

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

И. Ц. ГОХБЕРГ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ КОНЕЧНОМЕРНОМОРФНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

Фундаментальная статья М. В. Келдыша [1] посвящена теоремам о кратной полноте собственных и присоединенных векторов операторных полиномов с вполне непрерывными коэффициентами в гильбертовом пространстве.

В доказательствах основных теорем статьи [1] существенную роль играют некоторые новые понятия и общие предложения об операторных полиномах. Здесь имеются в виду понятия цепочки собственного и присоединенных векторов и кратности характеристического числа, формула для кратности характеристического числа и формула, выражающая главную часть резольвенты операторного полинома через его собственные и присоединенные векторы.

В последнее время эти понятия и результаты были существенно развиты (см. [2—7]). В настоящей статье содержится обзор результатов, полученных в этом направлении. Они, в основном, установлены с помощью нового метода факторизации оператор-функций. Ряд результатов публикуется впервые.

§ 1. Эквивалентность оператор-функций. Факторизация оператор-функции в точке

1. Пусть B_1 и B_2 — два банаховых пространства и $L(B_1 \rightarrow B_2)$ — пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из B_1 в B_2 . Через $M[\lambda_0] = M[\lambda_0; B_1 \rightarrow B_2]$, где λ_0 — некоторое комплексное число, обозначим совокупность всех оператор-функций $A(\lambda)$ со значениями из $L(B_1 \rightarrow B_2)$, голоморфных в точке λ_0 или имеющих в этой точке полюс. Условимся еще через $M_0[\lambda_0] = M_0[\lambda_0; B_1 \rightarrow B_2]$ обозначать множество оператор-функций из $M[\lambda_0]$, голоморфных и обратимых в точке λ_0 .

Две оператор-функции $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ будем называть эквивалентными в точке λ_0 , если существуют оператор-функция $F(\lambda) \in M_0[\lambda_0; B_1 \rightarrow B_1]$ и $E(\lambda) \in M_0[\lambda_0; B_2 \rightarrow B_2]$ такие, что имеет место равенство $A_1(\lambda) = E(\lambda) A_2(\lambda) F(\lambda)$ для всех $\lambda (\neq \lambda_0)$ из некоторой окрестности точки λ_0 .

Отношение эквивалентности естественным образом разбивает $M[\lambda_0]$ на классы эквивалентных между собой оператор-функций. В этом параграфе рассматривается задача о нахождении в каждом классе простейших представителей.

Пусть P_j ($j = 0, 1, \dots, n$) — некоторая система ортогональных между собой проекторов из $L(B_1 \rightarrow B_1)$, а D_1 — оператор из $L(B_1 \rightarrow B_2)$, отображающий изоморфно подпространство $\text{Im } \sum P_j (\subset B_1)$ на какое-либо подпространство из B_2 , имеющее прямое дополнение.

Оператор-функцию $D(\lambda) \in M[\lambda_0]$ вида

$$D(\lambda) = \sum_{j=0}^n (\lambda - \lambda_0)^{k_j} D_1 P_j, \quad (1.1)$$

где k_j — целые числа, назовем *степенной диагональной оператор-функцией* (в точке λ_0). Числа k_j ($j = 1, 2, \dots, n$) будем считать расположенными в порядке невозрастания.

Приведенное определение степенной диагональной оператор-функции эквивалентно следующему: $D(\lambda)$ имеет вид

$$D(\lambda) = \sum_{j=0}^n (\lambda - \lambda_0)^{k_j} Q_j D_2,$$

где Q_j ($j = 0, 1, \dots, n$) — система ортогональных между собой проекторов из $L(B_2 \rightarrow B_2)$, $D_2 \in L(B_1 \rightarrow B_2)$, причем подпространство $\text{Ker } D_2$ имеет прямое дополнение в B_1 и $\text{Im } \sum Q_j \subset \text{Im } M$.

Очевидно, диагональные степенные оператор-функции и только они допускают также симметричное представление вида

$$D(\lambda) = \sum_{j=0}^n (\lambda - \lambda_0)^{k_j} Q_j D P_j, \quad (1.2)$$

где $D \in L(B_1 \rightarrow B_2)$ — оператор, отображающий изоморфно $\text{Im } P_j$ на $\text{Im } Q_j$ ($j = 0, 1, \dots, n$), а $\{P_j\}_0^n$ и $\{Q_j\}_0^n$ — введенные выше системы проекторов.

