ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, №№ 2—3, 1971 Математика

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

А. А. ШАГИНЯН

О ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ И ГРАДИЕНТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ. II

В работе [1] нами было выяснено, какими максимальными особенностями в терминах криволинейных предельных множеств могут обладать гармонические в шаре функции у граничной сферы.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для гармонических отображений (каждая компонента которых гармоническая функция) и отображений, осуществляемых градиентами гармонических в шаре функций.

Пусть S — сфера радиуса единица в трехмерном евклидовом пространстве R^3.

Определение 1. Отображение f: int $S \to R^n$ единичного открытого шара в n-мерное евклидово пространство называется гармоническим,* если реализующие его функции $f_i(P)$ $(f(P) = (f_1(P), \cdots, f_n(P))$ являются гармоническими.

Определение 2. Предельным множеством $C_l(f)$ отображения f: int $S \to R^n$ по пути l, лежащему в int S, кроме конечной точки, совпадающей с $a \in S$, называется совокупность $\{\alpha\}$ всех точек из R^n, для которых существует последовательность $a_i \in l$, стремящаяся к a и такая, что $f(a_i)$ стремится к α.

Полное решение задачи о том, какими максимальными особенностями в терминах криволинейных предельных множеств могут обладать гармонические отображения шара, дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Существует гармоническое отображение* H: int $S \to R^n$ *такое, что для любой точки* $a \in S$ *и любого континуума* $k \subset \overline{R}^n$ *(одноточечной компактификации* R^n*) при* $n \geq 2$ *и* $k \subset R^1$ *при* $n = 1$ *существует спрямляемый путь* $l_{a,k}$*, лежащий в* int S*, кроме конечной точки, совпадающей с* a *и ортогональный к* S *в этой точке, вдоль которого* $C_{l_{a,k}}(H) = k \cap R^n$.

Замечание 1. Теорему 1 нельзя усилить, беря более широкий класс множеств вместо $\{k \cap R^n\}$.

Замечание 2. Теорема 1 содержит в себе результаты Г. Пиранян [2] и Ф. Багемила [3], а также работы [1].

Замечание 3. Аналог теоремы 1 для круга на плоскости не имеет места в силу результата Ф. Багемила [4].

---

* Символ int F обозначает область, ограниченную поверхностью F.

Теорема 1' легко получается при помощи теоремы 2 из работы [5], в которой получено полное решение задачи о характеристике множеств, на которых возможна гармоническая аппроксимация с касанием.

Полное решение аналогичной задачи для отображений шара в R^3, осуществляемых градиентами гармонических функций, дается теоремой 2°.

Теорема 2. *Существует гармоническая в шаре* $\operatorname{int} S$ *функция* F *такая, что соответствующее градиентное отображение* $\operatorname{grad} F : \operatorname{int} S \to R^3$ *обладает следующим свойством: для любой точки* $a \in S$ *и любого континуума* $k \subset \overline{R}^3$ *существует спрямляемый путь* $l_{a,k}$, *лежащий в* $\operatorname{int} S$, *кроме конечной точки, совпадающей с* a, *ортогональный к* S *в этой точке, вдоль которого* $C_{l_{a,k}}(\operatorname{grad} F) = k \cap R^3$.

Замечание 4. Теорему 2 нельзя усилить, беря более широкий класс множеств вместо $\{k \cap R^3\}$.

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями работы [1].

В [1] были построены древообразное множество L и система точек $a^{n, i_n^1, i_n^2}_{k^1,\dots,k^n}$ на нем.

Построим отображение $f : L \to R^n$ следующим образом. Положим $f : a^{n, i_n^1, i_n^2}_{k^1,\dots,k^n} \to p_{i_n^1}$, где p_k—k-я точка с рациональными координатами при некоторой нумерации всех таких точек из R^n. Продолжим эти значения f на все L так, чтобы на ветви L, соединяющей $a^{n-1, i_{n-1}^1, i_{n-1}^2}_{k^1,\dots,k^{n-1}}$ и $a^{n, i_n^1, i_n^2}_{k^1,\dots,k^n}$, f интерполировало значения $p_{i_{n-1}^1}$ и $p_{i_n^1}$ в этих точках, изменяясь линейно на радиальной части этой ветви, лежащей выше соответствующего сферического слоя ветвления, и оставаясь постоянным на нижних частях, перпендикулярных радиусу и ниже до S_{n-1}.

