ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, №№ 2—3, 1971 Математика

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

М. М. ДЖРБАШЯН, В. С. ЗАХАРЯН

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ПОДКЛАССОВ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

1°. Настоящая статья содержит существенные дополнения к результатам § 3 совместного исследования авторов [1], посвященного граничным свойствам определенных подклассов функций $N\{\omega\}$, входящих в класс N функций ограниченного вида Р. Неванлинна.

В указанной работе [1] авторы опирались на теорию факторизации мероморфных в круге функций, развитую в другом исследовании одного из авторов [2].

Напомним лишь некоторые обозначения и определения, приведенные в работе [1].

Классы Ω и $\Omega_0 \subset \Omega$. Через Ω обозначим множество функций $\omega(x)$, удовлетворяющих условиям:

1) $\omega(x) > 0$ и непрерывны на $[0,1)$,

2) $$\omega(0)=1, \quad \int_0^1 \omega(x)\,dx < +\infty,$$

3) $$\overline{\lim_{x\to 1-0}} \{|\omega(x)-1|\,x^{-1}\} < +\infty.$$

Подмножество функций $\omega(x) \in \Omega$, которые *не убывают* на $(0,1)$, обозначим через Ω_0.

ω-емкость $C_\omega(E)$. Пусть $\omega(x) \in \Omega_0$, и пусть аналитическая в единичном круге $|z|<1$ функция $C(z;\omega)$ определяется как сумма ряда

$$C(z;\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}, \tag{1.1}$$

где

$$\Delta_0=1,\ \Delta_k=k\int_0^1 \omega(x)\,x^{k-1}\,dx \quad (k=1,2,3,\cdots). \tag{1.2}$$

Условимся говорить, что B—измеримое множество $E \subset [0,2\pi]$ имеет *положительную ω-емкость*, если существует такая мера $\mu \prec E$, $\mu(E)=1$, для которой интеграл

$$U_\omega(z;\mu)=\int_0^{2\pi} |C(ze^{-i\theta};\omega)|\,d\mu(\theta) \tag{1.3}$$

удовлетворяет условию

$$\sup_{|z|<1} U_\omega(z;\mu) < +\infty. \tag{1.4}$$

В случае же отсутствия такой меры, т. е. в случае, когда для любой меры $\mu \prec E$, $\mu(E)=1$

$$\sup_{|z|<1} U_\omega(z;\mu) = +\infty, \tag{1.5}$$

будем считать, что *ω-емкость множества E равна нулю.* При этом соответственно будем писать $C_\omega(E)>0$ или $C_\omega(E)=0$.

Отметим также, что, как легко проверить, мера $C_\omega(E)$ обладает свойством

$$C_\omega(E_1+E_2)=0, \quad \text{если } C_\omega(E_1)=C_\omega(E_2)=0. \tag{1.6}$$

В работе [2] для каждой мероморфной в круге $|z|<1$ функции $F(z)$ и для любой функции $\omega(x)\in\Omega$ было введено понятие ω-характеристики $T_\omega(r;F)$, и класс $N\{\omega\}$ был определен таким образом:

$$F(z)\in N\{\omega\}, \quad \text{если} \sup_{0<r<1} T_\omega(r;F) < +\infty. \tag{1.7}$$

При этом было установлено (см. [2], теорему 4.2 (1°)), что если $\omega(x)\in\Omega_0$, причем $\lim\limits_{x\to1-0}\omega(x)=+\infty$, то имеет место строгое включение

$$N\{\omega\}\subset N. \tag{1.8}$$

Как известно, если $F(z)\in N$, то предел

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r\to1-0} F(re^{i\theta}), \quad \theta\in[0,2\pi] \tag{1.9}$$

существует всюду на $[0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E\subset[0,2\pi]$ линейной меры нуль, причем если $F(z)\not\equiv 0,\infty$, то

$$\int_0^{2\pi} |\log|F(e^{i\theta})||\,d\theta < +\infty, \tag{1.10}$$

Как было отмечено в работе [2], в связи со свойством (1.8) классов $N\{\omega\}$ при $\omega(x)\in\Omega_0$, естественно возникают следующие вопросы (см. [2], стр. 608).