Если оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ эквивалентна в точке λ_0 некоторой диагональной степенной оператор-функции $D(\lambda)$, то равенство $A(\lambda) = E(\lambda) D(\lambda) F(\lambda)$, устанавливающее эту эквивалентность, назовем *факторизацией* $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

2. Пусть оператор-функция $A(\lambda)$ из $M[\lambda_0]$ имеет вид

$$A(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j A_j. \quad (1.3)$$

Если в этом разложении операторы A_{-j} ($j = 1, 2, \dots, \nu$) конечномерны, то оператор-функция $A(\lambda)$ называется *конечномероморфной* в точке λ_0 .

Оператор $A \in L(B_1 \rightarrow B_2)$ называется *Ф-оператором* (см. [8]), если он нормально разрешим (то есть $\text{Im } A$ замкнуто), его ядро $\text{Ker } A = \{x: Ax = 0\}$ конечномерно и $\dim(B_2/\text{Im } A) < \infty$. Число

$$\text{Ind } A = \dim \text{Ker } A - \dim(B_2/\text{Im } A)$$

называется *индексом* Ф-оператора A .

Оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ называется *фредгольмовой* в точке λ_0 , если в разложении (1.3) оператор A_0 является Φ -оператором.

Степенная диагональная оператор-функция $D(\lambda)$, представленная в виде (1.2), является конечномероморфной и фредгольмовой в том и только том случае, когда выполняются следующие условия:

1. $\dim \operatorname{Im} P_j < \infty$, $j = 1, 2, \dots, n$; $\dim \operatorname{Im} (I - P_0) < \infty$;
2. $\dim \operatorname{Im} Q_j < \infty$, $j = 1, 2, \dots, n$; $\dim \operatorname{Im} (I - Q_0) < \infty$;
3. $k_0 = 0$.

Если эти условия выполнены, то без ограничения общности можно предполагать, что все числа $\dim \operatorname{Im} P_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), а следовательно, и числа $\dim \operatorname{Im} Q_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) равны единице. Этого предположения всюду в дальнейшем будем придерживаться.

Совокупность всех диагональных степенных конечномероморфных и фредгольмовых в точке λ_0 оператор-функций обозначим через $S[\lambda_0] = S[\lambda_0; B_1 \rightarrow B_2]$.

Если для оператор-функции $D(\lambda) \in S[\lambda_0]$, представленной в виде (1.2), $\dim \operatorname{Im} (I - P_0) = \dim \operatorname{Im} (I - Q_0)$, то оператор D можно считать обратимым. Если оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ эквивалентна такой степенной диагональной оператор-функции $D(\lambda)$ и $B_2 = B_1$, то, очевидно, факторизацию $A(\lambda)$ в точке λ_0 можно записать в виде

$$A(\lambda) = E(\lambda) \left(\sum_{j=1}^n (\lambda - \lambda_0)^{k_j} P_j + P_0 \right) F(\lambda). \quad (1.4)$$

3. Имеет место

Теорема 1.1. *Для того чтобы оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ была эквивалентна некоторой диагональной оператор-функции из $S[\lambda_0]$, необходимо и достаточно, чтобы $A(\lambda)$ была конечномероморфной и фредгольмовой в точке λ_0 .*

При дополнительном требовании $\operatorname{Ind} A_0 = 0$, где A_0 — оператор из разложения (1.3), эта теорема доказана в [4]. В общем случае она доказана в [5]. Ее доказательство из [5] можно значительно упростить, воспользовавшись схемой доказательства подобной теоремы 3 из [6].

Факторизацию (1.4) в точке λ_0 назовем *нормальной*, если $P_0 + P_1 + \dots + P_n = I$.

Из теоремы 1.1 непосредственно вытекает, что конечномероморфная и фредгольмова оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ допускает нормальную факторизацию в точке λ_0 в том и только том случае, когда все значения $A(\lambda)$ в некотором проколоте круге $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$ являются обратимыми операторами.