Покажем теперь, что отображение $f : L \to R^n$ обладает у S асимптотическими свойствами искомого гармонического отображения H: для всякой точки $a \in S$ и континуума $k \subset \overline{R}^n$ при $n > 2$ и $k \subset R^1$ при $n=1$ существует путь $l_{a,k}$, составленный из ветвей L и такой, что $C_{l_{a,k}}(f) = k \cap R^n$.

Для выбора путей $l_{a,k}$ нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Всякий континуум* $k \subset \overline{R}^n$ *при* $n > 2$ *и* $k \subset R^1$ *при* $n=1$ *является предельным множеством некоторого пути* $l_k : [0, 1) \to R^n$.

Лемма 2. *Всякий путь* $l_k : [0, 1) \to R^n$ *можно приблизить с касанием ломаным путем* $\overline{l}_k : [0, 1) \to R^n$ *с рациональными вершинами.*

Обозначим вершины $\overline{l}_k$ через $\overline{l}_k^i$. Выбор пути $l_{a,k}$ производится следующим образом: проектируем точку a на S и выбираем точку $a^{3,(i_3^0)}_{k_0^1, k_0^2, k_0^3}$ из $N^3_{k_0^1, k_0^2, k_0^3}$, содержащего эту проекцию, в которой f наиболее близко к $\overline{l}^1_k$. Чтобы получить точку $a^{4,(j^0_4)}_{k^1_0,\dots,k^4_0}$, проектируем a на S_4 и выбираем точку из квадрата $N^1_{k^1_0,\dots,k^4_0}$, содержащего эту проекцию, значение f в которой наиболее близко к $\overline{l}^2_k$.

Точки $l_{a,k}\cap S_n$ получаются аналогичным образом: индексы $k^1_0,\dots,k^n_0$ определяют квадрат $N^n_{k^s_0,\dots,k^n_0}$, в который попадает радиальная проекция a, индекс (j^0_n) определяет точку $a^{n,(j^0_n)}_{k^s_0,\dots,k^n_0}$, значение f в которой наиболее близко к $\overline{l}^n_k$. Окончательно, путь $l_{a,k}$ это ветвь L, проходящая через эти точки $a^{n,(j^0_n)}_{k^1_0,\dots,k^n_0}$. Сравнение размеров квадрата первого ранга на S_n с расстоянием от S_n до S показывает, что $l_{a,k}$ перпендикулярен к S в точке a. Обозначим через f_i компоненты отображения f.

В теореме 2 работы [5] нами были получены необходимые и достаточные условия для возможности гармонической аппроксимации с касанием. Очевидно, что все условия этой теоремы для возможности аппроксимации с касанием непрерывных на L функций гармоническими в шаре $\operatorname{int} S$ функциями удовлетворяются.

Обозначим через $H:\operatorname{int} S\to R^n$ гармоническое отображение, каждая компонента которого приближает с касанием соответствующую функцию f_i на L. Отображение H приближает с касанием отображение f и, следовательно, удовлетворяет условиям теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Очевидно, что для доказательства этой теоремы достаточно аппроксимировать с касанием отображение $f: L\to R^3$, построенное выше, градиентом гармонической в $\operatorname{int} S$ функции. Существенно не изменяя L, мы будем считать в дальнейшем, что он состоит из прямолинейных отрезков.

Смысл дальнейшего построения заключается в том, чтобы строить локально гармонические функции, градиенты которых приближают отображение f, и склеить их.

Обозначим через Ц сглаженный цилиндр постоянной конечной высоты и переменной толщины h; $Ц_1,\dots,Ц_6$—равноудаленные сечения $Ц: L_ц$—ось Ц; $Ц_{1,2},\dots,Ц_{5,6}$—подцилиндры Ц, ограниченные этими сечениями. Пусть дано гладкое отображение $g_ц$: $\operatorname{int} Ц_{1,2}\cup L_ц\cup \operatorname{int} Ц_{5,6}\to R^3$, которое изменяется только на $L_ц\cap\operatorname{int} Ц_{3,4}$.

Лемма 3. *При каждом* $h>0$ *существует гармоническая функция* $F_Ц$ в $\operatorname{int} Ц$ *такая, что* $|g_ц-\operatorname{grad} F_ц|\leqslant C\cdot h^4$ *там, где определено* g *и* $|F_ц|<C$ *в* $\operatorname{int} Ц$, *а* C *не зависит от* h.