Не „утоньшается" ли для функций классов $N\{\omega\}\subset N$ то исключительное множество $E\subset[0,2\pi]$ нулевой линейной меры, где предел (1.9) возможно и не существует?

Нельзя ли для граничных значений $F(e^{i\theta})$ функции $F(z)\in N\{\omega\}\subset N$ утверждать нечто большее, чем конечность интеграла (1.9)?

В связи с этими вопросами там же было высказано предположение, что ответ на эти вопросы должен опираться именно на понятие ω-емкости множеств, ассоциированное с интегралом (1.3) и совпадающее с понятием $1+\alpha$ $(-1<\alpha<0)$-емкости по Фростману лишь в специальном случае, когда $\omega(x)=(1-x)^\alpha$.

В работе [1] авторам удалось получить положительное решение первого из поставленных в [2] вопросов, притом не для всего класса $N\{\omega\}\subset N$, $\omega(x)\in\Omega_0$, а лишь для двух важных функций, входящих в этот класс*: а именно функции Бляшке $B(z;\ z_k)$, нули которой подчинены условию**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\omega(x)\,dx<+\infty,$$

и для функции $B_\omega(z;\ z_k)$, играющей важную роль в теории факторизации всех классов $N\{\omega\}$, $\omega(x)\in\Omega$.

В настоящей статье дается полный ответ как на первый, так и на второй из этих вопросов в терминах указанного уже выше понятия ω-емкости множеств.

2°. В работе [6] была установлена теорема 8 (2°), согласно которой, *если* $\omega(x)\in\Omega_0$, *то проблема моментов Хаусдорфа*

$$\Delta_n^{-1}=\int_0^1\tau^n\,d\alpha(\tau)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots),\tag{2.1}$$

где Δ_n *определяется из* (1.2), *имеет решение* $\alpha(\tau)$ *в классе неубывающих и ограниченных на* $[0,1]$ *функций.*

Из этой теоремы непосредственно следовала лемма 1.4 работы [1], согласно которой при условии $\omega(x)\in\Omega_0$ как функция $C(z;\ \omega)$, так и функция

$$S(z;\ \omega)=2C(z;\ \omega)-1=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k},\tag{2.2}$$

допускают интегральные представления

$$C(z;\ \omega)=\int_0^1\frac{d\alpha(\tau)}{1-z\tau}\quad(|z|<1),\tag{2.3}$$

$$S(z;\ \omega)=\int_0^1\frac{1+z\tau}{1-z\tau}d\alpha(\tau)\quad(|z|<1),\tag{2.4}$$

---

* Отметим, что в работе авторов [3] в специальном случае, когда $\omega(x)=(1-x)^\alpha$ $(-1<\alpha<0)$, для соответствующих классов N_α, впервые введенных и исследованных в работах одного из авторов [4], [5], оба эти вопроса были поставлены и получили почти полное решение для каждого класса N_α $(-1<\alpha<0)$.

Дело в том, что в работе [3] удалось найти ответы на эти вопросы не точно в терминах $1+\alpha$-емкости по Фростману, а лишь в терминах γ-емкости, при условии, что γ—любое число из интервала $(1+\alpha,\ 1)$.

** Согласно теореме 5.4 работы [2] это условие необходимо и достаточно, чтобы $B(z;\ z_k)\in N\{\omega\}$.

где $\alpha(\tau)$ — некоторая неубывающая и ограниченная функция на $[0,1]$. При этом очевидно, что

$$\int_0^1 d\alpha(\tau) = C(0;\ \omega) = 1. \tag{2.5}$$

Заметив далее, что в силу (2.4)

$$S'(z;\ \omega) = 2\int_0^1 \frac{\tau\, d\alpha(\tau)}{(1-z\tau)^2} \quad (|z|<1), \tag{2.6}$$

докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если $\omega(x) \in \Omega_0$, то имеет место неравенство*

$$L(S;\ \varphi) \equiv \int_0^1 |S'(re^{i\varphi};\ \omega)|\, dr \leqslant 16\,(1+2\,|S(e^{i\varphi};\ \omega)|) \quad (0<|\varphi|\leqslant\pi). \tag{2.7}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение интеграл

$$J(\tau;\ \varphi) = \int_0^1 \frac{dr}{|1-\tau r e^{i\varphi}|^2}, \tag{2.8}$$

и заметим, что из представления (2.6) легко следует неравенство

$$L(S;\ \varphi) \leqslant 2\int_0^1 J(\tau;\ \varphi)\, d\alpha(\tau). \tag{2.9}$$

Отметим теперь, что при $0\leqslant\tau\leqslant1$, $|z|\leqslant1$ имеем

$$\left|\tau-\frac{1}{z}\right| \geqslant 1-\tau \quad \text{и} \quad \left|\tau-\frac{1}{z}\right| \geqslant \left|1-\frac{1}{z}\right| - (1-\tau),$$

откуда следует

$$2\left|\tau-\frac{1}{z}\right| \geqslant \left|1-\frac{1}{z}\right|,$$

т. е.

$$|1-\tau z| \geqslant \frac{1}{2}|1-z|.$$

Положив здесь $z=re^{i\varphi}$ $(0\leqslant r\leqslant1)$, мы получим неравенство

$$|1-\tau r e^{i\varphi}| \geqslant \frac{1}{2}\,|1-\tau e^{i\varphi}| \quad (0\leqslant r,\ \tau\leqslant1). \tag{2.10}$$

Отметив далее, что

$$|1-\tau e^{i\varphi}| \leqslant 2 \quad (0\leqslant\tau\leqslant1)$$

и положив

$$\eta = 1 - \frac{1}{2} |1 - \tau e^{i\varphi}| \quad (0 \leqslant \eta < 1), \tag{2.11}$$

представим интеграл $J(\tau; \varphi)$ в виде суммы

$$J(\tau; \varphi) = \int_0^\eta \frac{dr}{|1 - r\tau e^{i\varphi}|^2} + \int_\eta^1 \frac{dr}{|1 - r\tau e^{i\varphi}|^2} = J_1(\tau; \varphi) + J_2(\tau; \varphi). \tag{2.12}$$

Поскольку $|1 - r\tau e^{i\varphi}| \geqslant 1 - r$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$, имеем, в силу (2.11)

$$J_1(\tau; \varphi) \leqslant \int_0^\eta \frac{dr}{(1-r)^2} = \frac{\eta}{1-\eta} < \frac{2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|}. \tag{2.13}$$

Далее, пользуясь неравенством (2.10), снова в силу (2.11) получим

$$J_2(\tau; \varphi) \leqslant \frac{4}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} \int_\eta^1 dr = \frac{4(1-\eta)}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} = \frac{2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|} \tag{2.14}$$

Из (2.12), (2.13) и (2.14) следует оценка интеграла $J(\tau; \varphi)$

$$J(\tau; \varphi) \leqslant \frac{4}{|1 - \tau e^{i\varphi}|} \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1, \quad 0 < |\varphi| \leqslant \pi),$$

и из (2.9) приходим к неравенству

$$L(S; \varphi) \leqslant 8 \int_0^1 \frac{\tau\, d\alpha(\tau)}{|1 - \tau e^{i\varphi}|} \quad (0 < |\varphi| \leqslant \pi). \tag{2.15}$$

Отметим, с другой стороны, что представление (2.4) функции $S(z; \omega)$, очевидно, сохраняет силу и на дуге $z = e^{i\varphi}$ $(0 < |\varphi| \leqslant \pi)$ единичной окружности, и поэтому мы будем иметь

$$S(e^{i\varphi}; \omega) = \int_0^1 \frac{1 + \tau e^{i\varphi}}{1 - \tau e^{i\varphi}} d\alpha(\tau) = \int_0^1 \frac{1 - \tau^2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} d\alpha(\tau) + i \cdot 2 \sin\varphi \int_0^1 \frac{\tau\, d\alpha(\tau)}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2}.$$