Отметим, что в факторизации (1.4) множители, вообще говоря, не зависят непрерывно от оператор-функции. В этом легко убедиться на примере факторизации матрицы-функции

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda - \lambda_0 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Каждой оператор-функции $D(\lambda) \in S[\lambda_0]$, представленной в виде (1.2), сопоставим набор чисел $\pi(D(\lambda)) = \{k_1, k_2, \dots, k_n, \omega^+, \omega^-\}$, где

$$\omega^+ = \omega^+(D(\lambda)) = \dim \operatorname{Im} \left(I - \sum_{j=0}^n P_j \right)$$

и

$$\omega^- = \omega^-(D(\lambda)) = \dim \operatorname{Im} \left(I - \sum_{j=1}^n Q_j \right).$$

Этот набор назовем *показателем* $D(\lambda)$.

Отметим, что если $D(\lambda) \in S[\lambda_0]$, то и $D^*(\lambda) \in S[\lambda_0; B_2^* \rightarrow B_1^*]$. Если при этом $\pi(D(\lambda)) = \{k_1, k_2, \dots, k_n, \omega^+, \omega^-\}$, то $\pi(D^*(\lambda)) = \{k_1, k_2, \dots, k_n, \omega^-, \omega^+\}$.

Для того чтобы две оператор-функции из $S[\lambda_0]$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их показатели совпадали. Достаточность условия этого утверждения очевидна. Его необходимость вытекает из результатов § 3 и § 6, в которых будет выяснена спектральная роль чисел $k_1, k_2, \dots, k_n, \omega^+$ и ω^- .

Таким образом, каждый класс эквивалентных между собой конечномерных фредгольмовых оператор-функций определяется набором $\{k_1, k_2, \dots, k_n; \omega^+, \omega^-\}$, являющимся показателем оператор-функции из $S[\lambda_0]$, входящей в этот класс.

§ 2. Корневые функции, полюсные функции и набор кратностей в точке

1. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$. Голоморфная в точке λ_0 вектор-функция $\varphi(\lambda)$ со значениями из B_1 и с $\varphi(\lambda_0) \neq 0$ называется *корневой функцией* оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 , если вектор-функция $A(\lambda)\varphi(\lambda)$ голоморфна в точке λ_0 и обращается в этой точке в нуль. Это определение развивает определение корневой (производящей) функции, введенное для аналитических оператор-функций независимо С. Г. Крейном и В. П. Трофимовым [9] и В. И. Мацаевым и Ю. А. Палантом [10].

Если у оператор-функции $A(\lambda)$ существует в точке λ_0 хотя бы одна корневая функция $\varphi(\lambda)$, то число λ_0 называется *характеристическим числом* $A(\lambda)$.

Кратность нуля вектор-функции $A(\lambda)\varphi(\lambda)$ в точке λ_0 называется *кратностью* корневой функции $\varphi(\lambda)$, а вектор $\varphi_0 = \varphi(\lambda_0)$ — *собственным вектором* $A(\lambda)$, соответствующим характеристическому числу λ_0 .

Все собственные векторы оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 вместе с нулевым вектором образуют линейное множество. Его замыкание называется *ядром* $A(\lambda)$ в точке λ_0 и обозначается через

$\text{Ker } A(\lambda_0)$. Рангом собственного вектора φ_0 называется максимальная из кратностей всех корневых функций $\varphi(\lambda)$ таких, что $\varphi(\lambda_0) = \varphi_0$, если кратности этих функций ограничены. Если эти кратности неограничены, то ранг φ_0 считается равным бесконечности. Через $\text{rang } \varphi_0$ обозначается ранг собственного вектора φ_0 .

Пусть $\alpha = \dim \text{Ker } A(\lambda_0) < \infty$ и ранги всех векторов $\varphi_0 \in \text{Ker } A(\lambda_0)$ конечны. Канонической системой собственных векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 называется базис $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\alpha$ подпространства $\text{Ker } A(\lambda_0)$, обладающий следующим свойством:

$$\text{rang } \varphi_j = \max_{\varphi \in L_j} \text{rang } \varphi \quad (j = 1, 2, \dots, \alpha),$$

где через L_j обозначена линейная оболочка векторов $\varphi_j, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_\alpha$.

Пусть $n_j = \text{rang } \varphi_j$ ($j = 1, 2, \dots, \alpha$). Легко видеть, что ранг любого собственного вектора $\varphi \in \text{Ker } A(\lambda_0)$ равен одному из чисел n_j . Следовательно, числа n_j ($j = 1, 2, \dots, \alpha$) определяются оператор-функцией $A(\lambda)$ однозначно (хотя сама каноническая система собственных векторов определяется, вообще говоря, неоднозначно). Числа n_j называются частными нулевыми кратностями, а набор $n(A(\lambda_0)) = \{n_1, n_2, \dots, n_\alpha\}$ — набором частных нулевых кратностей $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Если точка λ_0 не является характеристическим числом $A(\lambda)$ (то есть $\text{Ker } A(\lambda_0) = \{0\}$), то набор $n(A(\lambda_0))$ считается пустым.

