ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, №№ 2—3, 1971 Математика

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

С. Я. ХАВИНСОН

О ПОНЯТИИ ПОЛНОТЫ, УЧИТЫВАЮЩЕМ ВЕЛИЧИНЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ПОЛИНОМОВ

Введение

Хорошо известно, что возможность сколь угодно близкой аппроксимации элемента ω в нормированном пространстве X элементами подпространства $E\subset X$ эквивалентна тому, чтобы всякий линейный функционал $l\in X^*$, обращающийся в нуль на E, был бы равен нулю на элементе ω. На этом основывается связь между проблемами аппроксимации и теоремами единственности теории аналитических функций. С рассматриваемым линейным функционалом часто удается связать аналитическую функцию и равенство функционала на некоторых элементах нулю означает обращение в нуль данной аналитической функции в определенных точках. В теории аналитических функций имеются, однако, более сильные теоремы единственности, когда заключение $f(z)\equiv 0$ вытекает из того, что $f(z)$ лишь достаточно мала на определенном множестве. Каким фактам полноты систем отвечают подобные теоремы единственности? Оказалось, что связь с этими теоремами единственности имеют такие аппроксимационные процессы, в которых в расчет принимаются не только отклонения приближающих полиномов от приближаемой функции, но и величины коэффициентов приближающих полиномов. Основы теории полноты, учитывающей величины коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, были даны в работах Дейвиса и Фань—Цзи [1] и автора [2]. Конкретные результаты были этим методом получены в [1]—[7]. В заметке [8] было дано дальнейшее развитие теории и сформулированы новые конкретные результаты. В настоящей статье дается подробное изложение доказательств теорем из [8].

§ 1. Общие теоремы

Пусть X — нормированное пространство. Рассмотрим, наряду с X, последовательность n-мерных пространств E_n, состоящих из точек $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $n=1, 2,\cdots$. В E_n считаем заданной норму (или полунорму) $p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, причем предполагаем выполненным следующее условие согласования:

$$p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\underbrace{0,\cdots,0}_{m-n}) \qquad (1)$$

для $\forall m>n$ и любых $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. Сопряженное к E_n пространство обозначим E_n^*, а норму в E_n^* обозначим через p^*. Выделим в X систему элементов $\{\varphi_j\}$, $j=1,\cdots$. Для произвольного $\omega\in X$ положим

$$\bar{p}(\omega) = \inf \varliminf_{k\to\infty} p(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_{n_k}^k), \tag{2}$$

где inf взята по всем системам $(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_{n_k}^k)$ таким, что

$$\left\| \omega - \sum_1^{n_k} \lambda_j^k \varphi_j \right\| \to 0. \tag{3}$$

Если для данного ω вообще не имеется последовательности линейных комбинаций элементов $\{\varphi_j\}$, сходящейся к ω, то полагаем $\bar{p}(\omega) = \infty$.

Определение. Мы скажем, что система $\{\varphi_j\}$, $j=1, \cdots, O(p)$ полна в X, если $\bar{p}(\omega) < \infty$ для $\forall \omega \in X$. Если же для $\forall \omega \in X$ будет $\bar{p}(\omega) = 0$, то скажем, что $\{\varphi_j\}$ будет $o(p)$ полной в X.

Лемма 1. *Если X — пространство Банаха и $\bar{p}(\omega) < \infty$ для элементов образующих множество второй категории в X, то существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\bar{p}(\omega) \leqslant C \|\omega\|, \quad \forall \omega \in X. \tag{4}$$

Доказательство леммы основывается на принципах теории Банаха—Штейнхауса и приводится для полноты изложения. Обозначим через X_M множество элементов ω, для которых $\bar{p}(\omega) \leqslant M$, $M > 0$. Множество X_M — замкнутое. Действительно, пусть $\{\omega_n\} \subset X_M$ и $\omega_n \to \omega$. Взяв $\varepsilon > 0$, найдем ω_n такое, чтобы $\|\omega - \omega_n\| < \varepsilon$. Для ω_n подбираем линейную комбинацию $\sum\limits_1^N \lambda_j \varphi_j$ такую, что $\left\|\omega_n - \sum\limits_1^N \lambda_j \varphi_j\right\| < \varepsilon$, $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \leqslant M + \varepsilon$. Отсюда сейчас же следует, что $\bar{p}(\omega) \leqslant M$ и $\omega \in X_M$. Пусть Y—множество всех элементов, для которых $\bar{p}(\omega) < \infty$. Функция $\bar{p}(\omega)$ есть полунорма на Y (т. е. $\bar{p}(\omega_1 + \omega_2) \leqslant \bar{p}(\omega_1) + \bar{p}(\omega_2)$ и $\bar{p}(\gamma\omega) = |\gamma| \bar{p}(\omega)$). Далее, $Y = \bigcup\limits_{M=1}^{\infty} X_M$ и Y—множество второй категории. Поэтому некоторое X_M не будет нигде не плотным и, будучи замкнутым, содержит некоторую сферу $S(\omega, r)$ (ω—центр, r—радиус). Тогда сфера $S'(0, r) \subset X_{2M_0}$ и для любого $\omega \in X$ имеет место неравенство $\bar{p}(\omega) \leqslant \frac{2M_0}{r} \|\omega\|$.

