ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, №№ 2—3, 1971 Математика

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

В. П. ХАВИН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПРИВАЛОВА-ЗИГМУНДА О МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Формулировки результатов

Пусть U—открытый единичный круг на комплексной плоскости, Γ—его граница. Обозначим через A множество всех функций f, непрерывных в $U \cup \Gamma$ и регулярных в U. Символом $\omega(\psi, \delta)$ мы будем обозначать модуль непрерывности функции ψ на единичной окружности Γ: $\omega(\psi, \delta) = \sup\{|\psi(\gamma) - \psi(\gamma e^{ih}) : \gamma \in \Gamma, |h| \leqslant \delta, h \text{ вещественно}\}$. Положим еще

$$\Omega(\psi, \delta) = \int_0^\delta \frac{\omega(\psi, u)}{u} du + \delta \int_\delta^{2\pi} \frac{\omega(\psi, u)}{u^2} du \quad (0 < \delta < 2\pi),$$

Хорошо известно, что если f—функция из A, то

$$\omega(f, \delta) = O(\Omega(\mathrm{Re}\, f, \delta)) \quad (\delta \to 0) \tag{1}$$

(см. [1], стр. 199).

Если $\omega(f, \delta) = O(\delta^\alpha)$, то оценка (1) превращается в известную теорему И. И. Привалова о сопряженных функциях. Точность оценки (1) доказана в работе [2].

Оценку (1) можно записать в следующей равносильной форме: если $f \in A$ и f не имеет нулей в замкнутом круге $U \cup \Gamma$, то

$$\omega(f, \delta) = O(\Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \to 0). \tag{2}$$

В самом деле, множество всех функций из A, не имеющих нулей в $U \cup \Gamma$, совпадают с множеством всех функций вида $\exp \varphi$, где $\varphi \in A$, причем модули непрерывности (на Γ) функций φ и $\exp \varphi$ (соотв. $|\exp \varphi|$ и $\mathrm{Re}\, \varphi$) очень просто связаны друг с другом.

В этой статье будет доказана теорема, обобщающая оценку (2).

Напомним, что всякая функция f класса A представима в виде произведения:

$$f = B_f S_f Q_f,$$

где B_f — функция Бляшке, S_f — внутренняя функция, не имеющая нулей в U, Q_f — внешняя функция* (см. [3], стр. 100). Функция S_f имеет следующий вид:

$$S_f(t) = \exp\left[-\int_\Gamma \frac{\gamma+t}{\gamma-t} d\mu_f(\gamma)\right],$$

где μ_f — неотрицательная борелевская мера на окружности Γ.

Теорема 1. *Пусть f — функция, непрерывная в замкнутом единичном круге $U \cup \Gamma$ и регулярная в U (короче, функция класса A). Предположим, что расположенные в U корни функции f не могут сгущаться к единичной окружности Γ по касательному пути (т. е.*

$$\overline{\lim_{z\to\gamma,\, z\to N_f}} \frac{|z-\gamma|}{1-|z|} < +\infty \ (\gamma \in \Gamma), \quad N_f = \{z \in U: f(z) = 0\}).$$

Тогда

$$\omega(f, \delta) = O(\omega(|f|, \sqrt{\delta}) + \Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \to 0). \tag{3}$$

Если мера μ_f не содержит точечных нагрузок (т. е. $\mu_f(\{\gamma\}) = 0$, какова бы ни была точка $\gamma \in \Gamma$), то

$$\omega(f, \delta) = O(\omega(|f|, \beta_f(\delta)\sqrt{\delta}) + \Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \to 0), \tag{3'}$$

где $\beta_f(\delta) = o(1)$ $(\delta \to 0)$.

Мы не будем приводить явного выражения функции β_f, хотя доказательство теоремы 1 в принципе позволяет это сделать. Грубо говоря, $\beta_f(\delta)$ стремится к нулю тем быстрее, чем меньше нулей имеет функция f в замкнутом круге $U \cup \Gamma$. Если f вообще не имеет нулей в $U \cup \Gamma$, то в качестве $\beta_f(\delta)$ можно взять $\sqrt{\delta}$, и тогда утверждение теоремы 1 совпадает с (2) и, в конечном счете, с (1). В общем случае малости $\beta_f(\delta)$ благоприятствует малость следующих величин:

σ — мера Лебега на Γ

$$\sup\left\{\int_B |\log|f||\, d\sigma;\ B \subset \Gamma,\ \sigma(B) \leqslant \delta\right\}$$

(модуль „абсолютной непрерывности“ интеграла $\int |\log|f||\, d\sigma$);

$$\sup\{\mu_f(B): B \subset \Gamma,\ \operatorname{diam} B \leqslant \delta\},$$

---

* Внешней называют регулярную в U функцию Q, логарифм модуля которой представим в U интегралом Пуассона:

$$\log|Q(t)| = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) \frac{1-|t|^2}{|e^{i\theta}-t|^2} d\theta \ (t \in U),$$

где $\psi \in L^1([-\pi, \pi])$.