Если оператор-функции $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda) \in M[\lambda_0]$ эквивалентны, то

есть $A_1(\lambda) = E(\lambda) A_2(\lambda) F(\lambda)$, где $E(\lambda) \in M_0[\lambda_0; B_2 \rightarrow B_2]$ и $F(\lambda) \in M_0[\lambda_0; B_1 \rightarrow B_1]$, то общий вид корневых функций $\varphi_2(\lambda)$ для $A_2(\lambda)$ в точке λ_0 дается равенством

$$\varphi_2(\lambda) = F(\lambda) \varphi_1(\lambda),$$

где $\varphi_1(\lambda)$ — произвольная корневая функция $A_1(\lambda)$ в точке λ_0 .

С помощью этого замечания легко доказывается

Теорема 2.1. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — конечномерная и фредгольмова в точке λ_0 оператор-функция и равенство

$$A(\lambda) = E(\lambda) D(\lambda) F(\lambda), \quad (2.1)$$

где

$$D(\lambda) = \sum_{j=1}^m (\lambda - \lambda_0)^{k_j} DP_j + DP_0, \quad (2.2)$$

является ее факторизацией в точке λ_0 . Пусть, кроме того, $P_0 + P_1 + \dots + P_m = I$, т. е. $\omega^+ = 0$. Тогда

$$\text{Ker } A(\lambda_0) = \text{Im } \sum_{k_j > 0} F^{-1}(\lambda_0) P_j,$$

система векторов $\{F^{-1}(\lambda_0) e_j\}_{k_j > 0}$, где e_j — ненулевой вектор из одномерного подпространства $\text{Im } P_j$, образует каноническую систему

собственных векторов, набор частных нулевых кратностей $n(A(\lambda_0))$ состоит из расположенных в порядке невозрастания чисел $\{k_j\}_{k_j > 0}$.

Пусть $A(\lambda_0) \in M[\lambda_0]$ и $n(A(\lambda_0)) = \{n_1, n_2, \dots, n_s\}$. Число $N(A(\lambda_0)) = n_1 + n_2 + \dots + n_s$ называется нулевой кратностью характеристического числа λ_0 оператор-функции $A(\lambda_0)$.

Если хотя бы один из рангов собственных векторов $A(\lambda)$, соответствующих числу λ_0 , бесконечен или $\dim \text{Ker } A(\lambda_0) = \infty$, то полагаем $N(A(\lambda_0)) = \infty$. Если в точке λ_0 оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ не имеет корневых функций, то будем считать $N(A(\lambda_0)) = 0$.

Легко видеть, что если для оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ имеет место равенство (2.1) и $D(\lambda)$ имеет вид (2.2), то

$$N(A(\lambda_0)) = \sum_{k_j > 0} k_j.$$

Изложенные в этом пункте результаты установлены в [4]. Приведенные определения также заимствованы из [4]. Эти определения являются естественным развитием аналогичных определений для случая голоморфных оператор-функций или операторных полиномов.

2. Голоморфную в точке λ_0 вектор-функцию $\chi(\lambda)$ со значениями из B_2 и с $\chi(\lambda_0) \neq 0$ назовем *полюсной функцией* оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ в точке λ_0 , если $\chi(\lambda)$ допускает представление $\chi(\lambda) = A(\lambda) \psi(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ — голоморфная в точке λ_0 вектор-функция со значениями из B_1 , причем $\psi(\lambda_0) = 0$. Легко видеть, что для оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ существует полюсная функция в точке λ_0 в том и только том случае, когда λ_0 является полюсом $A(\lambda)$. Порядок λ_0 как нуля функции $\psi(\lambda)$ называется *порядком* полюсной функции $\chi(\lambda)$, а вектор $\chi(\lambda_0)$ назовем *полюсным вектором* $A(\lambda)$, соответствующим полюсу λ_0 . Очевидно, порядок любой полюсной функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 не превосходит порядка полюса $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Все полюсные векторы оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 вместе с нулевым вектором образуют линейное множество. Его замыкание назовем *полюсным ядром* $A(\lambda)$ в точке λ_0 и обозначим через $\text{Pol } A(\lambda_0)$.