Отсюда, очевидно, следуют неравенства

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{1 - \tau^2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} d\alpha(\tau) = \operatorname{Re} S(e^{i\varphi}; \omega) \leqslant |S(e^{i\varphi}; \omega)|, \tag{2.16}$$

$$0 \leqslant 2|\sin\varphi| \int_0^1 \frac{\tau\, d\alpha(\tau)}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} = |\operatorname{Im} S(e^{i\varphi}; \omega)| \leqslant |S(e^{i\varphi}; \omega)|.$$

Убедимся, наконец, что справедливы также неравенства

$$\frac{\tau}{|1 - \tau e^{i\varphi}|} \leqslant \begin{cases} \dfrac{1-\tau^2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} + 2|\sin\varphi| \dfrac{\tau}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2}, & 0 < |\varphi| \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{1-\tau^2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} + 2, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant |\varphi| \leqslant \pi. \end{cases} \tag{2.17}$$

В самом деле, поскольку

$$|1-\tau e^{i\varphi}|=\sqrt{1-2\tau\cos\varphi+\tau^2}=\sqrt{(1-\tau)^2+4\tau\sin^2\frac{\varphi}{2}}\leqslant 1-\tau+2\sqrt{\tau}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 1-\tau^2+4\frac{|\sin\varphi|}{\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|}\leqslant\begin{cases}1-\tau^2+4\sqrt{2}\,|\sin\varphi|, & 0<|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 1-\tau^2+2, & \frac{\pi}{2}\leqslant|\varphi|\leqslant\pi,\end{cases}$$

а также

$$|1-\tau e^{i\varphi}|\geqslant 1,\quad \frac{\pi}{2}\leqslant|\varphi|\leqslant\pi,$$

то неравенства (2.17) непосредственно следуют из тождества

$$\frac{\tau}{|1-\tau e^{i\varphi}|}=\frac{\tau\,|1-\tau e^{i\varphi}|}{|1-\tau e^{i\varphi}|^2}.$$

Из оценок (2.15) и (2.17) имеем

$$L(S;\varphi)\leqslant 8\int_0^1\frac{1-\tau^2}{|1-\tau e^{i\varphi}|^2}\,d\alpha(\tau)+$$

$$+\begin{cases}(16\sqrt{2})\,2\,|\sin\varphi|\displaystyle\int_0^1\frac{\tau\,d\alpha(\tau)}{|1-\tau e^{i\varphi}|^2}, & 0<|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 16\cdot\displaystyle\int_0^1\tau\,d\alpha(\tau), & \frac{\pi}{2}\leqslant|\varphi|\leqslant\pi.\end{cases}$$

Наконец, требуемое неравенство (2.7) леммы непосредственно вытекает из (2.18), в силу оценок (2.16), если заметить, что

$$\int_0^1\tau\,d\alpha(\tau)\leqslant\int_0^1 d\alpha(\tau)=1.$$

3°. Рассмотрим интегралы вида

$$F_\omega(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C(e^{-i\theta}z;\ \omega)\,d\sigma(\theta),\tag{3.1}$$

где $\sigma(\theta)=\sigma_1(\theta)+i\sigma_2(\theta)$, а $\sigma_k(\theta)$ $(k=1,\ 2)$ — любые функции с конечным изменением на $[0,2\pi]$.

Как непосредственно следует из определения (1.1)—(1.2) функции $C(z;\ \omega)$

$$\{C(z;\ \omega)\}_{\omega=1}=\frac{1}{1-z}\quad(|z|<1).$$

Поэтому в специальном случае, когда $\omega(x)\equiv 1$, интеграл (3.1) принимает вид

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}\,d\sigma(\theta)}{e^{i\theta}-z}, \tag{3.2}$$

известный под названием *интеграла типа Коши-Стильтеса.*

Как хорошо известно [7], интеграл типа Коши-Стильтеса внутри круга $|z|<1$ изображает функцию $F(z)$, входящую в классы H_δ Рисса при любом $0<\delta<1$. По этой причине радиальный предел

$$F(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1-0}F(re^{i\theta}),\quad \varphi\in[0,2\pi]$$

существует и конечен всюду на $[0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E\subset[0,2\pi]$ с мерой $\mathrm{mes}\,E=0$.