и

$$\min\left\{n:\ n \text{ — натуральное, } \sum_{k>n}(1-|t_k|)\leqslant\delta\right\},$$

где $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность корней функции f, расположенных в U и занумерованных так, что $|t_{k+1}|\geqslant|t_k|$, $k=1, 2, \cdots$.

Оценка (3) точна в следующем смысле: *если ω—какой-нибудь модуль непрерывности, для которого соответствующая функция Ω конечна*, то существует функция $f\in A$, не имеющая корней в U и такая, что*

$$\varlimsup_{\delta\to 0}\omega(f,\delta)\left[\omega(\sqrt{\delta})+\int_0^{\delta}\frac{\omega(u)}{u}\,du+\delta\int_{\delta}^{1}\frac{\omega(u)}{u^2}\,du\right]^{-1}>0,$$

$\omega(|f|,\delta)=O(\omega(\delta))$ $(\delta\to 0)$ (см. ниже теорему 2).

Отметим еще, что если f—внешняя функция из A, то $\beta_f(\delta)$ стремится к нулю, вообще говоря, сколь угодно медленно (теорема 3).

Условие, которому в теореме 1 подчинены корни функции f, расположенные в U, не может быть отброшено. Действительно, нетрудно построить внешнюю функцию Q с бесконечнодифференцируемым вдоль Γ модулем и произведение Бляшке B, нули которого сгущаются к Γ по должным образом выбранному касательному пути так, что функция QB будет принадлежать классу A, но ее модуль непрерывности в $U\cup\Gamma$ стремится к нулю сколь угодно медленно (этого можно добиться, достаточно тесно придвигая корни функции B к окружности Γ). Из результатов работ [7], [8] следует, что и модуль непрерывности $\omega(Q\mathrm{B},\delta)$ также можно сделать сколь угодно медленно убывающим (хотя $|Q\mathrm{B}|\equiv|Q|$ на Γ и потому $|Q\mathrm{B}|\in C^{\infty}(\Gamma)$).

Из теоремы 1 легко вывести такое

Следствие. *Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 1, а $|f|$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha\in(0, 1]$ на Γ, то f удовлетворяет условию Липшица порядка $\frac{\alpha}{2}$ в $U\cup\Gamma$. Показатель $\frac{\alpha}{2}$ в этом утверждении нельзя увеличить.*

В несколько менее общем виде утверждение следствия было сформулировано в заметке [4]. В [5] изложено доказательство этого результата, основанное на теореме Харди-Литтльвуда ([6], стр. 397). Это доказательство можно обобщить на модули непрерывности, удовлетворяющие условиям (B) и (B_1) статьи [2], если воспользоваться результатами работ [7] и [8]. В общем случае приходится непосредственно оценивать значения функции f на Γ и работать с соответ-

---

* Если $\Omega(\delta)\equiv+\infty$, то можно легко построить функции $f\in A$, не имеющие нулей в $U\cup\Gamma$ и такие, что $\omega(|f|,\delta)=O(\omega(\delta))$ $(\delta\to+0)$, а $\omega(f,\delta)$ стремится к нулю сколь угодно медленно (см. [2]).

ствующими сингулярными интегралами, как это и сделано ниже при доказательстве теоремы 1.

После того, как заметка [4] была опубликована, Л. Карлесон сообщил мне, что утверждение следствия было доказано четырьмя годами ранее им и его учеником Джекобсом (Jacobs) для внешних функций f (отметим, что на самом деле, как видно из теоремы 1, $\omega(f, \delta) = o\,(\delta^{\alpha/2})$ $(\delta \to 0)$, если f — внешняя и $|f| \in \operatorname{Lip}(\alpha, \Gamma)$). Этот результат не публиковался. Кроме того, Карлесон сообщил, что утверждение, аналогичное следствию, справедливо и при

$$\alpha > 1 \ (f \in \operatorname{Lip}\alpha \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f^{[\alpha]} \in \operatorname{Lip}(\alpha - [\alpha]),\ [\alpha] < \alpha).$$

Результаты настоящей работы были анонсированы в заметке [9].

Перечислим в заключение этого параграфа свойства модулей непрерывности, которыми мы будем пользоваться.

1. *Если f—функция, непрерывная на Γ, то*

$$0 < \delta_1 < \delta_2 \Rightarrow \frac{\omega(f, \delta_2)}{\delta_2} \leqslant 2\,\frac{\omega(f, \delta_1)}{\delta_1} \quad ([10], \text{ стр. } 111).$$

2. *Если f отлична от постоянной, то*

$$\varliminf_{\delta \to +0} \frac{\omega(f, \delta)}{\delta} > 0 \qquad ([10], \text{ стр. } 111).$$

3. $\omega(f, C\delta) \leqslant 2C\omega(f, \delta)$, *каковы бы ни были числа* $C > 0$ и $\delta > 0$.

