

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

К ВОПРОСУ О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ НА ИНТЕРВАЛЕ

Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. По теореме Мюнтца система $\{1, x^{\lambda_i}\}$ полна в метрике C на $[0, a]$, $a > 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_1 \lambda_i^{-1} = \infty$. В интервале $[a, a]$, $0 < a < a$, при указанном условии будет полной и система $\{x^{\lambda_i}\}$. Если сделать замену $x = e^t$, то получим, что при условии $\sum_1 \lambda_i^{-1} = \infty$ в любом интервале вещественной оси является

система экспонент $\{e^{\lambda_i t}\}$. При более сильном условии: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma > 0$ система $\{e^{\lambda_i z}\}$ полна в полосе $D: |\operatorname{Im} z| < \pi\sigma$. Это означает, что если $f(z)$ — функция, аналитическая в D и $\bar{F}$ — ограниченная замкнутая область из D , то по $\varepsilon > 0$ найдется конечная линейная комбинация $P(z)$ из функций $e^{\lambda_i z}$, удовлетворяющая условию

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon, z \in \bar{F}. \quad (1)$$

Возьмем в качестве $\bar{F}$ прямоугольник: $|\operatorname{Im} z| \leq h < \pi\sigma$, $a < \operatorname{Re} z \leq b$. По формуле Коши из (1) следует

$$|f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x)| < \frac{n!}{h^n} (n \geq 0), a + h \leq x \leq b - h, h < \pi\sigma. \quad (2)$$

Очевидно, что из (2) вытекает

$$|f(z) - P(z)| < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h_1}{h}\right)^n, h_1 < h, \\ |\operatorname{Im} z| \leq h_1, a + h \leq \operatorname{Re} z \leq b - h.$$

Следовательно, полнота в полосе D равносильна наличию соотношений (2) в точках x из любого интервала вещественной оси.

В случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$ система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна ни в какой области и, значит, для произвольных функций, аналитических на вещественной оси, ни при каком $h > 0$ не будут верны соотношения (2). Наша цель — доказать, что существуют такие числа M_n , зависящие только от $\{\lambda_n\}$, что и в случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$ для функции $f(x)$, аналитической на ве-

ественной оси, и интервала $[a, b]$ по $\varepsilon > 0$ можно подобрать конечную комбинацию $P(x)$ так, что будет

$$|f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x)| < \varepsilon M_n (n \geq 0), \quad a \leq x \leq b. \quad (3)$$

Ясно при этом, что числа M_n должны расти быстрее чем $\frac{n!}{h^n}$, каково бы ни было $h > 0$. Указанный результат можно рассматривать как дополнение к теореме Мюнтца.

Итак, пусть $\sum_1^\infty \lambda_n^{-1} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$. Разобьем последовательность $\{\lambda_n\}$ на две бесконечные последовательности $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$, причем так, чтобы было $\sum_1^\infty [\lambda''_n]^{-1} = \infty$. Положим

$$L_1(\lambda) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda'_n)^2}\right) = \sum_{n=0}^\infty a_{2n} \lambda^{2n},$$

$$M(r) = \sum_{n=0}^\infty |a_{2n}| r^{2n}, \quad \gamma_n = \min_{r>0} \frac{(1+r) M(r)}{r^n} \quad (n \geq 0).$$

Теорема 1. В качестве чисел M_n в соотношениях (3) можно взять числа $M_n = \gamma_n^{-1}$ ($n \geq 0$) или числа $M_{2n} = M_{2n+1} = |a_{2n}|^{-1}$ ($n \geq 0$).

Естественно возникает вопрос об оценке величин M_n снизу. Оценка снизу вытекает из теоремы, которая сейчас будет сформулирована и которая имеет самостоятельный интерес.

Положим

$$L(\lambda) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_0^\infty c_n \lambda^n \quad (c_{2n+1} = 0)$$

и обозначим через m_n положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_0^\infty \beta_n m_n < \infty, \quad (4)$$

где $\beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}|$ ($n \geq 0$).

Теорема 2. Пусть $P(x)$ — конечная линейная комбинация из функций $e^{\lambda_n x}$ удовлетворяет условию

$$|P^{(n)}(0)| < A m_n \quad (n \geq 0),$$

и пусть G — угол с вершиной в точке $x_0 > 0$ раствора $< \pi$, биссектриса которого расположена на отрицательной части вещественной оси. Имеется постоянная K , зависящая от $\{\lambda_n\}$, $\{m_n\}$ и угла G , но не зависящая от $P(x)$, такая, что

$$|P(x)| < AK, \quad x \in G.$$

Следствие. Пусть $\{P_k(x)\}$ — последовательность конечных линейных комбинаций экспонент из системы $\{e^{\lambda_n x}\}$, которая сходится на

некотором интервале $(\alpha, 0)$ вещественной оси и удовлетворяет еще условию

$$|P_k^{(n)}(0)| < A m_n \quad (n \geq 0, k \geq 1).$$

Тогда эта последовательность равномерно сходится внутри полуплоскости $\operatorname{Re} x < 0$.