Докажем следующую теорему о граничных свойствах интегралов типа $F_\omega(z)$ в предположении, что $\omega(x)\in\Omega_0$.

Теорема 1. *Если* $\omega(x)\in\Omega_0$, *то функция*

$$F_\omega(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C(e^{-i\theta}z;\omega)\,d\sigma(\theta)$$

всюду на $[0,2\pi]$ *обладает конечными радиальными граничными значениями*

$$F_\omega(e^{i\varphi})=\lim_{r\to 1-0}F(re^{i\varphi}), \tag{3.3}$$

кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E\subset[0,2\pi]$, *для которого* $C_\omega(E)=0$.

Доказательство. Отметим сначала же, что, ввиду свойства (1.6) ω-емкости множеств, достаточно доказать теорему в предположении, что $\sigma(\theta)$—произвольная неубывающая и ограниченная функция на отрезке $[0,2\pi]$.

Отметим далее, что поскольку

$$F_\omega(re^{i\varphi})=F_\omega(0)+\int_0^r F'_\omega(re^{i\varphi})\,dr\quad (0\leqslant r<1,\ |\varphi|\leqslant\pi),$$

то очевидно, что предел (3.3) существует и конечен в каждой точке $\varphi\in[0,2\pi]$, где

$$L(F_\omega;\varphi)\equiv\int_0^1|F'_\omega(re^{i\varphi})|\,dr<+\infty.$$

Обозначим через E_0 множество тех точек $\varphi\in[0,2\pi]$, где $L(F_\omega;\varphi)=+\infty$, а через E—множество тех точек $\varphi\in[0,2\pi]$, где предел (3.3) не существует. Тогда очевидно, что $E\subset E_0$, и для доказательства теоремы нам достаточно установить, что $C_\omega(E_0)=0$, поскольку тогда очевидно, что будем иметь также $C_\omega(E)=0$.

Убедимся теперь, что предположение $C_\omega(E)>0$ приведет нас к противоречию.

В самом деле, если $C_\omega(E)>0$, то тогда имеем также $C_\omega(E_0)>0$ и, согласно определению, существует такая мера $\mu_0 \prec E$, $\mu_0(E)=1$, для которой интеграл

$$U_\omega(z;\mu_0)=\int_0^{2\pi} |C(ze^{-i\vartheta};\omega)|\, d\mu_0(\vartheta)$$

удовлетворяет условию

$$\sup_{|z|<1} U_\omega(z;\mu_0)<+\infty. \tag{3.4}$$

Из (3.4), в частности, следует также, что

$$\sup_{|\varphi|\leqslant\pi} U_\omega(e^{i\varphi};\mu_0)<+\infty. \tag{3.4'}$$

С другой стороны, так как

$$L(F_\omega;\varphi)=+\infty,\quad \varphi\in E_0,$$

то очевидно, что будем иметь

$$\int_0^{2\pi} L(F_\omega;\varphi)\,d\mu_0=\int_{E_0} L(F_\omega;\varphi)\,d\mu_0=+\infty. \tag{3.5}$$

Далее, из (3.1) имеем

$$F'_\omega(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C'(e^{-i\vartheta}z;\omega)\,e^{-i\vartheta}\,d\sigma(\vartheta)$$

и, так как по (2.2) $S'(z;\omega)=2C'(z;\omega)$, то

$$F'_\omega(z)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} S'(e^{-i\vartheta}z;\omega)\,e^{-i\vartheta}\,d\sigma(\vartheta).$$

Отсюда следует оценка

$$L(F_\omega;\varphi)\equiv\int_0^1 |F'_\omega(re^{i\varphi})|\,dr\leqslant\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 |S'(re^{i(\varphi-\vartheta)};\omega)|\,dr\right\}d\sigma(\vartheta),$$