4. $\omega(f, \delta) \leqslant c\Omega(f, \delta)$, *где c—абсолютная постоянная, а δ—любое положительное число, меньшее* 2π.

В самом деле

$$\Omega(f, \delta) \geqslant \int_{\delta/2}^{\delta} \frac{\omega(f, u)}{u}\, du \geqslant \omega(f, \delta/2)\cdot \log 2 \geqslant \frac{\log 2}{2}\, \omega(f, \delta).$$

5. *Для любой функции f, непрерывной на Γ, существует непрерывно дифференцируемая на открытой полуоси* $(0, +\infty)$ *возрастающая функция φ такая, что*

$$\frac{1}{4}\,\omega(f, \delta) \leqslant \varphi(\delta) \leqslant \omega(f, \delta) \ \textit{при любом положительном } \delta,$$

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \ \textit{убывает с возрастанием } \delta.$$

Доказательство. Сначала построим непрерывную и возрастающую на полуоси $(0, +\infty)$ функцию φ_1 такую, что

$$\frac{1}{2}\,\omega(f, \delta) \leqslant \varphi_1(\delta) \leqslant \omega(f, \delta) \qquad (\delta > 0),$$

$$\frac{\varphi_1(\delta)}{\delta} \ \text{убывает с возрастанием } \delta$$

$(\varphi_1(\delta) = \delta \inf\left\{\frac{\omega(f, u)}{u}: 0 < u \leqslant \delta\right\}$; [10], стр. 112). Затем положим

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \varphi_1(t)\, dt \quad (\delta > 0).$$

Имеем

$$\varphi(\delta) \leqslant \varphi_1(\delta), \ \varphi(\delta) = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta t\frac{\varphi_1(t)}{t}\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\delta}\cdot\frac{\varphi_1(\delta)}{\delta}\cdot\frac{\delta^2}{2} = \frac{\varphi_1(\delta)}{2}; \quad \frac{d}{d\delta}\left[\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\right] = \frac{\varphi'(\delta)}{\delta} - \frac{\varphi(\delta)}{\delta^2} =$$

$$= \frac{\varphi_1(\delta)}{\delta^2} - 2\frac{1}{\delta^3}\int_0^\delta \varphi_1(t)\, dt = \frac{1}{\delta^2}[\varphi_1(\delta) - 2\varphi(\delta)] \leqslant 0.$$

§ 2. Вспомогательные сведения о функциях класса A

Меру Лебега на единичной окружности Γ мы будем обозначать буквой σ. Мы будем считать меру σ нормированной: $\sigma(\Gamma) = 1$. Вместо $\int_\Gamma f\, d\sigma$ мы будем часто писать $\int f\, d\sigma$. Нам потребуется ядро Шварца

$$S: \ S_t(\gamma) = (\gamma + t)(\gamma - t)^{-1} \quad (\gamma \in \Gamma, \ t \in U).$$

Из следующих трех лемм две первые хорошо известны (см., напр., [3], гл. V, VI).

Лемма 1. *Пусть f—функция класса A, не все значения которой равны нулю. Тогда существуют вещественное число c, неотрицательное целое число m, неотрицательная борелевская мера μ на Γ и (конечная или бесконечная) последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек круга U такие, что при всех $t \in U$ справедливо равенство*

$$f(t) = t^m \prod_{k=1}^{\infty} \frac{t - t_k}{1 - \bar{t}_k t}\,\frac{\bar{t}_k}{t_k} \exp\left[\int \log|f| \cdot S_t\, d\sigma - \int S_t\, d\mu + ic\right], \tag{4}$$

$$|t_k| \leqslant |t_{k+1}| \quad \text{при всех } k,$$

$$\sum_k (1 - |t_k|) < +\infty,$$

носитель меры μ содержится в множестве нулей функции f и содержит все предельные точки последовательности $\{t_k\}$.

Отметим еще, что в условиях леммы 1 $\int \log|f|\, d\sigma > -\infty$.

Лемма 2. *Пусть w — неотрицательная функция, заданная и непрерывная на Γ. Если*

$$\int \log w\, d\sigma > -\infty,$$

то функция f, заданная в U равенством

$$f(t) = \exp \int \log w \cdot S_t\, d\sigma, \tag{5}$$

обладает следующими свойствами: f ограничена и регулярна в U; функция $|f|$ равномерно непрерывна в U; ее непрерывное продолжение на окружность Γ совпадает с w.

Доказательство немедленно следует из известных свойств ядра Пуассона $\operatorname{Re} S_t$.