Из последнего результата вытекает, что числа M_n не могут все быть меньше m_n .

Для сравнения M_n и m_n рассмотрим случай, когда $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ , $0 < \tau < \infty$, при уточненном порядке $\rho(r)$ таком, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\rho(r)-1} = 0, \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = \infty,$$

где $\varphi(t)$ — функция, обратная функции $t = r^{\rho(r)}$. При этом $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ при уточненном порядке $\rho(r)$, если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} = \tau.$$

При указанных условиях $\sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$. В рассматриваемом случае оказывается в качестве M_n можно взять числа

$$M_n = h_1^n [\varphi(n)]^n \quad (n \geq 0), \quad h_1 > h_0 = (e\pi\tau)^{-1},$$

а в качестве m_n числа

$$m_n = h_2^n [\varphi(n)]^n \quad (n \geq 0) \quad h_2 < h_0.$$

В конкретном случае $\lambda_n = n \ln n$ ($n \geq 2$) получаем

$$M_n = h_1^n (n \ln n)^n, \quad h_1 > (e\pi)^{-1},$$

$$m_n = h_2^n (n \ln n)^n, \quad h_2 < (e\pi)^{-1}.$$

§ 1. Доказательство теоремы 1

Пусть E — какой-нибудь отрезок, лежащий на части $[1, \infty)$ вещественной оси, в котором нет точек из $\{\lambda_n\}$. Возьмем произвольную точку β из E . Положим

$$\Phi_n(x) = L_1(\beta) q_n(\beta) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^{-i} \frac{e^{x\mu} d\mu}{(\beta - \mu) L_1(\mu) q_n(\mu)} \quad (n \geq 2), \quad -\infty < x < \infty,$$

где

$$q_n(\mu) = \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_m}\right).$$

Имеем

$$\Phi_n^{(p)}(x) = L_1(\beta) q_n(\beta) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^{-i} \frac{\mu^p e^{x\mu} d\mu}{(\beta - \mu) L_1(\mu) q_n(\mu)} \quad (p=0, 1, 2, \dots).$$

Интеграл сходится, ибо $|L_1(\mu)|$ растет на мнимой оси быстрее любой степени $|\mu|$. Получаем

$$|\Phi_n^{(p)}(x)| \leq |L_1(\beta)| |q_n(\beta)| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mu|^p |d\mu|}{(1+|\mu|) |L_1(\mu)| \left(1 + \frac{|\mu|}{\lambda_1}\right) \left(1 + \frac{|\mu|}{\lambda_2}\right)},$$

откуда

$$|\Phi_n^{(p)}(x)| \leq A |L_1(\beta)| |q_n(\beta)| \max_{\operatorname{Re} \mu=0} \frac{|\mu|^p}{(1+|\mu|) |L_1(\mu)|},$$

где A — постоянная. На мнимой оси

$$|L_1(\mu)| = \prod_1 \left(1 + \frac{|\mu|^2}{(\lambda_n)^2}\right) = M(r), \quad r = |\mu|, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |L_1(z)|,$$

а

$$(1+|\mu|) |L_1(\mu)| = (1+r) M(r).$$

Правая часть является максимумом модуля функции

$$(1+\mu) L_1(\mu) = \sum_0 \delta_p \mu^p, \quad \delta_{2n} = \delta_{2n+1} = a_{2n} \quad (n \geq 0).$$

На основании этого

$$\delta_p \leq \min_{r>0} \frac{(1+r) M(r)}{r^p} = \gamma_p$$

и, значит

$$\max_{\operatorname{Re} \mu=0} \frac{|\mu|^p}{(1+|\mu|) |L_1(\mu)|} = \frac{1}{\min_{r>0} \frac{(1+r) M(r)}{r^p}} = \frac{1}{\gamma_p} \leq \frac{1}{\delta_p}.$$

Таким образом

$$|\Phi_n^{(p)}(x)| \leq A |L_1(\beta)| |q_n(\beta)| \gamma_p^{-1} \quad (p \geq 0), \quad -\infty < x < \infty. \quad (5)$$

В силу условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$, функция $L_1(\mu)$ растет не быстрее целой функции первого порядка минимального типа. Поэтому

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \sqrt[p]{\gamma_p} = 0$$

или

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{\sqrt[p]{\gamma_p^{-1}}} = 0. \quad (6)$$

Это означает, что γ_p^{-1} растет существенно быстрее чем p^p или $p!$

Теперь заметим, что, на основании условия $\sum (\lambda_n)^{-1} = \infty$, величина $L_1(\beta) q_n(\beta) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\beta \in E$. Из этого, согласно (5), вытекает, что на всей оси последовательность $\{\Phi_n^{(p)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к нулю.

