ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, №№ 2—3, 1971 Математика

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

С. О. СИНАНЯН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ОДНОМ КОМПАКТЕ БЕЗ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК

В работе уточняются результаты статьи [1].

1°. Пусть E—компакт на комплексной плоскости. Через $A(E)$ обозначим банахову алгебру аналитических на E функций. Элементы этой алгебры наследуют многие свойства аналитических на E функций — например, аналитичность во внутренних точках компакта. Если же E не имеет внутренних точек, то функции из $A(E)$ не обязательно являются аналитическими на E функциями. Но если нигде не плотный компакт E достаточно „массивен", то многие свойства аналитических функций переносятся на все функции алгебры $A(E)$. Например, из обращения в нуль любой функции из $A(E)$ на некоторой порции множества E следует тождественное равенство нулю данной функции на всем E (свойство единственности аналитических функций).

Идея о возможности переноса таким путем свойств аналитических функций на функции алгебры $A(E)$, когда E нигде не плотный компакт, исходит от Келдыша М. В. и Мергеляна С. Н.

В настоящей работе на примере одного компакта E анализируется вопрос о переносе дифференциальных свойств и более глубокого свойства — свойства единственности аналитических функций, на функции алгебры $A(E)$.

Пусть $1=n_0<n_1<\cdots$ — последовательность нечетных чисел, $N_m=n_0n_1\cdots n_m$, $m=0, 1, 2, \cdots$, Δ — единичный замкнутый квадрат. Разделим Δ прямыми, параллельными его сторонам, на n_1^2 равных квадратов. Обозначим получившийся центральный открытый квадрат через $\Delta_1^{(1)}$, а остальные квадраты — через $\delta_i^{(1)}$, $1\leqslant i<n_1^2$. Каждый из квадратов $\delta_i^{(1)}$, в свою очередь, разделим прямыми, параллельными его сторонам, на n_2^2 равных квадратов. Обозначим получившийся в $\delta_i^{(1)}$ центральный открытый квадрат через $\Delta_i^{(2)}$, $1\leqslant i<n_1^2$, а остальные квадраты второго деления — через $\delta_p^{(2)}$, $1\leqslant p<n_1^2\cdot n_2^2$.

Пусть квадраты $\delta_i^{(k-1)}, 1\leqslant i<N_{k-1}^2$, уже построены. Разделим каждый из этих квадратов прямыми, параллельными его сторонам, на n_k^2 равных квадратов. Центральные в $\delta_i^{(k-1)}$ открытые квадраты обозначим через $\Delta_i^{(k)}$, $1\leqslant i<N_{k-1}^2$.

Остальные квадраты k-го деления обозначим через $\delta_p^{(k)}, 1\leqslant p<<N_k^2$. Продолжим этот процесс бесконечно. Определим нигде не плотный континуум

$$E_0 = \Delta \diagdown (\overset{\infty}{\underset{k=s}{\mathrm{U}}} \underset{l}{\mathrm{U}} \Delta_l^{(k)}).$$

Через $\tilde{\Delta}_l^{(k)}$ обозначим концентрический к $\Delta_l^{(k)}$ открытый квадрат со стороной $\frac{1}{N_k} + \frac{S_k}{N_k}$, где S_k — нечетное число. Положим

$$E_m = \Delta \diagdown \tilde{\Delta}_m, \text{ где } \tilde{\Delta}_m = \overset{\infty}{\underset{k=m}{\mathrm{U}}} \underset{l}{\mathrm{U}} \tilde{\Delta}_l^{(k)}.$$

$E_{m,\delta}$ — множество тех точек из $E_m \cap E_0$, расстояние которых от границы области $D_m = \Delta \diagdown (\overset{m-1}{\underset{k=1}{\mathrm{U}}} \underset{l}{\mathrm{U}} \Delta_l^{(k)})$ не менее, чем $\delta > 0$.