или, ввиду леммы 1, также оценка

$$L(F_\omega;\varphi)\leqslant\sigma_0+\frac{8}{\pi}\int_0^{2\pi}|S(e^{i(\varphi-\vartheta)};\omega)|\,d\sigma(\vartheta),\quad |\varphi|\leqslant\pi, \tag{3.6}$$

где

$$\sigma_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma(\vartheta).$$

Отметив, что

$$S(z;\omega) = 2\,C(z;\omega) - 1,$$

из (3.6) мы приходим к неравенству

$$L(F_\omega;\varphi) \leqslant 3\sigma_0 + \frac{16}{\pi}\int_0^{2\pi} |C(e^{i(\varphi-\vartheta)};\omega)|\,d\sigma(\vartheta), \quad |\varphi| \leqslant \pi. \tag{3.6'}$$

Интегрируя, наконец, неравенство (3.6) по мере μ_0, мы получим

$$\int_0^{2\pi} L(F_\omega;\varphi)\,d\mu_0(\varphi) \leqslant 3\sigma_0 + \frac{16}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} |C(e^{i(\varphi-\vartheta)};\omega)|\,d\sigma(\vartheta)\right\} d\mu_0(\varphi) =$$

$$= 3\sigma_0 + \frac{16}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} |C(e^{i(\vartheta-\varphi)};\omega)|\,d\mu_0(\varphi)\right\} d\sigma(\vartheta) =$$

$$= 3\sigma_0 + \frac{16}{\pi}\int_0^{2\pi} U_\omega(e^{i\vartheta};\mu_0)\,d\sigma(\vartheta).$$

Отсюда, в силу (3.4'), вытекает неравенство

$$\int_0^{2\pi} L(F_\omega;\varphi)\,d\mu_0 < +\infty,$$

что противоречит условию (3.5). Таким образом, теорема доказана.

4°. Докажем теперь первую основную теорему данной работы.

Теорема 2. *Для любой функции $F(z) \in N\{\omega\}$, где $\omega(x) \in \Omega_0$ существует конечный предел*

$$F(e^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1-0} F(re^{i\vartheta}) \tag{4.1}$$

для всех $\vartheta \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$, для которого $C_\omega(E) = 0$.

Доказательство. Известно (см. [2], теорему 5.6), что функция $F(z) \in N\{\omega\}$ при $\omega(x) \in \Omega_0$ допускает представление вида

$$F(z) = e^{i\gamma + \lambda k_\omega} z^\lambda \frac{B(z;a_\mu)}{B(z;b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\vartheta}z;\omega)\,d\sigma(\vartheta)\right\}, \tag{4.2}$$

где $\lambda \geqq 0$ — любое целое, γ — любое вещественное число и $\sigma(\vartheta)$ — некоторая вещественная функция на $[0, 2\pi]$ с конечным полным изменением, а $B(z;a_\mu)$ и $B(z;b_\nu)$ — сходящиеся произведения Бляшке, нули которых удовлетворяют условиям

$$\sum_{(\mu)} \int_{|a_\mu|}^{1} \omega(x)\,dx < +\infty, \quad \sum_{(\nu)} \int_{|b_\nu|}^{1} \omega(x)\,dx < +\infty. \tag{4.3}$$

С другой стороны, известно (см. [1], теорему 8), что при условиях (4.3) утверждение теоремы справедливо для функций Бляшке $B(z; a_\mu)$ и $B(z; b_\nu)$. Одновременно, согласно теореме 1, наше утверждение справедливо и для экспоненциального множителя, участвующего в представлении (4.2).

Из сказанного выше непосредственно вытекает утверждение теоремы, если воспользоваться представлением (3.2) функции $F(z)$ и свойством (1.6) ω-емкости.

Таким образом, дан полный ответ на первый из поставленных в пункте 1° вопросов.

5°. Ответ на второй из поставленных там же вопросов дается в следующей основной теореме.

