ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, №№ 2—3, 1971 Математика

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

В. А. ЯВРЯН

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

В настоящей заметке изучается функция спектрального сдвига (ф.с.с.) двух самосопряженных операторов Штурма-Лиувилля с различными условиями на одном конце. Получены формулы, связывающие ф.с.с. со спектральной функцией. Эти формулы позволяют решить обратную задачу: восстановить потенциал по ф.с.с.

Пусть $q(x)$ $(0<x<b)$ вещественная функция, суммируемая на каждом интервале $(0, c)$ при $c<b\leqslant\infty$, а h—произвольное вещественное число. Рассмотрим в пространстве $L_2(0, b)$ самосопряженный оператор H_h, задаваемый равенством

$$H_h y = -y'' + q(x)y$$

и граничным условием

$$y'(0) - hy(0) = 0.$$

Точнее, оператор H_h является замыканием оператора, действующего на финитных функциях. Если при этом оператор H_h не оказывается самосопряженным, то мы накладываем для всех h одно и то же условие самосопряженности в точке b.

Таким образом, операторы H_h при различных h будут отличаться только условием в нуле. Отсюда следует, что разность резольвент соответствующих операторов будет одномерным оператором.

В работах М. Г. Крейна ([1], [2]) установлено, что если резольвенты самосопряженных операторов A и B отличаются на ядерный оператор, то существует вещественная функция $\xi(\lambda, A, B)$ $(-\infty<\lambda<<\infty)$ такая, что

$$\mathrm{Sp}\,\{(B-zI)^{-1}-(A-zI)^{-1}\} = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(\lambda, A, B)}{(\lambda-z)^2}\,d\lambda \tag{1}$$

для всех z, не принадлежащих спектрам A и B.

Из (1) функция $\xi(\lambda, A, B)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого. Следуя [2], эту функцию $\xi(\lambda, A, B)$ назовем функцией спектрального сдвига (ф.с.с.) для операторов A и B.

Таким образом, для операторов H_{h_1} и H_{h_2} имеет смысл ф.с.с. $\xi(\lambda, h_1, h_2)$, которую мы нормируем условием

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi(\lambda, h_1, h_2)|}{1+|\lambda|}\,d\lambda<\infty.$$

Напомним теперь определение спектральной функции оператора H_h.

Пусть функции $\psi_h(x, \lambda)$ и $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$-y'' + q(x)\, y - \lambda y = 0$$

и условиям

$$\psi_h(0, \lambda) = 1,\ \psi_h'(0, \lambda) = h;\ \varphi(0, \lambda) = 0,\ \varphi'(0, \lambda) = 1.$$

Хорошо известна теорема о том, что существует неубывающая функция $\sigma_h(\lambda)$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2\, d\sigma_h(\lambda) = \int_0^{\infty} |f(x)|^2\, dx,$$

где $F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\, \psi_h(x, \lambda)\, dx.$

Эта функция $\sigma_h(\lambda)$ (нормированная условием $\sigma_h(-\infty) = 0$) называется спектральной функцией оператора H_h.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Имеют место формулы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t, h_1, h_2)}{t - \lambda}\, dt = \ln\left(1 + (h_2 - h_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{h_1}(t)}{t - \lambda}\right), \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t, h_1, h_2)\, dt = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_h(\lambda)\, dh. \tag{3}$$

При $h_1 = 0$ формулу (2) сообщил автору М. Г. Крейн.

Доказательство. Составим функцию

$$\chi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + m_{h_1}(\lambda)\, \psi_{h_1}(x, \lambda),$$

где $m_{h_1}(\lambda)$ выбрана так, что $\chi(x, \lambda)$ удовлетворяет требуемому граничному условию в b в случае круга Вейля или $\chi(x, \lambda) \in L_2(0, b)$ — в случае точки Вейля (т. е. когда операторы H_h самосопряженны). Тогда ядро резольвенты оператора H_h для невещественных λ будет задаваться формулой

$$R_\lambda(x, s, H_h) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{1 + (h - h_1)\, m_{h_1}(\lambda)}\, \psi_h(x, \lambda)\left(\varphi(s, \lambda) + m_{h_1}(\lambda)\, \psi_{h_1}(s, \lambda)\right) & \text{при } x \leqslant s \\[2ex] -\dfrac{1}{1 + (h - h_1)\, m_{h_1}(\lambda)}\, \psi_h(s, \lambda)\left(\varphi(x, \lambda) + m_{h_1}(\lambda)\, \psi_{h_1}(x, \lambda)\right) & \text{при } x > s. \end{cases}$$

Отсюда без труда получаем

$$\operatorname{Sp}\{R_\lambda(H_{h_2})-R_\lambda(H_{h_1})\}=\frac{h_2-h_1}{1-(h_2-h_1)\,m_{h_1}(\lambda)}\int\limits_0^\infty \chi^2(x,\lambda)\,dx. \tag{4}$$