Заметим, что

$$\text{mes}\,(E_0 \diagdown E_{m,\delta}) < \text{mes}\,(D_m \diagdown E_{m,\delta}) <$$

$$< \sum_{k=1}^{m-1} N_{k-1}^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{N_k} + 2\delta \right)^2 - \frac{1}{N_k^2} \right] + \text{mes}\,(\overset{\infty}{\underset{k=m}{\mathrm{U}}} \underset{l}{\mathrm{U}} \tilde{\Delta}_l^{(k)}) < \tag{1}$$

$$< 4\delta^2 \cdot N_{m-1}^2 + \sum_{k=m}^{\infty} N_{k-1}^2 \left[\left(\frac{1}{N_k} + \frac{S_k}{N_k} \right)^2 - \frac{1}{N_k^2} \right] < 4\delta^2 \cdot N_{m-1}^2 + 4 \cdot \left(\frac{S_m}{n_m} \right)^2.$$

(При рассмотрении множеств $E_{m,\delta}$ заранее предполагается сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{S_k}{n_k} \right)^2$).

Из последней оценки видно, что выбирая сначала m достаточно большим, а затем $\delta > 0$ достаточно маленьким, множество $E_{m,\delta}$ по мере можно сделать сколь угодно близким к множеству E_0.

Через $C^s(E_0)$ обозначим подмножество функций из множества $C(E_0)$, которые s раз непрерывно дифференцируемы на всех множествах $E_{m,\delta}$ (m и $\delta > 0$ произвольны, производная берется по указанному множеству). Через $C^\infty(E_0)$ обозначим множество всех функций из указанных, которые на всех множествах $E_{m,\delta}$ бесконечно дифференцируемы.

Утверждение 1. 1) *Если* $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{N_{k-1}}{n_k} = +\infty$, *то* $A(E_0) = C(E_0)$.

2) *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{N_{k-1}}{n_k} < +\infty$, *то* $A(E_0) \neq C(E_0)$ $(A(E_0) \subset C(E_0))$.

Это утверждение есть частный случай результата Мергеляна С. Н. (см. [2]). (Написанный ряд представляет из себя сумму длин границ дополнительных к E_0 ограниченных областей).

Здесь и в дальнейшем будем требовать монотонность последовательности $\left\{ \frac{N_{k-1}^s}{n_k} \right\}$ для каждого натурального числа s. Отметим, что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{k-1}^s}{n_k} < +\infty \tag{2}$$

выполняется для $n_k \sim e^{e^{\alpha \cdot k}}$ при $\alpha > \log(s+1)$, а при $\alpha \leqslant \log(s+1)$ нарушается.

Любопытно отметить, что при выполнении условия (2) последовательность $\left\{\frac{N^s_{k-1}}{n_k}\right\}$ будет убывать быстрее, чем e^{k^α} ($\alpha > 0$ — любое), а при нарушении условия (2) — возрастать быстрее, чем e_k^*. Здесь сказывается влияние неустойчивости аналитической емкости (о неустойчивости аналитической емкости см., например, [3]).

В утверждении 2 обобщается утверждение 1 и уточняется 2-ая часть этого утверждения.

Утверждение 2. *Если выполняется условие* (2), *то*

$$A(E_0) \subset C^s(E_0),\ A(E_0) \neq C^s(E_0).$$

Заметим, что это и последующие утверждения можно без заметных изменений сформулировать и доказать для нигде не плотных компактов, которые получаются удалением из замкнутых областей последовательности открытых областей со спрямляемыми границами. (Формулировки будут в терминах длин указанных границ).

Утверждение 3. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log N_{k-1}}{\log N_k} < +\infty, \tag{3}$$

то $A(E_0) \subset C^\infty(E_0)$.

Утверждение 4. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log N_{k-1}}{\log\log N_k} < +\infty, \tag{4}$$

то алгебра $A(E_0)$ обладает свойством единственности аналитических функций — из обращения в нуль какой-нибудь функции этой алгебры на некоторой порции множества E_0 следует тождественное равенство нулю функции на всем множестве.