Определим вид функции $\Phi_n(x)$. Пусть Γ — граница угла $|\arg \mu| < \frac{\pi}{4}$. Для отрицательных x имеем

$$\Phi_n(x) = L_1(\beta) q_n(\beta) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\mu x} d\mu}{(\beta - \mu) L_1(\mu) q_n(\mu)}$$

(здесь мы использовали тот очевидный факт, что $|L_1(\mu)| \geq 1$ при $\frac{\pi}{4} \leq |\arg \mu| \leq \frac{3\pi}{4}$). Из этого представления видно, что $\Phi_n(x)$ — аналитическая функция по крайней мере в угле $|\pi - \arg x| < \frac{\pi}{4}$. Учтем, что имеется система окружностей $|\mu| = \rho_k$, $\rho_k \uparrow \infty$, на которых при фиксированном n и любом $\varepsilon > 0$

$$|L_1(\mu)| |q_n(\mu)| > e^{-\varepsilon/\rho_k}, \quad |\mu| = \rho_k, \quad k > K(\varepsilon).$$

В силу этого, на основании теории вычетов, получим, что в угле

$$|\pi - \arg x| < \frac{\pi}{4}$$

$$\Phi_n(x) = e^{\beta x} - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_m < \rho_k} a_m^{(n)}(\beta) e^{\lambda_m x}, \quad (7)$$

причем сходимость внутри угла (7) равномерная. Она равномерная будет и относительно $\beta \in E$. Здесь $a_m^{(n)}(\beta)$ — некоторые постоянные.

Пусть c — произвольная (но фиксированная) точка вещественной оси, лежащая слева от начала координат. Возьмем какой-нибудь угол D , который лежит целиком в угле (7) и содержит в себе бесконечный отрезок $(-\infty, c]$. Пусть ε_n — положительная величина, стремящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$. По ε_n подберем $k = k_n$ так, чтобы функция

$$\psi_n(x, \beta) = \Phi_n(x) - e^{\beta x} + \sum_{\lambda_m < \rho_{k_n}} a_m^{(n)}(\beta) e^{\lambda_m x}$$

удовлетворяла условию

$$|\psi_n(x, \beta)| < \varepsilon_n, \quad x \in D, \quad \beta \in E.$$

Из этого условия, поскольку $\psi_n(x, \beta)$ — аналитическая функция в D , получим

$$|\psi_n^{(p)}(x, \beta)| < \varepsilon_n \delta^{-p} p!, \quad x \in (-\infty, c] \quad (8)$$

(производная взята по переменному x), где δ — расстояние от отрезка $[-\infty, c]$ до границы угла D .

Имеем

$$e^{\beta x} - \Phi_n(x, \beta) = \Phi_n^{(1)}(x) - \psi_n(x, \beta),$$

где

$$\Phi_n^{(1)}(x, \beta) = \sum_{\lambda_m < \rho_{k_n}} a_m^{(n)}(\beta) e^{\lambda_m x}.$$

Из оценок (5) и (8) получаем

$$|e^{\beta x} - \varphi_n(x, \beta)|^p \leq A |L_1(\beta) q_n(\beta)| \gamma_p^{-1} + \varepsilon_n \delta^{-p} p!,$$

$$\beta \in E, \quad -\infty < x \leq c.$$

Правая часть, в силу (6), меньше $B \gamma_p^{-1} \max(\varepsilon_n, |q_n(\beta)|)$. Если мы заменим x на $x - \alpha$ и затем умножим левую и правую части на $e^{\alpha \beta}$, то получим, что

$$|e^{\beta x} - \varphi_n(x - \alpha, \beta)|^p < e^{\alpha \beta} B \gamma_p^{-1} \max(\varepsilon_n, |q_n(\beta)|)$$

для $\beta \in E, -\infty < x < c + \alpha$. Выражение $\varphi_n(x - \alpha, \beta)$ есть линейная комбинация экспонент из $\{e^{\lambda_n x}\}$, его мы по-прежнему будем обозначать через $\varphi_n(x, \beta)$. Множитель $e^{\alpha \beta}$ ограничен для $\beta \in E$. Число $c + \alpha$ за счет выбора α может быть любым фиксированным числом. Таким образом, можно считать доказанным, что

$$|e^{\beta x} - \varphi_n(x, \beta)|^{(p)} < C \gamma_p^{-1} \max(\varepsilon_n, |q_n(\beta)|), \quad p \geq 0, \quad -\infty < x < c, \quad \beta \in E \quad (9)$$

где c — любое фиксированное число, а C не зависит ни от p , ни от n .