Доказательство. Пусть $g_ц=(g^1_ц, g^2_ц, g^3_ц)$, $F_ц$ построены в виде $F_{\text{ц}}^1(x, y) + F_{\text{ц}}^2(y, z)$, где каждое слагаемое зависит только от двух параметров и является их гармонической функцией.

По теореме Мергеляна о наилучших приближениях [6] существует аналитическая функция $F_{\text{ц}}^*(\zeta)$, где $\zeta = x + iy$, приближающая с точностью $C \cdot h^4$ функцию $g_{\text{ц}}^1 - ig_{\text{ц}}^2$ на проекции области определения $g_{\text{ц}}$ на плоскость (x, y) (ось $L_{\text{ц}}$ лежит на оси x) и $|F_{\text{ц}}^*(\zeta)| < C$ на всей проекции Ц.

Положим $F_{\text{ц}}^1 = \text{Re} \int F^*(\zeta)\, d\zeta$, она является гармонической функцией на проекции Ц.

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int F^*(\zeta)\, d\zeta = F^*(z), \tag{1}$$

с другой стороны

$$\frac{\partial}{\partial x} \int F^*(\zeta)\, d\zeta = \frac{\partial}{\partial x} F_{\text{ц}}^1 + i \frac{\partial}{\partial x} \text{Im} \int F^*(\zeta)\, d\zeta = \frac{\partial}{\partial x} F_{\text{ц}}^1 - i \frac{\partial}{\partial y} F_{\text{ц}}^1.$$

Из того, что $F_{\text{ц}}^*$ равномерно приближает $(g_{\text{ц}}^1, g_{\text{ц}}^2)$ и имеет место (1), окончательно получаем $\|\text{grad}\, F_{\text{ц}}^1 - (g_{\text{ц}}^1, g_{\text{ц}}^2)\| \leqslant C \cdot h^4$. Поступая аналогично с $g_{\text{ц}}^3$, построим функцию $F_{\text{ц}}^2$. Функция $F_{\text{ц}} = F_{\text{ц}}^1 + F_{\text{ц}}^2$ удовлетворяет условиям леммы 3.

Замечание 5. Всякая функция $F_{\text{ц}} + C$ удовлетворяет условиям леммы 3.

Пусть $L_l = L \cap \overline{\text{int}\, S_l}$ и $T^{0,l}(\tau)$ — гладкая трубчатая поверхность толщины τ, охватывающая L_l. Пусть также $g: L_l \to R^3$ — произвольное непрерывное отображение L_l.

Лемма 4. *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\tau(\varepsilon)$ такое, что решение задачи Дирихле $g^\circ(P)$ в $\text{int}\, T^{0,l}(\tau(\varepsilon))$ по граничным значениям $g^\circ: T^{0,l}(\tau(\varepsilon)) \to R^1$, определяемым ниже, удовлетворяет при $P \in L_l$ условию*

$$\|g(P) - \text{grad}\, g^\circ(P)\| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Доказательство основано на лемме 3 и оценках гармонической меры, проведенных в работе [1]. Существует $\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ такое, что из $P, Q \in L_l$ и $\rho(P, Q) \leqslant \delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ следует $\|g(P) - g(Q)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, так как g равномерно непрерывно на L_l. Проведем разбиение L_l на конечное число связанных частей L_l^k, диаметр каждого из которых меньше $\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$:

$$\text{diam}\, L_l^k \leqslant \delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right). \tag{3}$$

Обозначим через $g^1: L_l \to R^3$ непрерывное отображение, обладающее следующими свойствами:

4.1. На тех L_l^k, которые содержат точки ветвления L, g^1 постоянно и равно значению g при произвольном $P \in L$.

4.2. На остальных L_l^k, которые представляют из себя отрезки, g^1 изменяется линейно на внутренних седьмых частях и постоянно равно значениям g в соответствующих граничных точках L_l^k на остальных частях.

Индексы, удовлетворяющие 4.1, обозначим через J_1, а условие $4.2 - J_2$.

Чтобы не загромождать изложение, будем обозначать через C различные переменные, не зависящие от τ.