Замечание. В связи с утверждениями 2 и 3 отметим следующее. Если $A(E_0)$ не содержит все непрерывные на E_0 функции, то $A(E_0)$ не может содержать также все бесконечно дифференцируемые функции (ибо ими можно всегда аппроксимировать любую непрерывную функцию).

Доказательство утверждений

2°. Пусть $R(z)$ — рациональная функция, полюсы которой лежат вне множества E_0 и

$$\|R\| = \max_{z \in E_0} |R(z)| < B.$$

$\Delta_i^{(k)}$ будем называть квадратами k-го ранга. Через M обозначим номер наивысшего ранга квадрата $\Delta_i^{(k)}$, который содержит полюсы функции $R(z)$. Через $R_{k,i}(z)$ обозначим ту часть разложения $R(z)$ в сумму простейших дробей, полюсы которой лежат в $\Delta_i^{(k)}$

$$R(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{M} \sum_{l} R_{k,l}(z), \tag{5}$$

где $P(z)$ — многочлен (целая часть $R(z)$).

Лемма 1. *Имеет место оценка*

$$\sum_{l} |R_{M,l}(z)| < 6 \cdot \frac{N_{M-1}}{n_M} \cdot B, \quad z \in \bigcup_{j} \partial\delta_j^{(M-1)}.$$

Доказательство. Основной в доказательстве служит формула

$$R_{k,l}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta_l^{(k)}} \frac{R(t)}{t-z}\, dt, \quad z \overline{\in} \Delta_l^{(k)}. \tag{6}$$

Пусть $z_0 \in \partial\delta_{l_0}^{(M-1)}$. Рассмотрим квадратные рамочки $\sigma_1 = \delta_{l_0}^{(M-1)}$, $\sigma_2, \cdots, \sigma_{N_{M-1}}$, которые концентричны к σ_1, имеют ширину $\frac{1}{N_{M-1}}$, каждая последующая окружает предыдущую, и образуются из квадратов $\delta_j^{(M-1)}$. σ_k содержит не более, чек $8 \cdot k$ из квадратов $\delta_j^{(M-1)}$. σ_k содержит не более, чем $8 \cdot k$ из квадратов $\delta_j^{(M-1)}$.

Согласно формуле (6) при $\delta_l^{(M-1)} \subset \sigma_k$ имеем

$$|R_{M,l}(z_0)| < \frac{B}{2\pi} \cdot \int\limits_{\partial\Delta_l^{(M)}} \frac{|dt|}{|t-z_0|} < \frac{\frac{4B}{N_M}}{2\pi \cdot k \cdot \frac{1}{N_{M-1}}} = \frac{2B}{\pi \cdot k \cdot n_M}.$$

Откуда

$$\sum_{\substack{l \\ \delta_l^{(M-1)} \subset \sigma_k}} |R_{M,l}(z_0)| < 8 \cdot k \cdot \frac{2B}{\pi \cdot k \cdot n_M} < \frac{6 \cdot B}{n_M}.$$

Суммируя последнее неравенство по всем рамочкам, получим

$$\sum_{l} |R_{M,l}(z_0)| < \frac{6 \cdot B \cdot N_{M-1}}{n_M}. \tag{7}$$

Лемма 2. *Обозначим* $\Phi_m(z) = R(z) - \sum_{k=m}^{M} \sum_{l} R_{k,l}(z)$. *Имеет место оценка* $|\Phi_m(z)| < A \cdot B$, *где*

$$A = \prod_{k=1}^{\sim} \left(1 + \frac{6N_{k-1}}{n_k}\right), \quad z \in D_m. \tag{8}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что

$$|\Phi_M(z)| < \left(1 + \frac{6N_{M-1}}{n_M}\right) \cdot B, \quad z \in \bigcup_{j} \partial\delta_j^{(M-1)}.$$

Так как $\Phi_M(z)$ аналитична на любом квадрате $\delta_j^{(M-1)}$, то

$$|\Phi_M(z)| < \left(1 + \frac{6N_{M-1}}{n_M}\right) \cdot B \quad \text{при} \quad z \in \bigcup_j \delta_j^{(M-1)}.$$