Теорема 3. *Пусть* $F(z) \in N\{\omega\}$, $\omega(x) \in \Omega_0$ *и* $E \subset [0, 2\pi]$ — *любое множество, для которого* $C_\omega(E) > 0$.

Пусть, далее, $\mu \prec E$, $\mu(E) = 1$ — *любая мера, обладающая свойством**

$$U_\omega(\mu) \equiv \sup_{|z|<1} U_\omega(z; \mu) = \sup_{|z|<1} \int_0^{2\pi} |C(ze^{-i\theta}; \omega)|\, d\mu(\theta) < +\infty. \tag{5.1}$$

Тогда для граничных значений $F(e^{i\theta})$ *функции* $F(z)$ *выполняется условие*

$$\int_E |\log|F(e^{i\theta})||\, d\mu(\theta) = \int_0^{2\pi} |\log|F(e^{i\theta})||\, d\mu(\theta) < +\infty. \tag{5.2}$$

Доказательство. Функция $F(z) \in N\{\omega\}$, $\omega(x) \in \Omega_0$ допускает представление вида (4.2). Обозначая

$$\Phi(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z; \omega)\, d\sigma(\theta)\right\}, \tag{5.3}$$

имеем, таким образом

$$F(z) = e^{i\gamma + \lambda k_\omega} z^\lambda \frac{B(z; a_\mu)}{B(z; b_\nu)} \Phi(z). \tag{5.4}$$

Отметим теперь, что ввиду соотношения

$$S(z; \omega) = 2C(z; \omega) - 1$$

для функции $\Phi(z)$ получим оценку

* Поскольку $C_\omega(E) > 0$, то хотя бы одна такая мера μ существует.

$$|\log|\Phi(re^{i\varphi})|| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |d\sigma(\theta)| +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |C(re^{i(\varphi-\theta)};\ \omega)|\ |d\sigma(\theta)|\ (0 \leqslant r < 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi). \tag{5.5}$$

Проинтегрировав неравенство (5.5) по любой мере $\mu \prec E$, $\mu(E) = 1$, подчиненной условию (5.1), мы получим

$$\int_E |\log|\Phi(re^{i\varphi})||\, d\mu(\varphi) \leqslant \{1+U_\omega(\mu)\}\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |d\sigma(\theta)| < +\infty \quad (0 \leqslant r < 1). \tag{5.6}$$

Поскольку, очевидно, $\Phi(z) \in N\{\omega\}$, согласно теореме 2 предел

$$\Phi(e^{i\varphi}) = \lim_{r\to 1-0} \Phi(re^{i\varphi}) \tag{5.7}$$

может не существовать лишь на множестве $e \in [0,2\pi]$, для которого $C_\omega(e)=0$. При этом очевидно, что $\mu(e)=0$.

Поэтому, переходя к пределу в неравенстве (5.6), в силу теоремы Фату [8], заключаем, что

$$\int_E |\log|\Phi(e^{i\varphi})||\, d\mu(\varphi) < +\infty. \tag{5.8}$$

Итак, для любой функции $\Phi(z)$ вида (5.3) утверждение нашей теоремы справедливо.

Установим теперь справедливость теоремы для любой функции Бляшке

$$B(z;\ z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1-\bar{z}_k z}\, \frac{|z_k|}{z_k},$$

нули $\{z_k\}_1^\infty$ которой подчинены условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty. \tag{5.9}$$

С этой целью отметим, что, как известно (см. [1], теорему 8), при условии (5.9)

$$\log|B(e^{i\varphi};\ z_k)| = \lim_{r\to 1-0} \log|B(re^{i\varphi};\ z_k)| = 0 \tag{5.10}$$

для всех $\varphi \in [0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $e_0 \subset [0,2\pi]$, для которого $C_\omega(e_0)=0$.

Следовательно, для каждого множества $E \subset [0,2\pi]$ и для каждой меры $\mu \prec E$, $\mu(E)=1$, подчиненной условиям теоремы из (5.10), следует, что

$$\int\limits_E |\log| B(e^{i\varphi}; z_k)|| \, d\mu(\varphi) = 0. \tag{5.11}$$

Наконец, полное доказательство теоремы следует из утверждений (5.8) и (5.11), если принять во внимание представление (5.4) функции $F(z)$.