Теорема 2. *Пусть X—банахово пространство. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Система $\{\varphi_j\}$, $j=1, \cdots, O(p)$ полна в X.*

2. *$\bar{p}(\omega) < \infty$ для элементов, образовывающих множество второй категории в X.*

3. *Существует константа $C > 0$ такая, что для произвольного линейного функционала $l \in X^*$ из неравенств*

$$p^*(l(\varphi_1), \cdots, l(\varphi_n)) \leqslant 1, \; n=1, 2, \cdots \tag{4}$$

вытекает неравенство

$$\|l\| \leqslant C. \tag{5}$$

Доказательство. То, что 1→2 — очевидно. Покажем, что 2 → 3. Согласно лемме 1, $\exists C>0$ такое, что $\bar{p}(\omega) \leqslant C$, если $\|\omega\| \leqslant 1$. Если бы утверждение 3 было неверно, то при любом $K>0$, $\exists l_0 \in X^*$ такой, что имеет место (4), но $\|l_0\| = T > K$. Поэтому $\exists \omega \in X$, $\|\omega\|=1$, для которого $|l_0(\omega)| > \frac{1}{2} T$. Воспользуемся теперь соотношениями двойственности работ [6], [12], из которых следует, что

$$\sup_{\substack{\|l\| \leqslant T \\ p^*(l(\varphi_1), \cdots, l(\varphi_n)) \leqslant 1 \\ n=1, 2, \cdots}} |l(\omega)| = \inf_{\substack{n \\ \{\lambda_j\}}} \left[T \left\| \omega - \sum_1^n \lambda_j \varphi_j \right\| + p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \right]. \tag{6}$$

Но так как очевидно, что

$$\frac{1}{2} T < |l_0(\omega)| \leqslant \sup |l(\omega)|, \tag{7}$$

где sup взята по тем же l, что и в (6), то

$$\inf_{\substack{n \\ \{\lambda_j\}}} \left[\left\| \omega - \sum_1^n \lambda_j \varphi_j \right\| + \frac{1}{T} p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \right] > \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Отсюда немедленно следует, что для любой последовательности $\sum_1^{n_k} \lambda_j^k \varphi_j \to \omega$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{T} \varliminf_{k \to \infty} p(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_{n_k}^k) > \frac{1}{2}$$

и, следовательно, $\bar{p}(\omega) > \frac{1}{2} T$. Так как T сколь угодно велико, то получилось противоречие с тем, что $\bar{p}(\omega) \leqslant C$. Итак, 2→3. Для того, чтобы показать, что 3→1 опять воспользуемся соотношениями двойственности из [6] и [12]. Тогда по соотношению двойственности для $\forall \omega \in X$ имеем при любом $K>C$

$$\sup_{\substack{\|l\| \leqslant K, \\ p^*(l(\varphi_1), \cdots, l(\varphi_n)) \leqslant 1, \\ n=1, 2, \cdots}} |l(\omega)| = \inf_{n, \{\lambda_j\}} \left[K \left\| \omega - \sum_1^n \lambda_j \varphi_j \right\| + p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \right]. \tag{9}$$

С другой стороны, так как из (4) следует (5), то левая часть (9) не зависит от K. Это может быть лишь тогда, когда

$$\sup |l(\omega)| = \tilde{p}(\omega), \tag{10}$$

где sup взята по всем l, удовлетворяющим (4). В силу (5) получаем $\tilde{p}(\omega) < \infty$ и теорема доказана.

При значении $C = 0$ из (4) получаем критерий $o(p)$ полноты.

Теорема 3. *Для того чтобы система* $\{\varphi_j\}$, $j = 1, \cdots$, *была* $o(p)$ *полна в* X *необходимо и достаточно, чтобы для любого линейного функционала* $l \in X^*$ *из неравенств* (4) *следовало бы, что*

$$l \equiv 0. \tag{11}$$

Достаточность следует из рассмотрения соотношения (9) со сколь угодно малым $K > 0$. Необходимость — из рассмотрения (9) с $K = 1$. Так как теперь правая часть, совпадающая с $\tilde{p}(\omega)$, равна нулю, то из условий (4) и $\|l\| < 1$ вытекает (11). Очевидно тогда, что из условий (4) всегда вытекает (11). Несколько иное доказательство теоремы 3 дано ранее в [2].