Но

$$\bigcup_j \delta_j^{(M-1)} = \Delta \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{M-1} \bigcup_l \Delta_l^{(k)}\right) = D_M.$$

$\Phi_M(z)$ находится относительно области D_{M-1} в такой же ситуации, что и $R(z)$ относительно D_M. Поэтому последовательно можно применять оценку (8):

$$|\Phi_{M-1}^{(z)}| < \left(1 + \frac{6N_{M-1}}{n_M}\right) \cdot \left(1 + \frac{6N_{M-2}}{n_{M-1}}\right) \cdot B, \; z \in D_{M-1},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$|\Phi_m(z)| < B \cdot \prod_{k=m}^{M} \left(1 + \frac{6N_{k-1}}{n_k}\right), \; z \in D_m.$$

Откуда

$$|\Phi_m(z)| < A \cdot B, \; z \in D_m; \; |P(z)| < A \cdot B, \; z \in \Delta. \tag{9}$$

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$\sum_{k=m}^{M} \sum_l |R_{k,l}(z)| < 7 \cdot AB \cdot L_m, \text{ где } z \in E_m,$$

$$L_m = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{N_{k-1}}{n_k}. \tag{10}$$

Доказательство. Из (6) имеем

$$|R_{M,i}(z)| < \frac{6 \cdot B}{S_M}, \quad z \in C\tilde{\Delta}_i^{(M)}.$$

Для остальных индексов, как при доказательстве леммы 1, имеем

$$\sum_{j \neq i} |R_{M,j}(z)| < \frac{6N_{M-1}}{n_M} \cdot B, \quad z \in \delta_i^{(M-1)}.$$

Объединяя эти два неравенства, будем иметь

$$\sum_j |R_{M,j}(z)| < 6 \cdot \left(\frac{N_{M-1}}{n_M} + \frac{1}{S_M}\right) \cdot B, \; z \in \delta_i^{(M-1)} \setminus \tilde{\Delta}_i^{(M)}.$$

Так как i — произвольный индекс, то

$$\sum_j |R_{M,j}(z)| < 6 \cdot \left(\frac{N_{M-1}}{n_M} + \frac{1}{S_M}\right) \cdot B, \; z \in \bigcup_i \left(\delta_i^{(M-1)} \setminus \tilde{\Delta}_i^{(M)}\right) =$$

$$= G \bigcup_i \tilde{\Delta}_i^{(M)}. \tag{11}$$

Из оценки (8) леммы (2) следует, что $\Phi_M(z)$ находится в такой же ситуации, что и $R(z)$ в наших последних рассуждениях. Поэтому согласно оценке (11) имеем

$$\sum_j |R_{M-1,\,j}(z)| < 6AB\cdot\left(\frac{N_{M-2}}{n_{M-1}}+\frac{1}{S_{M-1}}\right),\ z\in C\bigcup_l \widetilde{\Delta}_l^{(M-1)}.$$

Написав подобную оценку для всех $\Phi_r(z)$, $r=M,\ M-1,\cdots,\ m$, и затем объединяя их, будем иметь

$$\sum_{k=m}^{M}\sum_l |R_{k,\,l}(z)|<6AB\cdot L_m,\ z\in C\bigcup_{k=m}^{M}\bigcup_l \widetilde{\Delta}_l^{(k)}.$$

3°. Доказательство утверждений 2 и 3. Пусть выполняется условие (2) и $f(z)$ — произвольная функция алгебры $A(E_0)$. Рассмотрим последовательность аналитических на E_0 рациональных функций $\{R_s(z)\}$, которая сходится к $f(z)$ (в пространстве $A(E_0)$). Для рациональной функции $R(z)=R_s(z)$ будем сохранять все предыдущие обозначения.