Имеем при $P \in L_l$

$$\|g^1(P) - g(P)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4}$$

Проведя сечения по краям L_l^k, получим разбиение $T^{0,l}$ на части $T_k^{0,l}$. При $k \in J_2$ $T_k^{0,l}$ — прямолинейные цилиндрики. Разобьем при каждом из этих $k \in J_2$ L_l^k на семь частей ${}^nL_l^k$, $n = 1, \cdots, 7$ так, что ${}^4L_l^k$ — часть L_l^k, на которой изменяется g^1. Соответствующие цилиндры обозначим через ${}^1T_k^{0,l}, \cdots, {}^7T_k^{0,l}$.

Обозначим далее через

$$g_{l,k}^1: L_l^k \cup \operatorname{int} {}^1T_k^{0,l} \cup \operatorname{int} {}^2T_k^{0,l} \cup \operatorname{int} {}^6T_k^{0,l} \cup \operatorname{int} {}^7T_k^{0,l} \to R^3$$

отображение, которое получается из g^1 постоянным продолжением соответствующих значений на цилиндры

$$\operatorname{int} {}^1T_k^{0,l},\ \operatorname{int} {}^2T_k^{0,l},\ \operatorname{int} {}^6T_k^{0,l},\ \operatorname{int} {}^7T_k^{0,l}.$$

Пусть $k \in J_2$ и $g_l^k(P)$ — произвольная гармоническая в $\operatorname{int} T_k^{0,l}$ функция, градиент которой приближает с точностью $\frac{\varepsilon}{4}$ $g_{l,k}^1$ на $L_l^k \cup \operatorname{int} {}^1T_k^{0,l} \cup \operatorname{int} {}^2T_k^{0,l} \cup \operatorname{int} {}^6T_k^{0,l} \cup \operatorname{int} {}^7T_k^{0,l}$:

$$\|\operatorname{grad} g_l^k(P) - g_{l,k}^1(P)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

Такая функция существует, в силу леммы 3.

Положим $g^0\big|_{T_k^{0,l}} = g_l^k + C_l^k$ при $k \in J_2$ и

$$g^0\big|_{T_k^{0,l}} = \overrightarrow{g^1(P)} \cdot \vec{P} + C_l^k \quad \text{при } k \in J_1.$$

Здесь постоянные C_l^k выбираем следующим образом. Из построения g_l^k видно, что при $k \in J_2$ и $P \in \operatorname{int} {}^1T_k^{0,l} \cup \operatorname{int} {}^2T_k^{0,l}$ или $P \in \operatorname{int} {}^6T_k^{0,l} \cup \operatorname{int} {}^7T_k^{0,l}$ имеем

$$|g_l^k(P)-\overrightarrow{g^1(P)}\cdot\vec{P}-{}^jC_l^k|\leqslant C\cdot\tau^4$$

при соответствующем выборе ${}^jC_l^k$, где j принимает значения 1 и 7 соответственно.

Значения постоянных C_l^k будем выбирать последовательно. Пусть мы выбрали произвольное значение $C_l^{k_0}$, соответствующее $T_{k_0}^{0,l}$; этим самым определяются ${}^lC_l^{k_0}$ такие, что при вышеуказанных P

$$|g_l^{k_0}(P)-C_l^{k_0}-\overrightarrow{g^1(P)}\cdot\vec{P}-{}^jC_l^{k_0}|\leqslant C\cdot\tau^4.$$

Пусть $T_{k_1}^{0,l}$ примыкает к ${}^1T_{k_0}^{0,l}$. Определим $C_l^{k_1}$ так, чтобы при $P\in\operatorname{int}\ {}^8T_{k_1}^{0,l}\cup\operatorname{int}{}^7T_{k_1}^{0,l}$ было $|g_l^{k_1}+C_l^{k_1}-\overrightarrow{g^1(P)}\cdot\vec{P}-{}^1C_l^{k_0}|\leqslant C\cdot\tau^4$. Пусть также $T_{k_2}^{0,l}$ примыкает к ${}^7T_{k_0}^{0,l}$. Определим $C_l^{k_2}$ так, чтобы при $P\in\operatorname{int}\times$ $\times\,{}^1T_{k_2}^{0,l}\cup\operatorname{int}{}^2T_{k_2}^{0,l}$ было

$$|(g_l^{k_2}+C_l^{k_2})-\overrightarrow{g^1(P)}\cdot\vec{P}-{}^7C_l^{k_0}|\leqslant C\cdot\tau^4.$$

При $k\in J_1$ построение C_l^k аналогично.