Лемма 3. *Пусть g—функция класса A, не имеющая нулей в U. Предположим, что*

$$|g(t)| \leqslant 1 \quad (t \in U).$$

Тогда существует положительное число M_g, обладающее следующим свойством:

при любом положительном a, меньшем единицы, функция g представима в U в виде

$$g = \varphi_a \Phi_a, \tag{6}$$

где Φ_a — функция, регулярная в U и такая, что функция $|\Phi_a|$ непрерывно продолжима на весь замкнутый круг $U \cup \Gamma$;

$$a \leqslant |\Phi_a(t)| \leqslant 1 \quad (t \in U \cup \Gamma), \tag{7}$$

$$\big|\,|\Phi_a(\gamma')| - |\Phi_a(\gamma'')|\,\big| \leqslant \big|\,|g(\gamma')| - |g(\gamma'')|\,\big| \quad (\gamma', \gamma'' \in \Gamma), \tag{8}$$

$$\varphi_a(t) = \exp\left[-\int S_t\, d\lambda_a + ic\right] \quad (t \in U), \tag{9}$$

где λ_a — неотрицательная борелевская мера на Γ с носителем в множестве

$$\Gamma^a = \{\gamma \in \Gamma :\ |g(\gamma)| \leqslant a\}; \tag{10}$$

при всех γ из этого множества $|\Phi_a(\gamma)| = a$,

$$\lambda_a(\Gamma) \leqslant M_g, \tag{11}$$

а c—вещественное число.

Подчеркнем, что константа M_g не зависит от a.

Из доказательства будет видно, что функция Φ_a представима по формуле (5) с $w = \log|\Phi_a|$ (т. е. Φ_a—внешняя) и что

$$\sup \left\{ \int |\log|\Phi_a||\, d\sigma :\ 0 < a < 1 \right\} < +\infty.$$

Полезно отметить также, что при всех $a \in (0, 1)$

$$|\varphi_a(t)| \leqslant 1 \quad (t \in U). \tag{12}$$

Доказательство леммы 3. Положим $H_a = \min(|g|, a)$, $h_a = |g| \cdot H_a^{-1}$, так что $|g| = H_a h_a$. В качестве Φ_a возьмем теперь функцию, определяемую равенством (5) с $w = H_a$. Из (4) следует (6). Значение меры λ_a на любом борелевском подмножестве B окружности Γ равно

$$-\int\limits_{B^a} \log \frac{|g|}{a}\, d\sigma + \mu(B), \text{ где } B^a = \{\gamma \in B\colon |g(\gamma)| \leqslant a\}.$$

Утверждения (7) и (8) следуют теперь из леммы 2, в силу которой $|\Phi_a(\gamma)| = H_a(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$.

Осталось оценить $\lambda_a(\Gamma)$. Ясно, что

$$\lambda_a(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma^a} \left|\log \frac{|g|}{a}\right| d\sigma + \mu(\Gamma) \leqslant \int\limits_{\Gamma^a} |\log|g||\, d\sigma + |\log a|\, \sigma(\Gamma^a) + \mu(\Gamma). \tag{13}$$

Интеграл $\int |\log|g||\, d\sigma$ конечен. Поэтому

$$\sup_{A>0} A \cdot \sigma\{\gamma \in \Gamma\colon |\log|g|| \geqslant A\} < +\infty.$$

Но при

$$a \in (0, 1)\ \ \Gamma^a = \{\gamma \in \Gamma\colon |\log|g|| \geqslant |\log a|\}.$$

Поэтому произведение $|\log a| \cdot \sigma(\Gamma^a)$ при всех $a \in (0, 1)$ не превосходит числа, зависящего лишь от f. Лемма доказана.

Замечание. Предположим, что функция f, о которой говорится в лемме 3 — внешняя (т. е., что $\mu = 0$). Тогда можно утверждать, что

$$\lim_{a \to 0} \lambda_a(\Gamma) = 0. \tag{14}$$

Для доказательства свяжем с функцией g „модуль абсолютной непрерывности“ функции $\log|g|$:

$$\mathrm{A}(g, \delta) = \sup\left\{\int\limits_E |\log|g||\, d\sigma\colon E \subset \Gamma, \sigma(E) \leqslant \delta\right\}. \tag{15}$$

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma^a} \left|\log \frac{|g|}{a}\right| d\sigma = -\int\limits_{\Gamma^a} \log|g|\, d\sigma - \log a \cdot \sigma(\Gamma^a) \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathrm{A}(g, \sigma(\Gamma^a)),$$

так что

$$\lambda_a(\Gamma) \leqslant 2\mathrm{A}(g, \sigma(\Gamma^a)) + \mu(\Gamma), \tag{16}$$

откуда и следует (14) для внешней функции g.

(Продолжение в следующем номере журнала)