Рангом полюсного вектора $\gamma_0 \in \text{Pol } A(\lambda_0)$ назовем максимальный из порядков всех полюсных функций $\chi(\lambda)$ таких, что $\chi(\lambda_0) = \gamma_0$. Ранг γ_0 обозначим через $\text{rang } \gamma_0$.

Пусть $\beta = \dim \text{Pol } A(\lambda_0) < \infty$. Канонической системой полюсных векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 называется базис $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\beta$ подпространства $\text{Pol } A(\lambda_0)$, обладающий следующим свойством:

$$\text{rang } \gamma_j = \max_{\chi \in L_j} \text{rang } \chi \quad (j = 1, 2, \dots, \beta),$$

где через L_j обозначена линейная оболочка векторов $\gamma_j, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_\beta$.

Легко видеть, что ранг каждого полюсного вектора $\chi \in \text{Pol } A(\lambda_0)$ равен одному из чисел $p_j = \text{rang } \gamma_j$ ($j = 1, 2, \dots, \beta$). Следовательно, эти числа определяются оператор-функцией $A(\lambda)$ однозначно. Числа p_j назовем *частными полюсными порядками*, а набор $p(A(\lambda_0)) = \{p_1, p_2, \dots, p_\beta\}$ — *набором* частных полюсных порядков $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Если оператор-функция $A(\lambda)$ голоморфна в точке λ_0 , то будем считать набор $p(A(\lambda_0))$ пустым.

Набор частных полюсных порядков оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ в точке λ_0 определяется главной частью оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 , то есть набор частных полюсных порядков $A(\lambda)$ в точке λ_0 не меняется при добавлении к $A(\lambda)$ голоморфной в λ_0 оператор-функции $X(\lambda)$. В самом деле, пусть $\chi(\lambda)$ — полюсная функция порядка p оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 , то есть $\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^p A(\lambda) \psi(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ — голоморфная в λ_0 вектор-функция, для которой $\psi(\lambda_0) \neq 0$. Тогда, очевидно, вектор-функция $\chi_1(\lambda) = \chi(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^p X(\lambda) \psi(\lambda)$ является полюсной вектор-функцией $A(\lambda) + X(\lambda)$ того же порядка p .

Пусть оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ принимает обратимые значения всюду в окрестности точки λ_0 за исключением, быть может, самой точки λ_0 . Непосредственно из соответствующих определений вытекает, что полюсные функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 совпадают с корневыми функциями оператор-функции $A^{-1}(\lambda)$ в той же точке.

Кроме того, легко видеть, что в этом случае $p(A^{-1}(\lambda_0)) = p(A(\lambda_0))$.

Теорема 2.2. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — конечномерная и фредгольмова оператор-функция в точке λ_0 и равенство

$$A(\lambda) = E(\lambda) D(\lambda) F(\lambda), \quad (2.3)$$

где

$$D(\lambda) = \sum_{j=1}^m (\lambda - \lambda_0)^{k_j} DP_j + DP_0, \quad (2.4)$$

является ее факторизацией в точке λ_0 .

Тогда

$$\text{Pol } A(\lambda_0) = \text{Im} \sum_{k_j < 0} E(\lambda_0) DP_j,$$

система векторов $\{E(\lambda_0) De_j\}_{k_j < 0}$, где e_j — ненулевой вектор из n -номерного подпространства $\text{Im } P_j$, образует каноническую систему полюсных векторов, набор частных полюсных порядков $p(A(\lambda_0))$ состоит из расположенных в порядке невозрастания чисел $\{-k_j\}_{k_j < 0}$.

Эта теорема доказывается с помощью следующего простого замечания. Если оператор-функции $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ эквивалентны, то есть $A_1(\lambda) = E(\lambda) A_2(\lambda) F(\lambda)$, то их полюсные функции $\chi_1(\lambda)$ и $\chi_2(\lambda)$ связаны равенствами

$$\chi_1(\lambda) = E(\lambda) \chi_2(\lambda).$$

Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ и $p(A(\lambda_0)) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$. Число $P(A(\lambda_0)) = p_1 + p_2 + \dots + p_r$ называется полюсной кратностью полюса λ_0 оператор-функции $A(\lambda)$.