Пусть $f(x)$ — функция, аналитическая на отрезке $[a, b]$ (нет необходимости считать ее аналитической на всей вещественной оси). Тогда она — аналитическая в некоторой области G , охватывающей $[a, b]$. Возьмем в интервале E бесконечную последовательность точек $\{\beta_s\}$. Известно, что система $\{e^{\beta_s x}\}$ полна во всей плоскости. На этом основании имеем

$$f(x) = \sum_{s=1}^{m_s} A_s^{(s)} e^{\beta_s x} = \psi_s(x), \quad (10)$$

причем

$$|\psi_s(x)| < \frac{1}{s}, \quad x \in \bar{F}, \quad s \geq 1,$$

где $\bar{F}$ — замкнутая область, охватывающая $[a, b]$ и лежащая в G . Поскольку $\psi_s(x)$ — аналитическая функция в $\bar{F}$, получаем

$$|\psi_s^{(p)}(x)| \leq s^{-1} q^{-p} p! \quad (p \geq 0, s \geq 1, x \in [a, b]), \quad (11)$$

где q — расстояние от отрезка $[a, b]$ до границы области $\bar{F}$. Обратимся к неравенству (9). Положим

$$e^{\beta_s x} - \varphi_n(x, \beta_s) = \psi_{n,s}(x),$$

где через $\varphi_n(x)$ мы обозначили $\varphi_n(x, \beta_s)$. Согласно (9)

$$|\psi_{n,s}^{(p)}(x)| < C \gamma_p^{-1} \max(\varepsilon_n, |q_n(\beta_s)|), \quad (12)$$

$$-\infty < x < b, \quad p \geq 0, \quad n \geq 1, \quad s \geq 1.$$

Имеем

$$\sum_{s=1}^{m_s} A_s^{(s)} e^{\beta_s x} - \sum_{s=1}^{m_s} A_s^{(s)} \varphi_n(x) = \sum_{s=1}^{m_s} A_s^{(s)} \psi_{n,s}(x).$$

На основании этого, принимая во внимание (10), находим

$$f(x) - \sum_{\nu=1}^{m_s} A_{\nu}^{(s)} \varphi_{n_{\nu}}(x) = \psi_s(x) + \sum_{\nu=1}^{m_s} A_{\nu}^{(s)} \psi_{n_{\nu}}(x).$$

Отсюда, в силу (11) и (12), получаем

$$\left| f^{(p)}(x) - \left\{ \sum_{\nu=1}^{m_s} A_{\nu}^{(s)} \varphi_{n_{\nu}}(x) \right\}^{(p)} \right| < \frac{q^{-p} \cdot p!}{s} + C_{\gamma_p}^{-1} \sum_{\nu=1}^{m_s} A_{\nu} \max(\varepsilon_n, |q_n(\beta_{\nu})|),$$

$$x \in [a, b], \quad p \geq 0, \quad n \geq 1.$$

Для каждого $s (s=1, 2, \dots)$ подберем $n=n_s$ так, чтобы сумма, стоящая в правой части, была меньше $\frac{1}{s}$. Полагая для этого $n=n_s$,

$$\sum_{\nu=1}^{m_s} A_{\nu}^{(s)} \varphi_{n_{\nu}}(x) = \omega_s(x),$$

учитывая (6), получим

$$|f^{(p)}(x) - \omega_s^{(p)}(x)| < C_1 \frac{\gamma_p^{-1}}{s}, \quad x \in [a, b], \quad p \geq 0, \quad s \geq 1.$$

При большом s величина $\frac{C_1}{s}$ будет меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Теорема 1 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 2

При доказательстве теоремы 2 нет необходимости предполагать, что $\sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$, мы будем использовать лишь условие: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$.

При этом условии функция

$$L(\lambda) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right) = \sum_0^{\infty} c_{2n} \lambda^{2n}$$

растет не быстрее целой функции первого порядка минимального типа. Из этого следует, что на любом луче $\arg \lambda = \varphi_0 \neq 0, \pi$ при произвольном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$|L(\lambda)| > C(\varepsilon, \varphi_0) e^{-\varepsilon |\lambda|}, \quad \arg \lambda = \varphi_0 \neq 0, \pi. \quad (13)$$

Далее, имеются окружности $|\lambda| = r_k \uparrow \infty$, на которых опять-таки при произвольном $\varepsilon > 0$

$$|L(\lambda)| > e^{-\varepsilon |\lambda|}, \quad |\lambda| = r_k, \quad k > K(\varepsilon). \quad (14)$$

Имеем

$$L(i\lambda) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right) = \sum_0^{\infty} (-1)^n c_{2n} \lambda^{2n} = \sum_0^{\infty} |c_{2n}| \lambda^{2n}.$$

Можно убедиться, что

$$|c_{2(n+p)}| \leq |c_{2n}| |c_{2p}| \quad (n > 0, p > 0). \quad (15)$$

Положим $\beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}|$ ($n > 0$), $q = \max(1, |c_2|)$. Справедливо соотношение

$$\beta_{m+k} \leq q \beta_m \beta_k \quad (m > 0, k > 0). \quad (16)$$

Для четных m и k оно сразу вытекает из (15). Пусть теперь $m = 2n + 1$, $k = 2p$. Тогда, в силу (15)

$$\beta_{m+k} = \beta_{2n+2p} = |c_{2n+2p}| \leq |c_{2n}| |c_{2p}| = \beta_m \beta_k \leq q \beta_m \beta_k.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $m = 2n + 1$, $k = 2p + 1$.