Вычислим последний интеграл. Легко видеть, что

$$(\lambda-\mu)\int\limits_0^\infty \chi(x,\lambda)\,\chi(x,\mu)\,dx=m_{h_1}(\lambda)-m_{h_1}(\mu),$$

откуда

$$\int\limits_0^\infty \chi^2(x,\lambda)\,dx=-\frac{d}{d\lambda}m_{h_1}(\lambda).$$

Подставляя это значение в (4), получаем

$$\operatorname{Sp}(R_\lambda(H_{h_2})-R_\lambda(H_{h_1}))=-\frac{d}{d\lambda}\ln(1-(h_2-h_1)\,m_{h_1}(\lambda)). \tag{5}$$

Сопоставляя (1) с (5) и используя то, что $m_h(iy)\to 0$ при $y\to+\infty$ [3], окончательно получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(t,h_1,h_2)}{t-\lambda}\,dt=\ln(1-(h_2-h_1)\,m_{h_1}(\lambda)).$$

Для доказательства формулы (2) остается заметить [3], что

$$m_{h_1}(\lambda)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_{h_1}(t)}{t-\lambda}.$$

Перейдем к доказательству формулы (3).

Для этого разделим интервал $[h_1, h_2]$ на n равных частей и обозначим $\Delta h=\frac{h_2-h_1}{n}$, $p_k=h_1+\frac{(h_2-h_1)\,k}{n}$ $(k=0, 1, 2,\cdots, n-1)$. Согласно (2) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(t,p_k,p_{k+1})}{t-\lambda}\,dt=\ln\left(1+\Delta h\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_{p_k}(t)}{t-\lambda}\right)\quad(k=0, 1, 2,\cdots, n-1).$$

Теперь заметим, что для любых h_1, h_2, h_3 ф.с.с. обладает свойством

$$\xi(t,h_1,h_2)=\xi(t,h_1,h_3)+\xi(t,h_3,h_2).$$

Имея это в виду и складывая предыдущие равенства, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(t,h_1,h_2)}{t-\lambda}\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\Delta h\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_{p_k}(t)}{t-\lambda}\right).$$

С другой стороны, легко видеть, что при $n\to\infty$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \Delta h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{p_k}(t)}{t-\lambda}\right) \to \int_{h_1}^{h_2} dh \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_h(t)}{t-\lambda}.$$

Итак, получена формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t, h_1, h_2)}{t-\lambda} dt = \int_{h_1}^{h_2} dh \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_h(t)}{t-\lambda}.$$

Отсюда, пользуясь теоремами Хелли и формулой обращения Стильтьеса, заключаем, что $\sigma_h(\lambda)$ при любом λ интегрируема по Риману и что во втором интеграле можно менять порядок интегрирования, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t, h_1, h_2)}{t-\lambda} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\lambda} d\left(\int_{h_1}^{h_2} \sigma_h(t)\, dh\right).$$

Применяя еще раз формулу обращения, получаем (3).

Отметим, что в том случае, когда оператор H_h регулярен или имеет дискретный спектр, формула (2) совпадает с формулами (2.1.14) и (3.2.17) из работы [4] Б. М. Левитана и М. Г. Гасымова.

В случае, когда оператор H_h рассматривается на полупрямой (т. е. $b=\infty$), пользуясь известной асимптотикой ([5], [6]) для спектральной функции (эта асимптотика равномерна относительно h из конечного интервала) и (3), приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Имеет место формула*

$$\int_{-\infty}^{0} \xi(t, h_1, h_2)\, dt + \int_{0}^{\infty} \left(\xi(t, h_1, h_2) - \frac{1}{\pi\sqrt{t}}(h_2 - h_1)\right) dt = -\frac{h_2^2 - h_1^2}{2}. \quad (6)$$

Для любого $a>0$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{a\sqrt{|t|}} |\xi(t, h_1, h_2)|\, dt < +\infty.$$

Теоремы 1 и 2 приведены без доказательства в работе автора [7]. Отметим, что (6) есть обобщение формулы Б. М. Левитана и М. Г. Гасымова [4] о сумме разностей собственных значений операторов H_{h_1} и H_{h_2}.

Из того, что резольвенты операторов H_{h_1} и H_{h_2} отличаются на одномерный оператор, следует, что $0 \leqslant \xi(t, h_1, h_2) \leqslant 1$ при $h_1 < h_2$. Это видно также из (2).

Пусть известно, что функция $\xi(t)$ $(0 \leqslant \xi(t) \leqslant 1)$ есть ф.с.с. для некоторых операторов H_{h_1} и H_{h_2}. Тогда из формулы (6) находим числа h_1 и h_2, после чего из (2) определяем спектральную функцию $\sigma_{h_1}(\lambda)$.

Таким образом, задача восстановления потенциала $q(x)$ по функции спектрального сдвига сводится к задаче восстановления потенциала по спектральной функции. Эта последняя задача, как хорошо известно, решена в работе И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [8].