Таким образом, можно корректно определить все C_l^k, так как по построению ветви L не сходятся.

И, окончательно, g^0: $\operatorname{int}T_k^{0,l}\to R^1$ — решение задачи Дирихле по граничным значениям g^0.

Докажем, что действительно можно выбрать такое $\tau(\varepsilon)$, чтобы имело место неравенство (2).

Каждая из функций g_l^k — гармонична и при $P\in L_l$

$$\|\operatorname{grad} g_l^k(P)-g^1(P)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4},\tag{6}$$

в силу неравенства (5).

Можно считать, что $|g^0(P)|\leqslant C$, где C не зависит от τ, так как каждая $g_j^l(P)$ удовлетворяет этому условию, в силу леммы 3. Покажем, что при $\tau\to 0$ $\|\operatorname{grad} g^0(P)-\operatorname{grad} g_j^l(P)\|\to 0$ равномерно по $P\in L_l$.

Пусть $k\in J_2$ и $P\in{}^2L_l^k\cup{}^3L_l^k\cup{}^4L_l^k\cup{}^5L_l^k\cup{}^6L_l^k$. Рассмотрим цилиндр $T_k^{0,l}$ и сферу $S_{\frac{\tau}{2}}(P)$ радиуса $\dfrac{\tau}{2}$ с центром в точке P.

Пусть $Q\in S_{\frac{\tau}{2}}(P)$.

Имеем

$$|g^0(Q)-g_j^l(Q)|=\Big|\int\limits_{N\in\partial[\operatorname{int}T_k^{0,l}]}|g^0(N)-g_j^l(N)|\,d\omega(Q,\alpha(N),\operatorname{int}T_k^{0,l})\Big|\leqslant$$

$$\leqslant C\cdot\omega(Q,\partial\{\operatorname{int}T_k^{0,l}\}\setminus T_k^{0,l},\operatorname{int}T_k^{0,l})\leqslant C\cdot\frac{\tau^2}{\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)}.\tag{7}$$

Последнее неравенство мы получили воспользовавшись оценкой (8) § 3 работы [1] для гармонической меры.

Используя оценку градиента гармонической функции в центре шара по ее оценке на сфере, из (7) получим

$$\|\operatorname{grad} g^{0}(P)-\operatorname{grad} g_{j}^{l}(P)\|\leqslant C\cdot\tau. \qquad (8)$$

Пусть теперь $P\in {}^{1}L_{l}^{k}$, $Q\in S_{\frac{\tau}{2}}(P)$ и $L_{l}^{k_1}$ примыкает к ${}^{1}L_{l}^{k}$. При $Z\in \operatorname{int}{}^{1}T_{k}^{0,l}\cup\operatorname{int}{}^{2}T_{k}^{0,l}$ имеем

$$|g^{0}(Z)-\overrightarrow{g^{1}(P)}\cdot\vec{P}-C_{l}^{k_1}|\leqslant C\cdot\tau^{4}.$$

Обозначим через B поверхность, ограниченную основанием ${}^{2}T_{k}^{0,l}$, примыкающим к ${}^{2}T_{k}^{0,l}$, с одной стороны, и основаниями $T_{k_1}^{0,l}$, не соприкасающимися с ${}^{1}T_{k}^{0,l}$, с другой стороны. Воспользовавшись оценкой (8) § 3 из работы [1] и леммой 3, получим

$$|g^{0}(Q)-g_{j}^{l}(Q)|\leqslant\Big|\int\limits_{Z\in B\cap\overline{\operatorname{int}T_{k}^{0,l}}}\{g^{0}(Z)-g_{j}^{l}(Z)\}\,d\omega(Q,\alpha(Z),\operatorname{int}B)\Big|+$$

$$+\Big|\int\limits_{Z\in B\cap\operatorname{int}T_{k_1}^{0,l}}|g^{0}(Z)-\overrightarrow{g^{1}(Z)}\cdot\vec{Z}-C_{l}^{k}|\,d\omega(Q,\alpha(Z),\operatorname{int}B)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant C\cdot\frac{\tau^{4}}{\tau^{2}}+C\cdot\frac{\tau^{2}}{\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)}.$$

Снова оценивая градиент гармонической функции, получаем, что неравенство (8) имеет место и при $P\in{}^{1}L_{l}^{k}$. Аналогично, воспользовавшись оценкой (8) § 3 работы [1] и леммой 3, доказываем, что неравенство (8) имеет место на остальных частях L_l.