§ 2. О полноте простых дробей

Пусть G—единичный круг $|z| < 1$, $\Gamma = \partial G$—единичная окружность. Рассмотрим пространство $C_A(\Gamma)$ функций, аналитических в G и непрерывных в $\bar{G}$, с обычной нормой

$$\|f\| = \max_{|z| \leq 1} |f(z)| = \max_{\zeta \in \Gamma} |f(\zeta)|. \tag{12}$$

Зададимся последовательностью $\{t_n\}$, $n = 1, \cdots$, положительных чисел и поставим следующий вопрос. При каких условиях на $\{t_n\}$ можно подобрать систему простых дробей $\left\{\frac{1}{\zeta - \alpha_n}\right\}$, $|\alpha_n| > 1$, чтобы для любой $f(z) \in C_A(\Gamma)$ нашлась константа $C(f) > 0$ такая, что возможно была бы аппроксимация

$$\left\| f(\zeta) - \sum_{1}^{n_k} \lambda_j^k \frac{1}{\zeta - \alpha_j} \right\| \to 0, \; k \to \infty \tag{13}$$

при выполнении условия

$$|\lambda_j^k| < C(f)\, t_j, \; k = 1, \cdots, \; j = 1, \cdots ? \tag{14}$$

Иными словами, при каких условиях на $\{t_n\}$ можно найти систему дробей $\left\{\frac{1}{\zeta - \alpha_n}\right\}$, которая будет $O(p)$ полна в пространстве $C_A(\Gamma)$ при

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sup_{j = 1, \cdots, n} \left| \frac{\lambda_j}{t_j} \right|, \; n = 1, 2, \cdots ? \tag{15}$$

Теорема 4. *Пусть задана последовательность* $\{t_n\}$, $t_n>0$, $n=1,\cdots$, *и* $p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ *задается формулой* (15). *Для того чтобы существовала система дробей* $\left\{\frac{1}{z-\alpha_n}\right\}$, $|\alpha_n|>1$, $n=1,2,\cdots$, *которая была бы* $O(p)$ *полна в пространстве* $C_A(\Gamma)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_1^\infty t_j=\infty. \tag{16}$$

Если выполнено (16), *то существует система дробей, которая* $o(p)$ *полна в* $C_A(\Gamma)$.

Чтобы доказать теорему нам потребуются две простые леммы.

Лемма 5. *Существуют точки* $\{z_n\}$, $|z_n|>1$ *и числа* $\delta_n\geqslant 0$, $n=1,2,\cdots$ *такие, что для любой аналитической при* $|z|>1$ *функции* $F(z)$, $F(\infty)=0$, *из условия*

$$\sum_1^\infty \delta_n|F(z_n)|<\infty \tag{17}$$

вытекает, что $F(z)\equiv 0$.

Доказательство. Возьмем точку z_0, $|z_0|>1$, и пусть $z_n\to z_0$, z_n — различные точки. Подберем δ_n столь большими, чтобы из сходимости ряда (17) следовало бы, что $|F(z_n)|\leqslant C(F)\exp\left(-\frac{1}{|z_n-z_0|}\right)$. Ясно теперь, что (17) влечет $F(z)\equiv 0$.

Лемма 6. *Пусть ряд* (16) *расходится. Всегда существует последовательность различных точек* $\{\alpha_n\}$, $|\alpha_n|>1$, $n=1,2,\cdots$ *такая, что для любой аналитической при* $|z|>1$ *функции* $F(z)$ *ограниченного вида,* $F(\infty)=0$, *из условия*

$$\sum_1^\infty t_n|F(\alpha_n)|<\infty \tag{18}$$

следует, что $F(z)\equiv 0$.

Можно ограничиться случаем $|F(z)|\leqslant 1$, так как любая функция ограниченного вида есть частное двух функций, ограниченных по модулю единицей. Запасемся положительными числами ε_j, $j=1,\cdots$, такими, чтобы ряд $\sum_1^\infty \varepsilon_j t_j$ сходился. Берем точку z_1 из предыдущей леммы, соответствующее ей число δ_1 и фиксируем индекс k_1 так, чтобы

$$t_1+\cdots+t_{k_1}>\delta_1. \tag{19}$$

Берем теперь различные точки $\alpha_1,\cdots,\alpha_{k_1}$ столь близкими к z_1, чтобы для любой $F(z)$, $|F(z)|\leqslant 1$ было бы