В этом случае

$$\begin{aligned} \beta_{m+k} = \beta_{2n+2p+2} &= |c_{2n+2p+2}| \leq |c_2| |c_{2n+2p}| \leq |c_2| |c_{2n}| |c_{2p}| = \\ &= |c_2| \beta_m \beta_k \leq q \beta_m \beta_k. \end{aligned}$$

Соотношение (16) установлено.

Рассмотрим функцию

$$\omega(\mu, P) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k [P_{(0)}^{(k-1)} + \mu P_{(0)}^{(k-2)} + \dots + \mu^{k-1} P(0)].$$

Согласно условию теоремы $|P_{(0)}^{(n)}| \leq A m_n$ ($n > 0$), причем числа m_n удовлетворяют неравенству (4). Оценим функцию $\omega(\mu, P)$. Имеем

$$\begin{aligned} |\omega(\mu, P)| &\leq A \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (m_{k-1} + |\mu| m_{k-2} + \dots + |\mu|^{k-1} m_0) = \\ &= A \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+p} m_n \right) |\mu|^{p-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, на основании (16), получаем

$$|\omega(\mu, P)| \leq qA \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n \right) \left(\sum_{p=1}^{\infty} \beta_p |\mu|^{p-1} \right)$$

или, приняв во внимание условие (4)

$$|\omega(\mu, P)| \leq AB \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p+1} |\mu|^p, \quad (17)$$

где B — постоянная, которая не зависит от $P(x)$, а зависит лишь от $|\lambda_n|$ и $|m_n|$. Очевидно, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p+1} |\mu|^p < C(\varepsilon) e^{\varepsilon |\mu|}. \quad (18)$$

Отсюда, в частности, видно, что $\omega(\mu, P)$ — целая функция, растущая не быстрее целой функции первого порядка минимального типа.

Функция $\omega(\mu, P)$ неоднократно уже использовалась в том или ином виде в литературе (см., например, [1]—[3]). Отметим, что

$$\omega(\mu, e^{\lambda, x}) = \frac{L(\mu)}{\mu - \lambda},$$

откуда сразу вытекает следующее основное свойство этой функции: вычет функции

$$\frac{\omega(\mu, \psi) e^{\mu x}}{L(\mu)} \quad (\psi = e^{\lambda, x})$$

как функции переменного μ равен ψ в точке $\mu = \lambda$, и равен нулю во всех остальных точках.

На основании отмеченного свойства имеем

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\omega(\mu, P) e^{\mu x}}{L(\mu)} d\mu,$$

где, если

$$P(x) = \sum_{k=1}^p \gamma_k e^{\lambda_k x}, \quad (19)$$

контур Γ_0 — замкнутый, содержащий внутри точки $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Пусть Γ — граница угла $|\arg \mu| < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. На основании условий (13), (14), (17), (18) получаем что

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\mu, P) e^{\mu x}}{L(\mu)} d\mu, \quad |\pi - \arg x| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0.$$

На основании (13), (17) и (18) далее имеем

$$|P(x)| < AC_1(\varepsilon, \varphi_0) \int_{\Gamma} e^{2\varepsilon |\mu|} e^{\operatorname{Re}(x\mu)} |d\mu|. \quad (20)$$

Возьмем $x_0 < 0$ и обозначим через G угол с вершиной в точке x_0 , стороны которого наклонены к отрицательной части вещественной оси под углами $\pm \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$. Угол G получается сдвигом угла $|\pi - \arg x| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ на вектор x_0 . Пусть x лежит в угле G . Тогда

$$\operatorname{Re}(x\mu) < -(|x_0| \cos \varphi_0) |\mu|.$$

Выбрав $2\varepsilon < |x_0| \cos \varphi_0$, из (20) получаем

$$|P(x)| < AK, \quad x \in G,$$

где K — постоянная, которая не зависит от $P(x)$ (она зависит от $\{\lambda_n\}$, $\{m_n\}$ и угла G). Раствор угла G (за счет выбора φ_0) может быть сделан сколь угодно близким к π . Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 по духу близка к теореме Л. Шварца

[4] (см. также [5], [6]), утверждающей, что если $\sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$ и полином (19) ограничен по модулю константой A на отрезке $[a, 0]$ ($a < 0$),

то тогда он ограничен по модулю в указанном выше угле G величиной AK , где K не зависит от $P(x)$. Отметим только, что в этой теореме условие $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$ является существенным, в теореме же 2 оно может и не выполняться.