Теорема 3. *Если $\xi(t, h_1, h_2)$ есть функция спектрального сдвига для операторов H_{h_1} и H_{h_2}, то функция*

$$\frac{1}{h_2-h_1}\int_{-\infty}^{\lambda}\xi(t, h_1, h_2)\,dt$$

будет спектральной функцией некоторого оператора Штурма-Лиувилля с локально суммируемым потенциалом.

Согласно (3) нужно проверить, что $\frac{1}{h_2-h_1}\int_{h_1}^{h_2}\sigma_h(\lambda)\,dh$ есть спектральная функция. Как известно, в работах [8] и [9] установлен критерий того, чтобы наперед заданная возрастающая функция была спектральной функцией для некоторого оператора Штурма-Лиувилля. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\Phi_h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}x}{\lambda}\,d\sigma_h(\lambda),\quad 0\leqslant x<\infty$$

имела две абсолютно непрерывные производные и $\Phi_h'(0)=1$, $\Phi_h''(0)=h$.

Пользуясь тем, что $\Phi_h''(0)=H_h(x, 0)$, где $H_h(x, t)$ есть ядро оператора преобразования (см., напр., [4]), легко видеть, что вышеуказанным свойством обладает функция

$$\frac{1}{h_2-h_1}\int_{h_1}^{h_2}\Phi_h(x)\,dh=\frac{1}{h_2-h_1}\int_{h_1}^{h_2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}x}{\lambda}\,d\left(\int_{h_1}^{h_2}\sigma_h(\lambda)\,dh\right).$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда оператор H_h имеет полуограниченный дискретный спектр

$$\lambda_1(h)<\lambda_2(h)<\cdots<\lambda_n(h)<\cdots,\quad \lambda_n(h)\to\infty\quad \text{при } n\to\infty.$$

Тогда $(h_1<h_2)$

$$\xi(\lambda, h_1, h_2)=\begin{cases}1, & \lambda_n(h_1)<\lambda<\lambda_n(h_2)\\ 0, & \lambda_n(h_2)<\lambda<\lambda_{n+1}(h_1).\end{cases}$$

В этом случае задание $\xi(\lambda, h_1, h_2)$ равносильно заданию спектров операторов H_{h_1} и H_{h_2}.

Применив теорему 3, получаем, что функция

$$\frac{1}{h_2-h_1}\int_{-\infty}^{\lambda}\xi(t, h_1, h_2)\,dt=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{h_2-h_1}\displaystyle\sum_{\lambda_k(h_1)<\lambda}(\lambda_k(h_2)-\lambda_k(h_1))+\dfrac{\lambda-\lambda_n(h_1)}{h_2-h_1} & \text{при } \lambda_n(h_1)<\lambda<\lambda_n(h_2)\\[2ex] \dfrac{1}{h_2-h_1}\displaystyle\sum_{\lambda_k(h_1)<\lambda}(\lambda_k(h_2)-\lambda_k(h_1)) & \text{при } \lambda_n(h_2)<\lambda<\lambda_{n+1}(h_1)\end{cases}$$

будет спектральной функцией некоторого оператора Штурма-Лиувилля.

Отметим, что предположение, близкое к последнему утверждению, содержится в работе [4].

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ. Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորների վերաբերյալ մի հակադարձ խնդրի մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում հետազոտվում է տարբեր եզրային պայմաններով տված երկու Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորների սպեկտրալ տեղաշարժի ֆունկցիան։ Ստացված են բանաձևեր, որոնք կապում են այդ ֆունկցիան սպեկտրալ ֆունկցիայի հետ։ Այդ բանաձևերը հնարավորություն են տալիս տված սպեկտրալ տեղաշարժի ֆունկցիայի միջոցով վերականգնել օպերատորը։

V. A. JAVRIAN. *On an inverse problem for Sturm-Liuville operators* (summary)

The function of spectral shift (f.s.s) of two selfadjoined Sturm-Liuville operators with differring conditions on one end are investigated. Formulas, connecting f.s.s. with spectral function are obtained, wich give the solution of inverse problem, i. e. the problem of reconstrution of potential in terms of f.s.s.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн.* О формуле следов в теории возмущений, Мат. сб., 33 (75), 1953, 597—626.
2. *М. Г. Крейн.* Об определителях возмущения и формуле следов унитарных и самосопряженных операторов, ДАН СССР, 144, № 2, 1962, 268—271.
3. *В. А. Марченко.* Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка, Матем. сб., 52 (94), № 2, 1960, 739—788.
4. *Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов.* Определение дифференциального уравнения по двум спектрам, УМН, XIX, вып. 2 (116), 1964, 3—63.
5. *Б. М. Левитан.* Об асимптотическом поведении спектральной функции, и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 1955, 33—58.
6. *В. А. Марченко.* Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 1955, 381—422.
7. *В. А. Яврян.* О регуляризованном следе разности двух сингулярных операторов Штурма-Лиувилля, ДАН СССР, 169, № 1, 1966, 49—51.
8. *И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан.* Об определении дифференциального уравнения по спектральной функции, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 1951, 309—360.
9. *М. Г. Крейн.* О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка, ДАН СССР, 88, № 3, 1953, 405—408.