$$|F(\alpha_j)-F(z_1)|\leqslant\varepsilon_j,\ j=1,\cdots,k_1. \tag{20}$$

Берем далее точку z_2 и фиксируем индекс $k_2>k_1$ так, чтобы

$$t_{k_1+1}+\cdots+t_{k_2}\geqslant\delta_2. \tag{21}$$

Выбираем различные точки $\alpha_{k_1+1},\cdots,\alpha_{k_2}$ столь близкими к z_2, чтобы

$$|F(\alpha_j)-F(z_2)|\leqslant\varepsilon_j,\ j=k_1+1,\cdots,k_2 \tag{22}$$

для всех $F(z)$, $|F(z)|\leqslant 1$. Продолжаем это построение для всех z_k. Получившаяся последовательность $\{\alpha_j\}$ — нужная. В самом деле. Если

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_j|F(\alpha_j)|<\infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n|F(z_n)|\leqslant\sum_1^{\infty}t_j|F(\alpha_j)|+\sum_1^{\infty}\varepsilon_j t_j. \tag{23}$$

Таким образом, из (18) вытекает (17) и поэтому $F(z)\equiv 0$.

Доказательство теоремы 4. Пусть ряд (16) расходится и $\{\alpha_j\}$ — точки, построенные в предыдущей лемме. Покажем, что система $\left\{\frac{1}{\zeta-\alpha_n}\right\}$, $n=1,\cdots$ будет $O(p)$ полна. Для нормы $p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ вида (15) норма p^* в сопряженном к E_n пространстве E_n^* задается равенством

$$p^*(c_1,\cdots,c_n)=\sum_1^n t_j|c_j|. \tag{24}$$

Пусть

$$l(f)=\int_\Gamma f(\zeta)\,d\mu$$

какой-нибудь линейный функционал над $C_A(\Gamma)$. Здесь μ—представляющая, согласно теореме Рисса, функционал l—борелевская мера. Образуем аналитическую функцию ограниченного вида в области $|z|>1$:

$$F(z)=\int_\Gamma\frac{d\mu}{\zeta-z}. \tag{25}$$

Если положить $\varphi_j=\frac{1}{\zeta-\alpha_j}$, $j=1,\cdots$, то $l(\varphi_j)=F(\alpha_j)$.

Допустим, что удовлетворяются неравенства

$$p^*(l(\varphi_1),\cdots,l(\varphi_n))\leqslant 1,\ n=1,\cdots. \tag{26}$$

Тогда ряд

$$\sum_1^{\infty} t_j|F(\alpha_j)$$

сходится и поэтому, по лемме 6, $F(z)\equiv 0$. Но тогда $d\mu=\varphi(\zeta)\,d\zeta$, где $\varphi(\zeta)$—граничные значения на Γ аналитической в G функции $\varphi(z)$ класса H_1 (см. [11]). Но тогда для любой $f(z)\in C_A(\Gamma)$ будем иметь

$$l(f)=\int_\Gamma f(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta=0,$$

в силу теоремы Коши. Следовательно, $l\equiv 0$ и осталось воспользоваться теоремами 2 и 3, чтобы убедиться в том, что система взятых нами простых дробей $O(p)$ и даже $o(p)$ полна в $C_A(\Gamma)$. Допустим теперь, что

$$\sum_1^\infty t_j < \infty. \tag{27}$$

Пусть $\left\{\varphi_n = \dfrac{1}{\zeta - \alpha_n}\right\}$ — произвольная система простых дробей. Для того чтобы показать, что эта система не может быть $O(p)$ полной в $C_A(\Gamma)$, надо, согласно теореме 2, убедиться в том, что существуют линейные функционалы l, для которых

$$p^*(l(\varphi_1), \cdots, l(\varphi_n)) = \sum_1^n t_j |l(\varphi_j)| \leqslant 1, \tag{28}$$

$$n = 1, 2, \cdots,$$

а $\|l\|$ — сколь угодно велика. Возьмем произвольное натуральное число K и пусть m таково, что

$$\sum_{m+1}^\infty t_j < \frac{1}{K}. \tag{29}$$

Построим аналитическую при $|\zeta| > 1$ функцию

$$\psi(\zeta) = \frac{K}{\zeta} \prod_1^m \frac{\zeta - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j \zeta}.$$

Очевидно, что $\psi(\infty) = 0$ и $|\psi(\zeta)| = K$ на единичной окружности. Рассмотрим линейный функционал l над $C_A(\Gamma)$:

$$l(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta)\, \psi(\zeta)\, d\zeta.$$

Имеем

$$l(\varphi_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\psi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - \alpha_j} = \psi(\alpha_j), \quad j = 1, \cdots.$$