Теорему 2 можно обобщить следующим образом.

Теорема 3. Пусть

$$P(x) = Q(x) + R(x),$$

где

$$Q(x) = \sum_{n=1}^q a_n e^{\lambda_n x}, \quad R(x) = \sum_{n=1}^r b_n e^{-\lambda_n x}.$$

Если

$$|P^{(n)}(0)| < A m_n \quad (n \geq 0),$$

причем m_n удовлетворяют условию (4), то в угле $G_1: |\arg(x-x_0)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \left(x_0 > 0, 0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \right)$ имеет место оценка

$$|R(x)| < AK, \quad x \in G_1,$$

а в угле G_2 , симметричном G_1 относительно начала координат, — оценка

$$|Q(x)| < AK,$$

где K не зависит от $P(x)$ (K зависит от $\{\lambda_n\}$, $\{m_n\}$ и G_1, G_2).

Доказательство проводится также как и выше, следует только учесть, что

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\omega(\mu, P) e^{\mu x}}{L(\mu)} d\mu, \quad |\pi - \arg x| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0,$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\omega(\mu, P) e^{\mu x}}{L(\mu)} d\mu, \quad |\arg x| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0,$$

где Γ_1 — граница угла $|\arg \mu| < \frac{\pi}{4}$, а Γ_2 — граница угла $|\pi - \arg \mu| < \frac{\pi}{4}$.

Замечание. В теоремах 2 и 3 производные $P^{(n)}(x)$ можно было бы рассматривать не в начале координат, а в какой-нибудь фиксированной точке a , $-\infty < a < \infty$. Тогда вершину угла G_1 следует взять правее точки a , а вершину угла G_2 — левее точки a .

Следствие. Пусть

$$P_k(x) = Q_k(x) + R_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где

$$Q_k(x) = \sum_{n=1}^{q_k} a_{n,k} e^{\lambda_{n,k} x}, \quad R_k(x) = \sum_{n=1}^{r_k} b_{n,k} e^{-\lambda_{n,k} x}.$$

Если

$$|P_k^{(n)}(a)| < Am_n, \quad |P_k^{(n)}(b)| < Am_n \quad (a < b, n > 0),$$

причем выполняется условие (4), и последовательность $\{P_k(x)\}$ сходится на интервале (a, b) или на его какой-нибудь части, то последовательность $\{Q_k(x)\}$ равномерно сходится внутри полуплоскости $\operatorname{Re} x < b$, а последовательность $\{R_k(x)\}$ — внутри полуплоскости $\operatorname{Re} x > a$. Последовательность $\{P_k(x)\}$ при этом сходится равномерно внутри полосы $a < \operatorname{Re} x < b$.

§ 3. Частный случай

Рассмотрим случай, когда последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ , $0 < \tau < \infty$ при показателе $\rho(r)$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок.

Функция $\rho(r)$ ($r > 0$) называется уточненным порядком, если существует предел $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r$. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^{\frac{1}{\rho}} I(\lambda_n)} = \tau,$$

то мы говорим, что последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ при показателе $\rho(r)$. Если для целой функции $f(z)$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho(r)}} = \sigma \neq 0, \infty, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

то $\rho(r)$ называется уточненным порядком целой функции $f(z)$, а σ — тип этой функции при уточненном порядке $\rho(r)$.

Известно, что функция $t = r^{\rho(r)}$ — возрастающая, поэтому она имеет обратную функцию $r = \varphi(t)$. Эта функция обладает свойством: имеется предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(at)}{\varphi(t)} = a^{\frac{1}{\rho}}, \quad 0 < a < \infty. \quad (21)$$

Отметим еще два необходимых нам факта (все эти сведения имеются в книге Б. Я. Левина [7]): 1) тип σ целой функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ при уточненном порядке $\rho(r)$ определяется по формуле

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(n)^{\frac{1}{\rho}} |a_n| = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}; \quad (22)$$

2) если $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ и последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ при уточненном порядке $\rho(r)$, то существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho(r)}} = \frac{\pi \tau}{\sin \frac{\pi \rho}{m}}, \quad M(r) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^m}{\lambda_k^m} \right), \quad (23)$$

где m — целое $> \rho$.

Мы рассматриваем случай, когда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\rho(r)-1} = 0, \quad \sum \frac{1}{\varphi(n)} = \infty \quad (24)$$

(совместность всех этих условий будет ниже проверена на примере). Второе из условий (24) дает нам, что функция $f(z)$ конечного типа при порядке $\rho(r)$ растет не быстрее функции первого порядка минимального типа в обычном понимании.

Пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ и $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ , $0 < \tau < \infty$ при показателе $\rho(r)$, удовлетворяющем условиям (24). Покажем, что в этом случае в качестве чисел M_n из теоремы 1 можно взять числа

$$M_n = h_1^n [\varphi(n)]^n \quad (n > 0), \quad h_1 > h_0 = (\pi e \tau)^{-1}.$$

Для доказательства возьмем положительные числа τ_1 и τ_2 , причём $\tau_1 + \tau_2 = \tau$. Положим $k_n = \left\lfloor \frac{\tau_1}{\tau_2} n \right\rfloor$ ($[a]$ — целая часть числа a). Обозначим через $\{s_n\}$ дополнение $\{k_n\}$ до последовательности $|n|$ всех натуральных чисел. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{k_n} = \frac{\tau_1}{\tau},$$

то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{s_n} = \frac{\tau_2}{\tau}.$$

Отсюда $s_n \approx \frac{\tau_2}{\tau} n$. Положим

$$\lambda_n' = \gamma_n = \lambda_{k_n}, \quad \lambda_n'' = \delta_n = \lambda_{s_n}.$$

Так как

$$\frac{n}{\lambda_n'(\gamma_n)} = \tau + o(1), \quad \lambda_n = \varphi\left(\frac{n}{\tau + o(1)}\right),$$

то, следовательно

$$\frac{k_n}{\gamma_n^{\rho(\gamma_n)}} = \tau + o(1), \quad \gamma_n = \varphi\left(\frac{k_n}{\tau + o(1)}\right)$$

и далее

$$\frac{s_n}{\delta_n^{\rho(\delta_n)}} = \tau + o(1), \quad \delta_n = \varphi\left(\frac{s_n}{\tau + o(1)}\right).$$

Значит, существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\gamma_n^{\rho(\gamma_n)}} = \tau_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\delta_n^{\rho(\delta_n)}} = \tau_2$$

и, согласно свойству (21)

$$\lambda_n' = \gamma_n = \frac{1}{\tau_1 + o(1)} \varphi(n), \quad \lambda_n'' = \delta_n = \frac{1}{\tau_2 + o(1)} \varphi(n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Из (25), принимая во внимание третье из условий (24), выводим, что

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{i_n} = \infty.$$

Оценим величины

$$\gamma_c = \min_{r>0} \frac{(1+r)M(r)}{r^n}, \quad M(r) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right).$$

На основании (23) (положив $\rho = 1$, $m = 2$) имеем

$$\frac{(1+r)M(r)}{r^n} > \frac{A(\varepsilon)}{r^n} \exp[(\pi\tau_1 - \varepsilon)r^{\rho(r)}], \quad r > 0,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Положим

$$\psi(r) = \frac{1}{r^n} \exp[(\pi\tau_1 - \varepsilon)r^{\rho(r)}]$$

и найдем минимум этой функции. Для этого возьмем производную, приравняв ее нулю, получим уравнение

$$r^{\rho(r)} [\rho(r) + r\rho'(r) \ln r] = \frac{n}{\gamma}, \quad \gamma = \pi\tau_1 - \varepsilon.$$

Если n велико, то и r велико, $\rho(r)$ близко к $\rho = 1$, $r\rho'(r) \ln r$ близко к нулю. Значит

$$r = \varphi\left(\frac{n}{\gamma + o(1)}\right) = \frac{1}{\gamma + o(1)} \varphi(n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда, учитывая, что

$$r^{\rho(r)} = \frac{n}{\gamma + o(1)},$$

получим

$$\min_{r>0} \psi(r) = [e\gamma + o(1)]^n [\varphi(n)]^{-n}.$$

Следовательно

$$\gamma_n \geq A(\varepsilon) [e\gamma + o(1)]^n [\varphi(n)]^{-n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\gamma_n^{-1} < \left[\frac{1}{e(\pi\tau_1 - \varepsilon) + o(1)} \right]^n [\varphi(n)]^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

При τ_1 , близком к τ , малом $\varepsilon > 0$, квадратная скобка будет меньше h_1 , если $h_1 > h_0 = (e\pi\tau)^{-1}$. Это и дает нам то, что нужно, ибо в качестве M_ε в теореме 1 можно взять числа γ_n^{-1} .

Теперь убедимся, что в теореме 2 в качестве m_n можно взять числа

$$m_n = h_2^n [\varphi(n)]^n, \quad h_2 < h_0.$$

Функция

$$L(\lambda) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n \quad (c_{2n+1} = 0)$$

на основании (23) (положив $\rho = 1$, $m = 2$) имеет тип $\pi\tau$ при уточненном порядке $\rho(r)$. Поэтому, согласно формуле (22),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \sqrt[n]{|c_n|} = \pi e^{\tau},$$

откуда при любом $\varepsilon > 0$

$$|c_n| < \left[\frac{\pi e^{\tau} + \varepsilon}{\varphi(n)} \right]^n, \quad n > N(\varepsilon).$$

Такому же неравенству будут удовлетворять числа β_n ($\beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}|$). При малом $\varepsilon > 0$ получим

$$\sum_1^{\infty} \beta_n m_n < \infty, \quad m_n = h_2^n [\varphi(n)]^n, \quad h_2 < h_0 = (\pi e^{\tau})^{-1},$$

что и надо было показать.