Воспользовавшись неравенствами (4), (6) и (8), получим, что для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\tau(\varepsilon)>0$, что при $P\in L_l$

$$\|g(P)-\operatorname{grad} g^{0}(P)\|\leqslant\varepsilon.$$

Лемма 4 доказана.

Функцию $F\colon\operatorname{int}S\to R^{1}$, существование которой утверждается в теореме 2, строим в виде ряда $\sum\limits_{l=1}^{\infty}F_l(P)$ гармонических в $\operatorname{int}S$ функций.

Пусть $\{\varepsilon_l\}$—произвольная последовательность положительных чисел с условием

$$\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon_l<\infty. \qquad (9)$$

Построение $F_1(P)$. В силу леммы 4 существует гармоническая в $\operatorname{int} T^{0,3}\left(\tau\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\right)$ функция $g_3^0(P)$ такая, что при $P\in L_3$

$$\|\operatorname{grad} g_3^0(P)-f(P)\|\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{10}$$

Воспользовавшись техникой вывода полюсов, как это было проведено в работе [1], получим существование гармонической в $\operatorname{int} S$ функции $F_1(P)$, удовлетворяющей на L_3 условию

$$\|\operatorname{grad} F_1(P)-\operatorname{grad} g_3^0(P)\|\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{11}$$

Из неравенств (10) и (11) окончательно получаем, что при $P\in L_3$

$$\|\operatorname{grad} F_1(P)-f(P)\|\leqslant\varepsilon_1. \tag{12}$$

Построение $F_2(P)$. Обозначим через $T^{1,4}(\tau)$ — трубку $\partial\{\operatorname{int} S_1^\tau\cup\operatorname{int} T^{0,4}(\tau)\}$, где S_l^τ — сфера радиуса $\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^l}+\tau$. Положим $g=f-\operatorname{grad} F_1\colon L_4\to R^3$. Воспользовавшись леммой 4, построим $g^0\colon T^{0,4}(\tau)\to R^1$. Определим функцию $g^{0,2}\colon T^{1,4}(\tau)\to R^1$, полагая

$$g^{0,2}\big|_{T^{0,4}(\tau)\cap T^{1,4}(\tau)}=g^0 \tag{13}$$

и считая $g^{0,2}=0$ на

$$T^{1,4}(\tau)\cap S_1^\tau. \tag{14}$$

Совершенно такие же оценки, как и при доказательстве леммы 4, дают существование такого $\tau_2>0$, что удовлетворяются следующие условия:

2.1. При $P\in\operatorname{int} S_1\cup\{L\cap\operatorname{int} S_1^{\tau_2}\}$

$$\|\operatorname{grad} g^{0,2}(P)\|\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2;$$

2.2. При $P\in L_4\setminus\operatorname{int} S_1^{\tau_2}$

$$\|f(P)-\operatorname{grad} F_1(P)-\operatorname{grad} g^{0,2}(P)\|\leqslant\varepsilon_2.$$

Проводя стандартный вывод полюсов, получим существование гармонической в $\operatorname{int} S$ функции $F_2(P)$, удовлетворяющей следующему условию:

При $P\in\operatorname{int} S_1\cup\operatorname{int} T^{1,4}\left(\frac{\tau_2}{2}\right)$

$$\|\operatorname{grad} F_2(P)-\operatorname{grad} g^{0,2}(P)\|\leqslant\varepsilon_2. \tag{15}$$

Подставляя (15) в 2.1 и 2.2, окончательно получаем при $P\in S_1\cup\{L_4\cap\operatorname{int} S_1^{\tau_2}\}$

$$\|\operatorname{grad} F_2(P)\|\leqslant\varepsilon_1+2\cdot\varepsilon_2, \tag{16}$$

$$\|f(P) - \operatorname{grad} F_1(P) - \operatorname{grad} F_2(P)\| \leqslant 2 \cdot \varepsilon_2 \tag{17}$$

при $P \in L_4 \setminus \operatorname{int} S_1^{\tau_2}$.