Поэтому

$$l(\varphi_j) = 0, \quad j = 1, \cdots, m; \quad |l(\varphi_j)| \leqslant K, \quad j = m+1, \cdots. \tag{30}$$

Из (29) и (30) вытекает, что

$$\sum_1^\infty t_j |l(\varphi_j)| \leqslant 1,$$

и поэтому (28) удовлетворено. С другой стороны для функции

$$f(\zeta) = \frac{1}{i} \prod_1^m \frac{\bar{\alpha}_j \zeta - 1}{\alpha_j - \zeta},$$

входящей в $C_A(\Gamma)$ и имеющей $\|f\|=1$, будет выполняться соотношение на Γ:

$$f(\zeta)\psi(\zeta)\,d\zeta=K\,d\theta,\ \zeta=e^{i\theta}.$$

Поэтому $l(f)=K/2\pi$ и, следовательно, $\|l\|\geqslant K/2\pi$. (На самом деле $\|l\|=K/2\pi$). Доказательство завершено.

Заключение теоремы 4 остается верным и при замене пространства $C_A(\Gamma)$ пространствами H_p, $p>0$. Можно также рассматривать аппроксимацию в обычных пространствах $C(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma)$, добавляя к дробям с полюсами во внешности круга дроби с полюсами внутри круга.

Интересно дополнительно отметить, что для функций, аналитических в замкнутом круге, возможна аппроксимация дробями с весьма малыми коэффициентами, для которых условие (16) наверняка не выполняется. Это не противоречит нашей теории, так как функции, аналитические в замкнутом круге, образуют в $C_A(\Gamma)$ множество первой категории.

§ 3. К теореме Мюнца

Теорема 7. *Пусть $k_1,\cdots,k_n,\cdots$ — точки в правой полуплоскости, удовлетворяющие условиям*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|k_j|}=\infty,\ |k_{j+1}|-|k_j|\geqslant d>0,\ j=1,\cdots, \tag{31}$$

а последовательность положительных чисел $\{\nu_j\}$ такова, что

$$\lim_{j\to\infty}\nu_j=\infty. \tag{32}$$

Положим для $\forall n$

$$p(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=p(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\sum_1^n e^{-\nu_j|k_j|}. \tag{33}$$

Тогда система степеней $1, z^{k_1},\cdots,z^{k_n},\cdots$ будет $o(p)$ полна в пространстве $C[0,1]$. Если все $k_i>0$ и $A>0$ — произвольное число и мы положим

$$p_1(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\sum_1^n e^{-Ak_j},\ n=1,2,\cdots, \tag{34}$$

то система $1, z^{k_1},\cdots,z^{k_n},\cdots$ не будет $o(p_1)$ полна в пространстве $C[0,1]$.

Доказательство. Поскольку в устройство норм p не входит λ_0, рассмотрим подпространство $C_0[0,1]$ пространства $C[0,1]$, состоящее из функций, обращающихся в нуль при $z=0$. Если мы докажем, что система $z^{k_1}, z^{k_2},\cdots$ $o(p)$ полна в $C_0[0,1]$, то очевидно, что система $1, z^{k_1},\cdots$ будет $o(p)$ полна в $C[0,1]$.

Для (33) полунорма в сопряженном пространстве определяется как

$$p^*(c_1, \cdots, c_n) = \max_{1 \leq j \leq n} \{e^{\nu_j |k_j|} |c_j|\}, \quad n=1, \cdots. \tag{35}$$

Если $l(f)$ какой-то линейный функционал над $C_0[0, 1]$:

$$l(f) = \int_\Gamma f(\zeta)\, d\mu, \quad \Gamma = (0, 1],$$

μ—борелевская мера, то образуем аналитическую функцию

$$F(z) = \int_\Gamma e^{z \ln w}\, d\mu_w, \tag{36}$$

ограниченную при $\operatorname{Re} z > 0$. Имеем

$$l(w^{k_j}) = F(k_j), \quad j=1, \cdots. \tag{37}$$

Если выполняется условие ($\varphi_j = z^{k_j}$)

$$p^*(l(\varphi_1), \cdots, l(\varphi_n)) \leqslant 1, \quad n=1, \cdots, \tag{38}$$