Пусть $z\in C\widetilde{\Delta}_{l_0}^{(M)}$; $z\in\delta_{l_0}^{(M-1)}$. Из формулы (6) следует

$$\frac{d^s}{dz^s}R_{M,\,l}(z)=\frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_l^{(M)}}\frac{R(t)}{(t-z)^{s+1}}\,dt.$$

Аналогично доказательству леммы 1 имеем

$$\left|\frac{d^s}{dz^s}R_{M,\,l_0}(z)\right|<\frac{4B\cdot s!\,\dfrac{1}{N_M}}{2\pi\left(\dfrac{S_M}{N_M}\right)^{s+1}}=\frac{2B\cdot s!}{2\pi}\cdot\frac{N_M^s}{S_M^{s+1}}.$$

Для остальных индексов i, $\delta_l^{(M-1)}\subset\sigma_k$ можно записать оценку

$$\left|\frac{d^s}{dz^s}R_{M,\,l}(z)\right|<\frac{4B\cdot\dfrac{1}{N_M}\cdot s!}{2\pi\left(\dfrac{k}{N_{M-1}}\right)^{s+1}}=\frac{2B\cdot s!}{\pi}\cdot\frac{N_{M-1}^s}{k^{s+1}\cdot n_M}.$$

Суммируя последнее неравенство по всем рамочкам σ_k и прибавляя к предпоследней оценке, получим

$$\sum_l\left|\frac{d^s}{dz^s}R_{M,\,l}(z)\right|<\frac{2B\cdot s!}{\pi}\cdot\beta_M,\ \text{где}\ \beta_M=\frac{N_M^s}{S_M^{s+1}}+\frac{8N_{M-1}^s}{k^s\cdot n_M},\ z\in\widetilde{\Delta}_{l_0}^{(M)}.$$

Совершенно аналогично оценкам лемм 2, 3 можно получить неравенство

$$\sum_{k=m}^{M}\sum_l\left|\frac{d^s}{dz^s}R_{M,\,l}(z)\right|<6B\cdot A_1\cdot d_m\qquad z\in C\bigcup_{k=m}^{M}\bigcup_l\widetilde{\Delta}_l^{(k)},\tag{12}$$

где $A_1=\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\beta_k)$, $\alpha_m=\sum\limits_{k=m}^{\infty}\beta_k$.

Последовательность $\{S_k\}$ выбирается так, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k^i}{S_k^{s+1}}$ $\left(\text{например } S_k \sim \left[\frac{n_k}{k}\right]\right)$.

Заметим, что

$$\operatorname{mes}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_{i} \widetilde{\Delta}_i^{(k)}\right) < \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{S_k}{n_k}\right)^2 < +\infty.$$

Оценка (12) справедлива вне множества $\bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_{i} \widetilde{\Delta}_i^{(k)}$. Тогда имеем

$$|\Phi_m(z)| < B\cdot(1+6A_1\cdot\alpha_m), \quad z\in D_m\setminus\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_{i} \widetilde{\Delta}_i^{(k)}\right). \tag{13}$$

Так как $\Phi_m(z)$ аналитична на области D_m, то из последней оценки следует, что внутри области D_m последовательности $\left\{\frac{d^l}{dz^l}\Phi_m^{(\varepsilon)}(z)\right\}$ при любых m, l равномерно сходятся при $\varepsilon\to+0$. Далее, применяя оценку (12) к разности $R_{\varepsilon_2}(z)-R_{\varepsilon_1}(z)$, получим, что последовательности

$$\{R_\varepsilon(z)\},\quad \left\{\frac{d^l}{dz^l}R_\varepsilon(z)\right\}$$

на каждом множестве $E_{m,i}$ при $\varepsilon\to+0$ равномерно сходятся. Следовательно, предельная функция $f(z)$ последовательности $\{R_\varepsilon(z)\}$ принадлежит $C^s(E_0)$.

Доказательство утверждения 3 содержится в доказательстве утверждения 2, ибо при выполнении условия (3) условие (2) выполняется при любом натуральном s.

Перейдем к доказательству утверждения 4.