Построение $F_n(P)$ вполне аналогично построению $F_2(P)$.
Обозначим через $T^{n-1, n+2}(\tau)$ трубку

$$\sigma\{\operatorname{int} S_{n-1}^{\tau} \cup \operatorname{int} T^{0, n+2}(\tau).$$

Положим $g = f - \operatorname{grad} F_1 - \cdots - \operatorname{grad} F_{n-1}$: $L_{n+2} \to R^3$. Воспользовавшись леммой 4, построим функцию g°: $T^{0, n+2}(\tau) \to R^1$. Определим функцию $g^{0, n}$: $T^{n-1, n+2}(\tau) \to R^1$, полагая

$$g^{0,n}\Big|_{T^{0, n+2}(\tau) \cap T^{n-1, n+2}(\tau)} = g^{\circ} \tag{18}$$

и считая $g^{0, n} = 0$ на

$$T^{n-1, n+2}(\tau) \cap S_{n-1}^{\tau}. \tag{19}$$

Совершенно так же, как и при построении $F_2(P)$, получаем существование такого $\tau_n > 0$, что удовлетворяются следующие условия:

п.1. При $P \in \operatorname{int} S_{n-1} \cup \{L \cap \operatorname{int} S_{n-1}^{\tau_n}\}$

$$\|\operatorname{grad} g^{0, n}(P)\| \leqslant 2\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n;$$

п.2. При $P \in L_{n+2} \setminus \operatorname{int} S_{n-1}^{\tau_n}$

$$\|f(P) - \operatorname{grad} F_1(P) - \cdots - \operatorname{grad} F_{n-1}(P) - \operatorname{grad} g^{0, n}(P)\| \leqslant \varepsilon_n.$$

Проведя вывод полюсов, получим существование гармонической в $\operatorname{int} S$ функции $F_n(P)$ такой, что

$$\text{при } P \in \operatorname{int} S_{n-1} \cup \operatorname{int} T^{n-1, n+2}\left(\frac{\tau_n}{2}\right)$$

$$\|\operatorname{grad} F_n(P) - \operatorname{grad} g^{0, n}(P)\| \leqslant \varepsilon_n. \tag{20}$$

Подставляя (20) в п.1 и п.2, окончательно получаем:

$$\text{при } P \in \operatorname{int} S_{n-1} \cup \{L_{n+2} \cap \operatorname{int} S_{n-1}^{\tau_n}\}$$

$$\|\operatorname{grad} F_n(P)\| \leqslant 2 \cdot \varepsilon_{n-1} + 2\varepsilon_n, \tag{21}$$

и при $P \in L_{n+2} \setminus \operatorname{int} S_{n-1}^{\tau_n}$

$$\|f(P) - \operatorname{grad} F_1(P) - \cdots - \operatorname{grad} F_n(P)\| \leqslant 2 \cdot \varepsilon_n. \tag{22}$$

Сходимость ряда $\sum_{l=1}^{\infty} F_l(P)$ при $P \in \operatorname{int} S$ сразу же следует из (21) и (9). Обозначим эту сумму через $F(P)$. $F(P)$, очевидно, гармонична в $\operatorname{int} S$. Покажем, что

$$\|\operatorname{grad} F(P) - f(P)\| \to 0$$

при стремлении P к S по L.

Действительно, пусть $P \in L_{l+1} \setminus L_l$.

В силу неравенств (21) и (22) имеем

$$\|f(P)-\operatorname{grad}F(P)\|\leqslant\|f(P)-\operatorname{grad}[F_1(P)+\cdots+F_{n+1}(P)]\|+$$
$$+\|\operatorname{grad}F_{n+2}(P)\|+\cdots\leqslant 2\cdot\varepsilon_{n+1}+2\cdot\sum_{i=n}^{\infty}\varepsilon_i.$$

Последняя сумма стремится к нулю, в силу (9).

Теорема 2 доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность С. Н. Мергеляну за полезные обсуждения.