то в силу (35) отсюда получаем

$$e^{\nu_j |k_j|} |F(k_j)| \leqslant 1, \quad j=1, \cdots.$$

И, следовательно

$$\varlimsup_{j \to \infty} \frac{\ln |F(k_j)|}{k_j} = -\infty.$$

Согласно теореме единственности И. В. Ушаковой [10] отсюда вытекает, что $F(z) \equiv 0$. В частности, при любом $k > 0$

$$F(k) = \int_\Gamma w^k\, d\mu = 0.$$

В силу обычной теоремы Мюнца о полноте отсюда следует, что мера $\mu \equiv 0$. Мы доказали первую часть теоремы. Последний шаг в ее доказательстве можно было бы провести и иначе, использовав рассуждения из [9], стр. 39. Чтобы убедиться в справедливости второй части теоремы следует снова опираться на критерий из теоремы 3 и заметить, что теперь из условий (38) (где p взято по формуле (34)) не следует, что $l=0$. Действительно, если $A > 0$—задано, то, взяв ρ_0, $0 < \rho_0 < 1$, таким, что $\ln \rho_0 < -A$, увидим, что функция $e^{z \ln \rho_0}$ имеет вид (36) и для нее

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln |F(x)|}{x} < -A.$$

§ 4. Одна теорема о моментах

Теорема 8. *Пусть* Γ — *компакт в комплексной плоскости, и* μ — *некоторая борелевская комплексная мера на* Γ. *Положим*

$$c_n = \int\limits_{\Gamma} z^n \, d\mu, \quad n=1, 2,\ldots \tag{39}$$

и пусть

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = R. \tag{40}$$

Относительно устройства Γ *предположим следующее. Пусть* D — *круг* $|z| \leqslant R$ *и* Γ' — *часть* Γ, *лежащая вне* D. *Если* Ω — *дополнительная к* $D \cup \Gamma$ *область, содержащая* ∞, *то* $\Gamma' \subset \partial\Omega$. *При выполнении всех этих условий замкнутый носитель меры* μ *содержится в* D.

Настоящая теорема не относится непосредственно к проблеме полноты, однако метод ее доказательства близок к тому, которым мы установили обобщение теоремы М. А. Лаврентьева в духе $O(p)$ полноты [7]. В силу указанной близости рассуждений, доказывающих сформулированную теорему, к проделанным в [7], мы приведем доказательство более конспективно, чем в предыдущих параграфах.

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu_z}{t-z}.$$

В окрестности $t=\infty$ $F(t)$ разлагается в ряд

$$F(t) = \sum_{0}^{\infty} c_k \, t^{-(k+1)},$$

сходящийся при $|t|>R$. Сумму ряда обозначим через $F_1(t)$. Следует доказывать равенство $F(t)=F_1(t)$ при $|t|>R$; *a* priori это равенство может нарушаться в точках Γ'.

Сперва допускаем, что $F(t)=F_1(t)$ почти везде (относительно плоской меры) вне круга D. Тогда легко устанавливается, что вне этого круга мера μ отсутствует. (ср. [9], стр. 39).

Допустим теперь, что равенство $F_1(t)=F(t)$ не имеет место почти везде на Γ'. Это означает существование точки $t_0 \in \Gamma'$, в которой

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{|d\mu|}{|t_0-z|} < \infty$$

и $F_1(t_0) \neq F(t_0)$. Возьмем круг D_ε радиуса $R+\varepsilon$ и пусть Ω_ε та из дополнительных к $D_\varepsilon \cup \Gamma$ областей, которая содержит ∞. При достаточно малом $\varepsilon>0$ точка $t_0 \in \partial\Omega_\varepsilon$. Для произвольного многочлена $Q(t)$ имеет место равенство:

$$\int_{\Gamma} Q(t)\, d\mu_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} F_1(t)\, Q(t)\, dt.$$

Поэтому мера ν, вводимая соотношением

$$\nu(e) = \mu(e \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi i} \int_{e \cap \partial D_1} F_1(t)\, dt,$$

ортогональна к любому многочлену. Исходя из этого устанавливается тождество

$$\int \frac{Q(t)\, d\nu}{t - t_0} = Q(t_0) \int \frac{d\nu}{t - t_0}$$

(интегрирование по $\Gamma_1 = \Gamma \cup \partial D_1$). Если $P(\Gamma_1)$—алгебра всех непрерывных на Γ_1 функций, являющихся равномерными пределами полиномов, то для $\forall g(t) \in P(\Gamma_1)$ имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{g(t)\, d\nu}{t - t_0} = g(t_0) \int_{\Gamma_1} \frac{d\nu}{t - t_0}. \tag{41}$$

Сужение $P(\Gamma_1)$ на $\partial\Omega_1$ — алгебра $P(\partial\Omega_1)$ есть алгебра Дирихле (см. [9], §§ 5—7). Поэтому минимальная граница $P(\partial\Omega_1)$ совпадает с $\partial\Omega_1$, и поэтому имеется функция $g(t) \in P(\partial\Omega_1)$, пикующая в точке t_0. Далее приходим к противоречию с (41) точно так же, как это сделано в [9] на стр. 41.