4°. Рассмотрим произвольную функцию $f(z)$ алгебры $A(E_0)$, которая обращается в нуль на некоторой порции множества E_0. Пусть $\delta_{i_0}^{(k_0)}$—наибольший квадрат среди $\{\delta_i^{(k)}\}$ (с наименьшим верхним индексом), который принадлежит указанной порции. $\{R_\varepsilon(z)\}$ — последовательность аналитических на E_0 функций, пределом которой при $\varepsilon\to+0$ на E_0 является функция $f(z)$. Обозначим

$$\alpha(\varepsilon)=\max_{\delta_0}|R_\varepsilon(z)|,\ \text{где } \delta_0=E_0\cap\delta_{i_0}^{(k_0)}. \tag{14}$$

По условию $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\alpha(\varepsilon)=0$.

Применяя оценку (10) относительно квадрата $\delta_{i_0}^{(k_0)}$, будем иметь

$$\sum_{k=k_0+1}^{M}\sum_{i}{}^{**}|R_{k,i}(z)|<6\cdot\alpha(\varepsilon)\cdot B\cdot L_{k_0+1},\quad z\in C\bigcup_{k=k_0+1}^{\infty}\bigcup_{i}{}^{**}\widetilde{\Delta}_i^{(k)}, \tag{15}$$

где (**) означает, что суммы распространяются по тем индексам i, k, для которых $\Delta_i^{(k)}$ принадлежат квадрату $\delta_{i_0}^{(k_0)}$. Тогда на множестве $\delta^* = \delta_{i_0} \setminus \left(\bigcup_{k=k_0+1} \bigcup_i^{**} \overline{\Delta}_i^{(k)} \right)$ имеем (согласно принципу максимума)

$$\left| R_s(z) - \sum_{k=k_0+1}^{M} \sum_i^{**} R_{k,i}(z) \right| < \alpha(\varepsilon) + 6B \cdot \alpha(\varepsilon) L_{k_0+1}. \tag{16}$$

Следовательно, оценка (16) имеет место на множестве $\delta_{i_0}^{(k_0)}$. Еще раз обращаясь к (14) (сопоставляя с оценкой (15)), получим

$$\sum_{k=k_0+1}^{M} \sum_i^{**} |R_{k,i}(z)| < 2\alpha(\varepsilon) + 6B \cdot \alpha(\varepsilon) L_{k_0+1}, \quad z \in C \bigcup_{k=k_0+1} \bigcup_i^{**} \Delta_i^{(k)}.$$

Так что с самого начала можно предположить, что рациональные функции $R_s(z)$ аналитичны на квадрате $\delta_{i_0}^{(k_0)}$.

Обозначим через D_m^* область

$$\Delta \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} \bigcup_i^{*} \Delta_i^{(k)} \right),$$

где знак (*) означает, что сумма распространяется по тем индексам i, k, для которых квадраты $\Delta_i^{(k)}$ находятся во внешности квадрата $\delta_{i_0}^{(k_0)}$. S_0 — концентрический к $\delta_{i_0}^{(k_0)}$ круг с радиусом $r_0 = \dfrac{1}{4 N_{k_0-1}}$, $\Gamma_m = \partial D_m^*$, $\widetilde{D}_m = D_m^* \setminus S_0$. Основную роль в дальнейшем доказательстве будут играть оценки гармонической в области $\widetilde{D}_m$ функции $\omega_m(z)$:

$$\omega_m(z) = \begin{cases} 1 \text{ при } z \in \partial S_0 \\ 0 \text{ при } z \in \Gamma_m \end{cases}.$$

Из оценки (10) и из аналитичности функции $\Phi_m^{(\varepsilon)}(z)$ на множестве $\bigcup_m \bigcup_i \overline{\Delta}_i^{(k)}$ имеем

$$|\Phi_m^{(\varepsilon)}(z)| < B + 7AB \cdot L_m < C, \quad z \in D_m^*.$$

Кроме этого (опять используя оценку (10))

$$|\Phi_m^{(\varepsilon)}(z)| < C \cdot \left[\alpha(\varepsilon) + \frac{N_{m-1}}{n_m} \right], \quad z \in \delta_{i_0}^{(k_0)}.$$