Ա. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ. Հարմոնիկ և գրադիենտային արտապատկերումների սահմանային բազմությունների մասին II (*ամփոփում*)

Այս հոդվածում կառուցված են գնդի հարմոնիկ և գրադիենտային արտապատկերումներ, որոնք ունեն մաքսիմալ եզակիություններ եզրի վրա, կորագիծ սահմանային բազմությունների տերմիններով։ Նշանակենք S-ով R^3-ում գտնվող միավոր սֆերան։ Ապացուցված են հետևյալ թեորեմները։

Թեորեմ 1. Գոյություն ունի int S *գնդի այնպիսի հարմոնիկ արտապատկերում* $H\colon \mathrm{int}\, S\to R^n$, *որ ամեն մի* $a\in S$ *կետի և ամեն մի կոնտինուումի* $K\subset\overline{R^n}$ (*կոմպակտիֆիկացված տարածություն*) *երբ* $n\geqslant 2$ *և* $K\subset R^1$, *երբ* $n=1$ *համար գոյություն ունի* $l_{a,k}$ *ուղղելի կոր, որը գտնվում է* S-*ի ներսում բացի վերջնակետից, որը համընկնում է* $a\in S$ *կետի հետ, այնպիսին, որ* $C_{l_{a,k}}(H)=K\cap R^n$։

Թեորեմ 2. Գոյություն ունի int S-*ում այնպիսի հարմոնիկ ֆունկցիա* F, *որ ամեն* $a\in S$ *կետի և* $R\subset\overline{R^3}$ *կոնտինուումի համար գոյություն ունի ուղղելի կոր* $l_{a,k}$, *որը գտնվում է գնդի ներսում բացի վերջնակետից, որը համընկնում է* a-*ի հետ այնպիսին, որ* $C_{l_{a,k}}(\mathrm{grad}\, F)=K\cap R^3$.

A. A. SHAGINIAN. *On cluster sets of harmonic and gradient mappings* II (summary)

The article gives construction of harmonic and gradient mappings of the ball in R^n with maximal singularities on boundary in terms of curvilinear cluster sets.

Let S be a sphere in R^3.

Theorem 1. There exists a harmonic mapping H: int $S\to R^n$ such, that for every point $a\in S$ and every continuum $K\subset\overline{R}^n$ (one-point compactification of R^n) $n\geqslant 2$, and $K\subset R^1$, $n=1$, there exists a rectifiable path $l_{a,k}$ lying in *int* S except its endpoint a and orthogonal to S in a such that the curvilinear cluster set $C_{l_{a,k}}(H)=K\cap R^n$.

Theorem 2. There exists a function F, harmonic inside a sphere such, that for every $a\in S$ and a continuum $K\subset\overline{R}^3$ there exists a rectifiable path $l_{a,k}$ lying in *int* S except its end-point a such, that the curvillinear cluster set $C_{l_{a,k}}(\mathrm{grad}\,F)=K\cap R^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Шагинян*. О предельных множествах функций, гармонических внутри сферы, Изв. АН АрмССР, Математика, IV, № 5, 1969, 327—350.
2. *G. Piranian* Ambiguous points of a functions continuous inside a sphere, The Mich. Math. Jour., 4, № 2, 1957.
3. *F. Bagemihl*. Ambiguous points of a function harmonic inside a sphere, The Mich Math. Jour, 4, № 2, 1957.

4. *F. Bagemihl.* Curvilinear cluster sets of a arbitrary functions. Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A., 41, 1955.

5. *А. А. Шагинян.* О равномерной и касательной гармонической аппроксимации непрерывных функций на произвольных совокупностях, Матем. заметки, 9, вып. 2, 1971, 131—142.

6. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.

Добавление при корректуре

Методы, применяемые в этой работе, позволяют решить в частном случае задачу об описании совокупностей из R^3, любое непрерывное отображение которых в R^3 может быть равномерно приближено градиентами гармонических в пространстве функций.

Пусть $K = \{E\}$ — класс компактов из R^3, состоящих из конечного числа гладких клеток. Обозначим через $C_3(E)$ совокупность непрерывных отображений f: $E \to R^3$; и через $GH(E)$—совокупность отображений, допускающих равномерное приближение посредством градиентов гармонических в пространстве функций ($g: E \to R^3$ принадлежит $GH(E)$,) если для всякого $\varepsilon > 0$ существует гармоническая в пространстве функция $f(P)$ такая, что $\|g(P) - \operatorname{grad} f(P)\| \leqslant \varepsilon$ при $P \in E$).

Теорема. Для равенства $C_3(E) = GH(E)$ на произвольном $E \in K$ необходимо и достаточно, чтобы дополнения к произвольным компактным частям E были односвязны.

Общая задача об описании произвольных совокупностей E из R^3, для которых $C_3(E) = GH(E)$ остается открытой.