§ 5. О теореме М. А. Лаврентьева

Метод доказательства, примененный в [7] (и повторенный только что в § 4) позволяет установить несколько более сильное предложение, чем сформулировано в работе [7].

Теорема 9. *Пусть Γ — компакт в комплексной плоскости, нигде не плотный и имеющий связное дополнение. Пусть $C_0(\Gamma)$—подпространство в $C(\Gamma)$, состоящее из функций, нормированных условием*

$$f(0) = 0$$

(если $0 \in \Gamma$). Пусть $\{w_n\}$ последовательность положительных чисел, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{w_n} = \infty.$$

Определим нормы $P(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ равенствами

$$p(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) = \sum_0^n \frac{|\lambda_j|}{w_j}.$$

Система степеней $\{z^n\}$, $n = 0, 1, \cdots$ будет $o(p)$ полной в $C_0(\Gamma)$.

Если o — предельная точка Γ

$$R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{w_n}<\infty$$

и мы положим

$$p_1(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)=\max_{0\leq j\leq n}\left|\frac{\lambda_j}{w_j}\right|,$$

то система $\{z^n\}$, $n=0, 1,\cdots$ *не может быть* $O(p_1)$ *полной в* $C_0(\Gamma)$.

В работе [7] был рассмотрен лишь функционал $p_1 \leq p$.

§ 6. Об областях класса S

В настоящем параграфе мы видим применения соотношений, на которых основаны результаты § 1, к характеристике областей класса В. И. Смирнова (см. [11]). Согласно известному результату В. И. Смирнова [13], М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [14] области класса S характеризуются тем, что в них система полиномов полна в классах E_p. Излагаемая ниже теорема тесно связана с этим фактом и также дает характеристику аппроксимационного характера для областей класса S.

Пусть G—область со спрямляемой границей Г. Введем для $\forall z\in G$ следующие величины:

$$\Omega_1(z)=\inf\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left|\frac{1}{t-z}-\sum_1^n\frac{\lambda_k}{t-z_k}\right||dt|, \tag{42}$$

и

$$\Omega_2(z)=\inf\left[\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left|\frac{1}{t-z}-\sum_1^n\frac{\lambda_k}{t-z_k}\right||dt|+\sum_1^n|\lambda_k|\right], \tag{43}$$

где inf взяты по всевозможным n, всевозможным наборам точек $z_1,\cdots, z_n$ вне $\overline{G}$ и произвольным коэффициентам $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. Очевидно, что $\Omega_1(z)\leqslant\Omega_2(z)$.

Теорема 10. *Если*

$$\sup_{z\in G}\Omega_1(z)<\infty, \tag{44}$$

то $G\in S$. *Если* $G\in S$, *то*

$$\sup_{z\in G}\Omega_2(z)\leqslant 2. \tag{45}$$

Доказательство. Допустим, что $G\overline{\in} S$. Тогда существует (см. [11]) функция $\alpha_0(z)\in E_1(G)$, для которой $|\alpha_0(t)|\leqslant 1$ почти везде на Г и тем не менее $\sup_{z\in G}|\alpha_0(z)|=\infty$. С другой стороны, согласно теоремам двойственности будем иметь

$$\Omega_1(z)=\sup|\alpha(z)|, \tag{46}$$

где sup взята по всем $\alpha(z)\in E_1(G)$, $|\alpha(t)|\leqslant 1$ п. в. на Г. Ясно поэтому, что $\Omega_1(z)\geqslant|\alpha_0(z)|$ не является ограниченной в G. Пусть теперь $G\in S$. Из соотношений двойственности следует равенство

$$\Omega_2(z) = \sup \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\Gamma} \frac{\alpha(t)\, dt}{t - z} \right|, \tag{47}$$

где sup взята по функциям $\alpha(t)$ на Γ, для которых $|\alpha(t)| \leqslant 1$ п. в. на Γ и

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\alpha(t)\, dt}{t - \zeta} \right| \leqslant 1, \quad \zeta \in \overline{G}. \tag{48}$$

Положим

$$\alpha^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\alpha(t)\, dt}{t - z}, \tag{49}$$

где $\alpha^{+}(z)$ определена внутри G, а $\alpha^{-}(z)$ — вне G. Функция $\alpha^{-}(z)$ ограничена и поэтому $\alpha^{-}(z) \in E_1$ во внешности G. С помощью известных фактов об интегралах типа Коши установим, что $\alpha^{+}(z) \in E_1(G)$ и, кроме того, $|\alpha^{+}(t)| \leqslant |\alpha(t)| + |\alpha^{-}(t)| \leqslant 2$. Следовательно, $|\alpha^{+}(z)| \leqslant 2$ при $\forall z \in G$, так как область $G \in S$. Из (47) следует, что

$$\Omega_2(z) = \sup |\alpha^{+}(z)| \leqslant 2.$$

Доказательство завершено.