В силу принципа максимума для субгармонических функций имеем

$$|\Phi_m^{(\varepsilon)}(z)| < \left[C \left(\alpha(\varepsilon) + \frac{N_{m-1}}{n_m} \right) \right]^{\omega_m(z)} \cdot C^{1-\omega_m(z)} =$$

$$= C \cdot e^{\omega_m(z) \log \left[\alpha(\varepsilon) + \frac{N_{m-1}}{n_m} \right]}, \quad z \in \widetilde{D}_m.$$

Мы можем рассмотреть настолько маленькие значения $\varepsilon > 0$, для которых $\alpha(\varepsilon) < \dfrac{N_{m-1}}{n_m}$. Тогда

$$\log\left[\alpha(\varepsilon)+\frac{N_{m-1}}{n_m}\right]<\log 2+\log N_{m-1}-\log n_m.$$

Можно записать центральное для доказательства неравенство

$$|\Phi_m(z)|<C\cdot e^{-\frac{\omega_m(z)}{2}\cdot\log n_m},\quad z\in\bar{D}_m. \tag{17}$$

Займемся оценкой гармонической функции $\omega_m(z)$. Область $\bar{D}_m$ состоит из коридоров ширины не менее, чем $\frac{1}{N_{m-2}}-\frac{1}{N_{m-1}}$. Через F_m обозначим подмножество всех тех точек $\bar{D}_m$, расстояние которых до границы $\tilde{D}_m$ не менее, чем $\frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}$. (Нетрудно проверить, что $\operatorname{mes}(E_0\setminus F_m)\to 0$ при $m\to+\infty$).

Пусть ζ — произвольная точка множества F_M, r_0, z_0 — радиус и центр круга S_0. Выберем такие круги $S_1, S_2,\cdots, S_p$ с центрами $z_1, z_2,\cdots$ $\cdots, z_p$ и радиусами $r=r_1=r_2=\cdots=r_p=\frac{1}{2N_{m-2}}$, соответственно, что $|z_k-z_{k+1}|=\frac{r}{2}$, $k\geqslant 1$, $|z_0-z_1|=\frac{3}{2}r_0$. Точка $\zeta\in S_p$ удалена от ∂S_p на расстояние не менее, чем $\frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}$.

Нетрудно видеть, что количество этих кругов — $(p+1)$ можно взять не более, чем $8N_{m-2}\left(=\frac{4}{r}\right)$.

Далее рассмотрим гармонические функции $\mu_0(z)$, $\mu_1(z),\cdots,\mu_p(z)$.

$$\mu_0(z)=\log\frac{|z-z_0|}{2r_0}\Big/\log\frac{1}{2}.$$

$\mu_0(z)=1$ при $|z-z_0|=r_0$ и $\mu_0(z)=0$ при $|z-z_0|=2r_0$. Обозначим $S_k'=\left\{Z;\ |z-z_k|\leqslant\frac{r}{8}\right\}$, $k=1, 2,\cdots, p$. На круге S_1' имеем оценку

$$\mu_0(z)>\log\frac{\frac{3}{2}r_0+r}{2r_0}\Big/\log\frac{1}{2}=\log\left(\frac{3}{4}+\frac{r}{2r_0}\right)\Big/\log\frac{1}{2}=\lambda_1.$$

Определим

$$\mu_1(z)=\lambda_1\cdot\log\frac{|z-z_1|}{r}\Big/\log\frac{1}{8}.$$

На круге S_2' будем иметь оценку

$$\mu_1(z)>\lambda_1\cdot\log\frac{\frac{r}{2}+\frac{r}{8}}{r}\Big/\log\frac{1}{8}=\lambda_1\cdot\log\frac{5}{8}\Big/\log\frac{1}{8}=\lambda_1\cdot\lambda_2.$$

Определим

$$\mu_2(z) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \log \frac{|z - z_3|}{r} \Big/ \log \frac{1}{8}.$$

На круге S_3' имеем оценку

$$\mu_2(z) > \lambda_1 \lambda_2 \log \frac{5}{8} \Big/ \log \frac{1}{8} = \lambda_1 \cdot \lambda_2^2.$$