Если хотя бы один из рангов полюсных векторов $A(\lambda)$, соответствующих λ_0 , бесконечен или $\dim \text{Pol } A(\lambda_0) = \infty$, то полагаем $P(A(\lambda_0)) =$

$= \infty$. Если оператор-функция $A(\lambda)$ голоморфна в точке λ_0 , то будем считать $P(A(\lambda_0)) = 0$.

Отметим, что если для оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ имеет место равенство (2.3) и $D(\lambda)$ имеет вид (2.4), то

$$P(A(\lambda_0)) = - \sum_{k_j < 0} k_j.$$

3. Пусть для оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ заданы наборы $n(A(\lambda_0)) = \{n_1, n_2, \dots, n_\alpha\}$ и $p(A(\lambda_0)) = \{p_1, p_2, \dots, p_\beta\}$. Образует набор $m(A(\lambda_0)) = \{k_1, k_2, \dots, k_{\alpha+\beta}\}$, где $k_j = n_j$ ($j=1, 2, \dots, \alpha$) и $k_{\alpha+j} = -p_{\beta+1-j}$ ($j=1, 2, \dots, \beta$). Этот набор назовем *полным набором частных кратностей* оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает

Теорема 2.3. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — конечномероморфная и фредгольмова в точке λ_0 оператор-функция, эквивалентная диагональной оператор-функции $D(\lambda) \in S[\lambda_0]$ с показателем $\{k_1, k_2, \dots, k_r, 0, \infty\}$. Тогда

$$m(A(\lambda_0)) = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}.$$

Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ и $m(A(\lambda_0)) = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$. Число $M(A(\lambda_0)) = m_1 + m_2 + \dots + m_r$ называется *полной кратностью* числа λ_0 для оператор-функции $A(\lambda)$. Очевидно, $M(A(\lambda_0)) = N(A(\lambda_0)) - P(A(\lambda_0))$.

Отметим, что если пространство $B_1 = B_2$ гильбертово и все значения оператор-функции $A(\lambda) - I$ ($A(\lambda) \in M[\lambda_0]$) в окрестности точки λ_0 ($\lambda \neq \lambda_0$) являются ядерными операторами, то $M(A(\lambda_0))$ равно порядку функции $\det A(\lambda)$ в точке λ_0 (см. [17, 3, 4]).

Отметим еще, что для любой конечномероморфной и фредгольмовой в точке λ_0 оператор-функции $A(\lambda)$ имеет место равенство $m(A(\lambda_0)) = m(A^*(\lambda_0))$.

§ 3. Обобщение формулы М. В. Келдыша для главной части резольвенты

1. Пусть оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ и $\varphi(\lambda)$ — ее корневая функция в точке λ_0 кратности r . Если

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j \varphi_j,$$

то $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}$ называются *присоединенными* векторами к собственному вектору $\varphi_0 = \varphi(\lambda_0)$, а система $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}$ называется *цепочкой* из собственного и присоединенных векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 . Это определение естественным образом развивает первоначальное определение М. В. Келдыша для полиномиальных оператор-функций (см. [4]).

Пусть оператор $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ имеет вид

$$A(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j A_j.$$

Легко видеть, что система векторов $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ тогда и только тогда образует цепочку собственных и присоединенных векторов, когда существуют векторы $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots, \varphi_{n+\nu}$ такие, что выполняются соотношения

$$\sum_{j=-\infty}^s A_j \varphi_{s-j} = 0 \quad (s = -\nu, -\nu+1, \dots, n).$$

Рассмотрим случай, когда для оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ число λ_0 является характеристическим и $A(\lambda)$ имеет в точке λ_0 конечную нулевую кратность. Предположим, что $\varphi_0^{(1)}, \varphi_0^{(2)}, \dots, \varphi_0^{(a)}$ образует каноническую систему собственных векторов $A(\lambda)$, отвечающих числу λ_0 . Обозначим через $\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j}^{(j)}$, где $n_j = \text{rang } \varphi_0^{(j)}$, цепочку присоединенных векторов к $\varphi_0^{(j)}$. Система

$$\varphi_0^{(j)}, \varphi_1^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j}^{(j)} \quad (j=1, 2, \dots, a)$$

называется *канонической* системой собственных и присоединенных векторов оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Точка λ_0 называется *нормальной* точкой оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$, если в этой точке $A(\lambda)$ конечномероморфна и фредгольмова и во всех $\lambda (\neq \lambda_0)$ из некоторой окрестности λ_0 значения $A(\lambda)$ являются обратимыми операторами. Как уже отмечалось в § 1, точка λ_0 является нормальной для оператор-функции $A(\lambda)$ в том и только том случае, когда $A(\lambda)$ допускает нормальную факторизацию в этой точке. Отсюда непосредственно вытекает, что если точка λ_0 является нормальной для $A(\lambda)$, то она является также нормальной для $A^{-1}(\lambda)$.