Рассматриваемый случай интересен тем, что в нем указана точная граница $h_0 [\varphi(n)]^n$ для чисел M_n снизу и для чисел m_n сверху.

Осталось привести конкретный пример уточненного порядка $\rho(r)$, удовлетворяющего одновременно всем условиям (24). Положим

$$\rho(r) = 1 - \frac{\ln \ln r}{\ln r}. \quad (26)$$

Очевидно, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1$. Так же легко убедиться, что $\lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0$.

Имеем далее

$$r^{\rho(r)} = \frac{r}{\ln r}, \quad r^{\rho(r)-1} = \frac{1}{\ln r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Обратная функция $r = \varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = (1 + o(1)) t \ln t, \quad t \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\sum \frac{1}{\varphi(n)} = \infty.$$

Следовательно, порядок (26) — искомый.

В случае порядка (26)

$$M_n = h_1^n (n \ln n)^n, \quad m_n = h_2^n (n \ln n)^n,$$

где

$$h_1 > h_0, \quad h_2 > h_0, \quad h_0 (e^{\pi\tau})^{-1}.$$

Ա. Ֆ. ԼԵՈՆՏՅԵՎ. Համաձայն վրա էփսպոնենոնեհի սխառեմի լրիվարյան եարցի մասին (ամփոփում)

$$\text{Կոդը } 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0.$$

նշվում է թվերի այնպիսի $M_0, M_1, \dots$ սխտեմ, որ իրական առանցքի $[a, b]$ հատվածի վրա անսխտիկ յուրաքանչյուր $f(x)$ ֆունկցիայի համար, ըստ $\varepsilon > 0$ -ի կարելի է ընտրել այնպիսի

$$P(x) = \sum_{k=1}^p a_k e^{\lambda_k x} \text{ րազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին }^1$$

$$|f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x)| < \varepsilon M_n \quad (n \geq 0, a \leq x \leq b).$$

Այնուհետև նշվում է թվերի մի ուրիշ $m_0, m_1, \dots$ սխտեմ, $\sqrt[n]{\frac{m_n}{n!}} \rightarrow \infty$, այնպես, որ եթե

նշված սխտեմի $P(x)$ րազմանդամի համար

$$|P^{(n)}(0)| \leq m_n \quad (n \geq 0),$$

այդա ձևի կիրառարթություն յուրաքանչյուր անկյան մեջ $|P(x)| < A$, որտեղ A -ն կախված է $P(x)$ -ից, այլ կախված է չէ անկյունից, $\{\lambda_n\}$ և $\{m_n\}$ հաջորդականություններից:

A. F. LEONTJEV. On completeness of a system of exponents on an interval (summary)

Let

$$0 < \lambda_n \uparrow \infty, \sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0.$$

A set of numbers $M_0, M_1, \dots$ is pointed out such that for any analytic on $[a, b]$ function $f(x)$ and any given $\varepsilon > 0$ a polynomial $P(x) = \sum_1^p a_n e^{\lambda_n x}$ may be found such that

$$|f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x)| < \varepsilon M_n \quad (n \geq 0, a \leq x \leq b).$$

Further on, another set of numbers $m_0, m_1, \dots$ is pointed out such that if

$$|Q^{(n)}(0)| \leq m_n \quad (n \geq 0), \quad Q(x) = \sum_1^q b_n e^{\lambda_n x}, \quad \sqrt[n]{\frac{m_n}{n!}} \rightarrow \infty,$$

then $|Q(x)| < A$ for all x from the domain $|\arg[\pi - (x - x_0)]| < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, $x_0 < 0$, where

A depends on $\{\lambda_n\}$, x_0 , φ_0 and is independent from $Q(x)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Ф. Леонтьев. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XXXIX, 1951.
2. L. Carleson. On infinite differential equations with constant coefficients, I, Math.—Scandinavica, 1, 1953, 31—38.
3. А. Ф. Леонтьев. Представление функций обобщенными рядами Дирихле, УМН, XXIV, вып. 2, 146, 1969, 97—164.
4. L. Schwartz. Etude des sommes d'exponentielles réelles, Paris, 1943.
5. I. A. Clarkson and P. Erdős. Approximation by polynomials, Duke Math. I, 10, № 1, 1943, 5—11.
6. А. Ф. Леонтьев. Об одной последовательности полиномов, ДАН СССР, 72, № 4, 1950, 621—624.
7. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, М., 1956.