И вообще

$$\mu_k(z) = \lambda_1 \lambda_2^{k-1} \log \frac{|z - z_k|}{r} \Big/ \log \frac{1}{8}.$$

На круге S_{k+1}' имеем оценку

$$\mu_k(z) > \lambda_1 \cdot \lambda_2^k, \; k \leqslant p.$$

В силу принципа максимума гармонических функций имеем

$$\omega_m(z) > \mu_p(z), \; z \in S_p.$$

Кроме этого

$$\mu_p(\zeta) > \lambda_1 \lambda_2^{p-1} \cdot \log \frac{|\zeta - z_p|}{r} \Big/ \log \frac{1}{8} > \lambda_1 \lambda_2^{p-1} \log \frac{r - \dfrac{S_{m-1}}{N_{m-1}}}{r} \Big/ \log \frac{1}{8} >$$

$$> \lambda_1 \lambda_2^{p-1} \cdot \frac{S_{m-1}}{n_{m-1}}.$$

Сопоставляя последнюю оценку с оценкой (17), получим

$$|\Phi_m^{(\varepsilon)}(\zeta)| < C \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \lambda_2^{4N_{m-2}} \cdot \frac{S_{m-1}}{n_{m-1}} \cdot \log n_m}, \; \zeta \in F_m. \qquad (18)$$

Из условия (4) имеем

$$\frac{S_{m-1}}{n_{m-1}} \cdot \lambda_2^{4N_{m-2}} \cdot \log n_m \cdot \frac{S_{m-1}}{n_{m-1}} e^{\log \log n_m + 4N_{m-2} \log \lambda_2} \to +\infty \text{ при } m \to \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{m \to \infty} \Phi_m^{(\varepsilon)}(z) = 0 \; (\varepsilon = \varepsilon(m)), \; \zeta \in F_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} F_k; \; \mathrm{mes}\,(E_0 \setminus F_0) = 0.$$

Также учитывая оценку (10), приходим к окончательному выводу: за исключением подмножества E_0, мера которого стремится к нулю при $m \to \infty$, в остальных точках множества E_0 равномерно $R_\varepsilon(z) = o(1)$ при $\varepsilon \to +0$. Откуда следует, что $f(z) \equiv 0$, $z \in E_0$. Утверждение 4 доказано.

Ս. Հ. ՍԻՆԱՆՅԱՆ. Առանց ներքին կետերի մի կոմպակտի վրա տրված անալիտիկ ֆունկցիաների բանախյան ալգեբրայի դիֆերենցիալ հատկությունները *(ամփոփում)*

Ամենուրեք նոսր փակ բազմության օրինակի վրա ցույց է տրվում, որ այդ բազմության վրա անալիտիկ ֆունկցիաների դիֆերենցիալ հատկությունները կարող են փոխանցվել սահմանային (հավասարաչափ) ֆունկցիաների վրա։ Սահմանային ֆունկցիաները կարող են նաև ժառանգել անալիտիկ ֆունկցիաների միակության հատկությունը (այն բանից, որ ֆունկցիան ընդունում է զրոյական արժեքներ փակ բազմության որևէ պորցիայի վրա հետևում է, որ ֆունկցիան նույնաբար հավասար է զրոյի ամբողջ բազմության վրա)։

Տրվում են քանակական գնահատականներ։

S. O. SYNANIAN. *Differential properties of Banach algebra of analytic functions on a compact without inner points* (summary)

Using an example of nowhere dence compact it is shown, that differential properties of analytical on a compact functions expand to the limiting functions (uniform). The limiting functions may as well inherit the property of uniqueness of analytic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. О. Синанян.* Свойство единственности аналитических функций на замкнутых множествах без внутренних точек, Сибирский математ. журнал, VI, № 6, 1965, 1366—1381.
2. *С. Н. Мергелян.* Равномерное приближени функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2 (28), 1952, 31—122.
3. *А. Г. Витушкин.* Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений, УМН, XXII, вып. 6 (138), 1967, 141—199.