6°. Следуя статье [2], обозначим через $A\{\omega\}$ множество *аналитических* в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, принадлежащих классу $N\{\omega\}$.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает следующая теорема единственности для функций класса $A\{\omega\}$, когда $\omega(x) \in \Omega_0$.

Теорема 4. *Пусть* $f(z) \in A\{\omega\}$ *и* $E \subset [0,2\pi]$ — *некоторое множество, для которого* $C_\omega(E) > 0$. *Пусть, далее, для некоторой меры* $\mu \prec E$, $\mu(E) = 1$

$$\sup_{|z|<1} U_\omega(z; \mu) < +\infty.$$

а) *Если для граничных значений* $f(e^{i\varphi})$ *функции* $f(z)$

$$\int\limits_E \log |f(e^{i\varphi})| \, d\mu(\varphi) = -\infty, \tag{6.1}$$

то $f(z) \equiv 0$;

б) *Если*

$$f(e^{i\varphi}) = 0, \quad \varphi \in E, \tag{6.2}$$

то $f(z) \equiv 0$.

В самом деле, если предположить, что $f(z) \not\equiv 0$, то согласно теореме 3 будем иметь

$$\int\limits_E |\log| f(e^{i\varphi})|| \, d\mu(\varphi) < +\infty,$$

что противоречит условию (6.1). Из условия же (6.2), очевидно, вытекает (6.1).

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Վ. Ս. ԶԱՎԱՐՅԱՆ Սահմանափակ տեսքի մերոմորֆ ֆունկցիաների ենթադասերի եզրային հատկությունները (*ամփոփում*)

Հոդվածը պարունակում է Ռ. Նևանլիննայի սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների N *դասին պատկանող որոշակի* $N\{\omega\}$ *ենթադասերի եզրային հատկություններին նվիրված հեղինակների համատեղ [1] հետազոտության 3 պարագրաֆի արդյունքների էական լրացումներ։*

Ներմուծելով ω*-ունակության հասկացողությունը, ապացուցվում են* $N\{\omega\}$ *դասերի ֆունկցիաների եզրային հատկություններին վերաբերվող թեորեմաներ։*

Հիմնական արդյունքներից մեկը կարելի է ձևակերպել այսպես՝ թող $\omega(x)$ *ֆունկցիան բավարարի որոշակի պայմանների, ապա ցանկացած* $F(z) \in N\{\omega\}$ *ֆունկցիայի համար հետևյալ վերջավոր սահմանը*

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta})$$

գոյություն ունի բոլոր $\theta \in [0,2\pi]$ համար, բացի, գուցե, մի բացառիկ $E \subset [0,2\pi]$ բազմության, որի ω-ունակությունը հավասար է զրոյի։

M. M. DŽRBAŠIAN, V. S. ZAKARIAN. *Boundary properties of subclasses of mehromorphic functions of bounded type* (summary)

The paper containes substaintial complements to the results of § 3 of the earlier oint paper of the same authors [1], which was devoted to the boundary properties of functions, belonging to the subclasses $N(\omega) \subset N$, N being the class of functions of bounded type of R. Nevanlinna.

The main result states, that under certain conditions on $\omega(x)$, for every $F(z) \in N(\omega)$ a finite limit

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta})$$

existes for all $\theta \in [0,2\pi]$, with exeption may be of a set $E \subset [0,2\pi]$, whose ω-capacity is zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 1970, 1262—1339.
2. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79 (121), 1969, 517—615.
3. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* О граничных свойствах мероморфных функций класса N_α, ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1247—1250. Граничные свойства мероморфных функций класса N_α, Изв. АН АрмССР, „Математика", II, № 5, 1967, 275—294.
4. *М. М. Джрбашян.* О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
5. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
6. *М. М. Джрбашян.*. Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 1075—1111.
7. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
8. *С. Сакс.* Теория интеграла, М., ИЛ, 1949.