Настоящая теорема была замечена автором в сотрудничестве с Г. Ц. Тумаркиным.

Ս. Յա. ԽԱՎԻՆՍՈՆ. Լրիվության գաղափարի մասին, որը հաշվի է առնում մոտարկող բազմանդամների գործակիցների մեծությունները *(ամփոփում)*

Ապացուցված են մոտարկման մի շարք թեորեմներ, մոտարկող բազմանդամների գործակիցների մեծությունների հաշվառումով։

Թեորեմ. *Դիցուք տված են* $t_j > 0$ *թվեր։ Որպեսզի դանմի* $\frac{1}{\zeta - a_j}$, *պարզ կոտորակների հաջորդականությունը* $|a_j| > 1$, *այնպիսին, որ յուրաքանչյուր* $f_*(z) \in C_A(\Gamma)$ *համար հնարավոր լինի հավասարաչափ մոտարկել* $\sum\limits_{1}^{N_k} \frac{C_j}{\zeta - a_j}$ *կոտորակներով* C_j^k *գործակիցներով, որոնք բավարարում են*

$$|C_j^k| \leqslant C(f)\, t_j, \quad j = 1, \cdots; \; k = 1, \cdots,$$

պայմանին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\sum t_j = \infty.$$

C_A *տարածությունը կազմված է այնպիսի ֆունկցիաներից, որոնք անալիտիկ են* $|z| < 1$*-ում և անընդհատ* $|z| \leqslant 1$*-ում։ Այլ թեորեմներում դիտարկված են Մյունցի և Լավրենտևի թեորեմների որոշ լրացումները։*

Տրված է Վ. Ի. Սմիռնովի դասի տիրույթների նոր մոտարկումային հայտանիշ։

S. Y. HAVINSON. *A notion of completness, which takes ackount of coefficients of approximating polynomials* (summary)

Theorem. In order a sequence $\left\{\frac{1}{\xi - z_j}\right\}$, $|z_j| > 1$ to exists, such that for every $f(z) \in C_A(\Gamma)$ there is an approximating sequence $\left\{\sum^{n_k} C_j^k \frac{1}{\xi - z_j}\right\}$ with coefficients

$$|C_j^k| \leqslant C(f)\, t_j,\ j=1,\cdots,\ k=1,\cdots,$$

$t_j > 0$, the condition $\sum_1^\infty t_j = \infty$ is necessary and sufficient.

Here $C_A(\Gamma)$ is the space of analytical $|z| < 1$ and continious for $|z| \leqslant 1$ functions.

Other results supplement the theorem of Münz and Lavrentjev, and a new description of the domaines of Smirnov type is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ky Fan and Ph. Davis.* Complete sequences and approximation in normed linear spaces, Duke Math. journ., 24, № 2, 1957, 189—192.
2. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые вопросы полноты систем, ДАН СССР, 137, № 4, 1961, 793—796.
3. *С. Я. Хавинсон.* Об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль, ДАН СССР, 131, № 1, 1960, 44—46.
4. *С. Я. Хавинсон.* Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 60, 1961, 304—324.
5. *Е. Ш. Чацкая.* Об одновременной аппроксимации непрерывных функций рациональными дробями и их производными на некоторых замкнутых множествах комплексной плоскости, Изв. АН Арм. ССР, XVII, № 4, 1964, 9—22.
6. *С. Я. Хавинсон.* Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области и применении этих задач к вопросам аппроксимации, ДАН СССР, 135, № 2, 1960, 270—273.
7. *С. Я. Хавинсон.* Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций, Матем. заметки, 6, № 5, 1969, 619—625.
8. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые теоремы о приближении с учетом величин коэффициентов приближающих многочленов, ДАН СССР, 1971.
9. *Дж. Вермер.* Банаховы алгебры и аналитические функции, в сб. „Некоторые вопросы теории приближений", И. Л., Москва, 1963.
10. *И. В. Ушакова.* Теорема единственности для ограниченных функций в круге, ДАН СССР, 137, № 2, 1961, 1319—1322.
11. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., Гостехиздат, 1950.
12. *С. Я. Хавинсон.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН XVIII, № 2 (110), 1963, 25—28.
13. *В. И. Смирнов.* Sur la thèorie des polynomes orthogonaux à la variable complexe, журнал Ленингр. физ.-матем. об-ва, 2: 1, 1928, 155—179.
14. *М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев.* Sur la representation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables., Ann. École Norm. (3), 54, 1937, 1—38.