$ функция $|g|$ непрерывно дифференцируема, так как

$$\frac{d}{d\theta} [e^{-\psi(\theta)}] = e^{-\psi(\theta)} \cdot \psi'(\theta) \rightarrow 0.$$

В самом деле,

$$\psi(\theta) > \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \text{ а } \psi'(\theta) = o\left(\frac{1}{\theta^2}\right) \quad (\theta \rightarrow +0).$$

Пусть $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$. Тогда

$$g(e^{i\theta}) = \varphi(\theta) \exp[iD^*(\theta)],$$

где

$$\begin{aligned} D^*(\theta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log w(e^{iu}) \operatorname{ctg} \frac{u-\theta}{2} du = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\psi(u) du}{u+\theta} + R^*(\theta) + O(1) \quad (\theta \rightarrow +0); \end{aligned} \quad (76)$$

а R^* — функция, заданная при $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ следующим образом:

$$R^*(\theta) = -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\theta/2} \frac{\log \varphi(u)}{u-\theta} du + \int_{3\theta/2}^{\pi/4} \frac{\log \varphi(u)}{u-\theta} du \right].$$

При доказательстве теоремы 2 было установлено, что

$$\left| \frac{d}{d\theta} [R^*(\theta)] \right| = O\left(\frac{|\log \theta|}{\theta}\right) (\theta \rightarrow +0).$$

Положим $J(\theta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\psi(u) du}{u+\theta}$. Ясно, что при малых положительных θ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} [J(\theta) + R^*(\theta)] &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\psi(u) du}{(u+\theta)^2} + \frac{d}{d\theta} R^*(\theta) > \\ &> c J'(\theta) - c_1 \frac{|\log \theta|}{\theta} > c_2 J'(\theta), \end{aligned}$$

так как $J'(\theta) > \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\sqrt{u(u+\theta)^2}} \geq \frac{c_3}{\theta^{3/2}}$ ($c, c_1, c_2, \dots$ — положительные константы, не зависящие от θ).

Функция D^* непрерывна, и $\lim_{\theta \rightarrow +0} D^*(\theta) = -\infty$. Пусть θ — достаточно малое положительное число. Через $B^*(\theta)$ обозначим точку интервала $(0, \theta)$, удовлетворяющую равенству $D(B^*(\theta)) = D(\theta) - \pi$.

Как и при доказательстве теоремы 2, из (76) получим

$$\begin{aligned} \pi = D^*(\theta) - D^*(B^*(\theta)) &\geq \frac{d}{d\theta} [J(\theta) + R^*(\theta)]|_{\theta=B^*(\theta)} (\theta - B^*(\theta)) + \\ &+ O(1) \geq \text{const} \cdot J'(c) (\theta - B^*(\theta)) + O(1) = \\ &= \text{const} \int_0^{\pi/4} \frac{\psi(u) du}{(u+c)^2} \cdot (\theta - B^*(\theta)) + O(1) > \\ &> \text{const} \int_0^{\pi/4} \frac{\psi(u) du}{(u+\theta)^2} \cdot (\theta - B^*(\theta)) + O(1) \geq \\ &\geq \text{const} \frac{1}{\theta^2} \int_0^{\pi/4} \psi(u) du \cdot (\theta - B^*(\theta)) + O(1) \quad (\theta \rightarrow +0), \end{aligned}$$

где c — некоторое число из интервала $(B^*(\theta), \theta)$. Поэтому

$$\theta - B^*(\theta) \leq O(1) \theta^2 \left(\int_0^{\pi/4} \psi(u) du \right)^{-1} (\theta \rightarrow +0).$$

Пользуясь леммой 6, выберем теперь θ так, чтобы

$$\theta^2(\theta) = o\left(\int_0^{\pi/4} \psi(u) du\right) (\theta \rightarrow +0).$$

Тогда

$$\theta - B^*(\theta) < \frac{\theta^2}{[\beta(\theta)]^2} \leq \frac{\theta^2}{[\beta(\theta - B^*(\theta))]^2}$$

при всех достаточно малых положительных θ . Поэтому

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|g(e^{i\theta}) - g(e^{iB^*(\theta)})|}{\varphi(\beta(\theta - B^*(\theta))) \cdot \theta - B^*(\theta)} > 1.$$

Тот факт, что $\omega(f, \delta)$ мажорирует $\text{const} \cdot \Phi(\delta)$ при малых δ , устанавливается точно так же, как при доказательстве теоремы 2. Доказательство закончено.

В заключение благодарю Г. И. Натансона и С. А. Виноградова за полезное обсуждение результатов этой работы.

Ленинградский государственный
университет

Поступило 7.VI.1971

Վ. Պ. ԽԱՎԻՆ. Համալուծ ֆունկցիայի անընդհատության մոդուլի մասին Պրիվալով-Զիգմունդի բեռեմի ընդհանրացումը (ամփոփում)

Ուսումնասիրվում է շրջանում ռեզոլյար և ընդհանուր միջև եղբ. անընդհատ ֆունկցիայի անընդհատության մոդուլի և ֆունկցիայի մոդուլի եղբային արժեքների անընդհատության մոդուլի կապը:

V. P. HAVIN. Generalization of the Privalov-Zygmund theorem on the modulus of continuity of conjugate function (summary)

Let U be the open unit disc on the complex plane, Γ its boundary;

$$\omega(\psi, \delta) = \sup \{ |\psi(e^{i\theta}) - \psi(e^{i\theta'})| : \theta, \theta' \in [0, 2\pi], |\theta - \theta'| \leq \delta \},$$

$$\Omega(\psi, \delta) = \int_0^\delta \frac{\omega(\psi, u)}{u} du + \delta \int_\delta^{2\pi} \frac{\omega(\psi, u)}{u^2} du$$

(ψ is a function defined on Γ); let A be the set of all functions continuous on $U \cup \Gamma$ and analytic on U .

Each function f from A admits canonical factorization (see [3], p. 100):

$$f = B_f Q_f S_f, \quad (*)$$

where Q_f is outer function, B_f is Blaschke product,

$$S_f(z) = \exp \left[- \int \frac{\gamma + z}{\gamma - z} d\mu_f(\gamma) \right] \quad (z \in U)$$

and μ_f is a positive Borel measure on Γ .

Theorem 1. Let the function f belong to A . Suppose that

$$\lim_{z \rightarrow \gamma, z \in N_f} \frac{|z - \gamma|}{1 - |z|} < +\infty \quad (\gamma \in \Gamma), \quad N_f = \{z \in U, f(z) = 0\}.$$

Then

$$\omega(f, \delta) = O(\omega(|f|, \sqrt{\delta}) + \Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \rightarrow +0). \quad (1)$$

If f satisfies the supplementary condition:

μ_f has no point masses

then

$$\omega(f, \delta) = O(\omega(|f|, \beta_f(\delta) \sqrt{\delta}) + \Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \rightarrow +0) \quad (2)$$

where $\beta_f(\delta) = o(1) \quad (\delta \rightarrow +0)$.

The proof of the theorem 1 yields an explicit expression of the function $\beta_f(\delta)$ in terms of the parameters involved in (*). This expression shows that for the nonvanishing in $U \cup \Gamma$ function $f \in A$

$$\beta_f(\delta) = O(\sqrt{\delta}) \quad (\delta \rightarrow +0).$$

That is why the theorem 1 implies the following assertion:

$$f \in A, \min_{\Gamma} |f| > 0 \Rightarrow \omega(f, \delta) = O(\Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \rightarrow +0)$$

which is equivalent to the Privalov-Zygmund theorem:

$$f \in A \Rightarrow \omega(f, \delta) = O(\Omega(Ref, \delta)) \quad (\delta \rightarrow +0).$$

The preciseness of (1) is shown by

Theorem 2. Let φ be a modulus of continuity (i.e. φ is an increasing function defined on $[0, +\infty)$ and such that $\varphi(+0) = 0$,

$$\varphi(\delta_1 + \delta_2) \leq \varphi(\delta_1) + \varphi(\delta_2) \quad (\delta_1, \delta_2 \geq 0)).$$

If $\int_0^1 \varphi(u) u^{-1} du < \infty$, then there exists a function $f \in A$ with

$$\omega(f, \delta) \geq \varphi(\sqrt{\delta}) + \int_0^{\delta} \frac{\varphi(u)}{u} du + \delta \int_{\delta}^1 \frac{\varphi(u)}{u^2} du \quad (0 < \delta < 1) \quad (3)$$

$$\omega(|f|, \delta) = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta \rightarrow +0). \quad (4)$$

The condition (4) and the divergence of the integral $\int_0^1 \varphi(u) u^{-1} du$ are compatible with the arbitrarily slow decreasing of $\omega(f, \delta)$ (even for $f \in A$ without zeros in $U \cup \Gamma$).

The estimate (2) is also exact: the function $\beta_f(\delta)$ in general tends to zero arbitrarily slowly for outer functions $f \in A$ (theorem 3). The condition imposed on the set $f^{-1}(0) \cap U$ in theorem 1 cannot be deleted.

The estimation (1) and its preciseness were established for $f \in A$ with $f^{-1}(0) \cap U = \Lambda$ and $|f| \in \text{Lip}(\alpha, \Gamma)$ ($0 < \alpha < 1$) in a slightly weaker form in [4]. After paper [4] was published L. Carleson communicated to the author that for outer f 's with $|f| \in \text{Lip}(\alpha, \Gamma)$ (1) and its preciseness were proved earlier by him and his student Jacobs. This result of Carleson and Jacobs has not been published.

For outer functions f with $|f| \in \text{Lip}(\alpha, \Gamma)$ (2) implies even $\omega(f, \delta) = o(\delta^{\alpha/2})$ ($\delta \rightarrow +0$).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 1. М., 1965.
2. Н. К. Бари, С. Б. Стечкин. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, Труды Московского мат. о-ва, т. 5, 1956, 483—522.
3. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
4. В. П. Хавин, Ф. А. Шамолян. Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 19, 1970, 237—239.
5. Ф. А. Шамолян. Некоторые проблемы деления в пространствах аналитических функций, Диссертация, ЛГУ, 1970.
6. М. Г. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.
7. Я. А. Геронимус. О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе, Мат. сб., 38, № 3, 1956, 319—330.
8. Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз. Обобщение одной теоремы Харди и Литтльвуда, Мат. сб., 52, № 3, 1960, 891—894.
9. В. П. Хавин. О факторизации аналитических функций, гладких вплоть до границы, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 22, 1971.
10. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.