Условимся через $\Xi(A(\lambda))$ обозначать главную часть оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ в точке λ_0 .

Теорема 3.1. Пусть λ_0 является нормальной точкой оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$. Тогда существуют канонические системы

$$\varphi_0^{(j)}, \varphi_1^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j}^{(j)} \quad (j=1, 2, \dots, a)$$

и

$$\Psi_0^{(j)}, \Psi_1^{(j)}, \dots, \Psi_{n_j}^{(j)} \quad (j=1, 2, \dots, a)$$

собственных и присоединенных векторов в точке λ_0 соответственно оператор-функций $A(\lambda)$ и $A^*(\lambda)$, такие, что

$$\Xi(A^{-1}(\lambda))x = \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^{n_j} (\lambda - \lambda_0)^{-k} \sum_{r=0}^{n_j-k} \Psi_r^{(j)}(x) \varphi_{n_j-k-r}^{(j)}. \quad (3.1)$$

Для случая операторных полиномов в гильбертовом пространстве эта теорема установлена М. В. Келдышем [1]. В приведенном виде она доказана в [4]. Ее доказательство проводится сперва для диаго-

нальных оператор-функций из $S[\lambda_0]$, а затем с помощью факторизации распространяется на общий случай.

2. Формула (3.1) позволяет выразить главную часть оператор-функции $A_1(\lambda) = A^{-1}(\lambda)$ в точке λ_0 через некоторые коэффициенты Тейлора определенной системы полюсных функций оператор-функций $A_1(\lambda)$ и $A_1^*(\lambda)$ в точке λ_0 . Эта интерпретация формулы (3.1) позволяет ее обобщить для любых конечномероморфных и фредгольмовых в точке λ_0 оператор-функций. Для формулировки соответствующего обобщения понадобится определение присоединенных векторов к полюсному вектору.

Пусть $\chi(\lambda)$ — полюсная функция оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ в точке λ_0 и

$$\chi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j (\lambda - \lambda_0)^j.$$

Если порядок $\chi(\lambda)$ равен p , то векторы $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{p-1}$ назовем *присоединенными* к полюсному вектору χ_0 , а систему векторов $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_p$ ($p \leq r-1$) будем называть *цепочкой* из полюсного и присоединенных к нему векторов.

Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ и в точке λ_0 оператор-функция $A(\lambda)$ имеет конечную полюсную кратность. Обозначим через $\chi_0^{(1)}, \chi_0^{(2)}, \dots, \chi_0^{(\beta)}$ ($\beta = \dim \text{Pol } A(\lambda_0)$) каноническую систему полюсных векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 и через p_j — числа $\text{rang } \chi_0^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, \beta$). Если для каждого $j = 1, 2, \dots, \beta$ система $\chi_0^{(j)}, \chi_1^{(j)}, \dots, \chi_{p_j-1}^{(j)}$ образует цепочку из полюсного и присоединенного к нему векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 , то систему

$$\chi_0^{(j)}, \chi_1^{(j)}, \dots, \chi_{p_j-1}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, \beta) \quad (3.2)$$

назовем *канонической системой* полюсных и присоединенных векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Если оператор-функция является конечномероморфной и фредгольмовой в точке λ_0 , то таковой является и $A^*(\lambda)$, причем $p(A(\lambda_0)) = p(A^*(\lambda_0))$. Последнее непосредственно следует из возможности факторизации оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Теорема 3.2. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — конечномероморфная и фредгольмова в точке λ_0 оператор-функция. Тогда существуют канонические системы

$$\chi_0^{(j)}, \chi_1^{(j)}, \dots, \chi_{p_j-1}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, \beta)$$

и

$$Z_0^{(j)}, Z_1^{(j)}, \dots, Z_{p_j-1}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, \beta)$$

полюсных и присоединенных векторов в точке λ_0 соответственно оператор-функций $A(\lambda)$ и $A^*(\lambda)$ такие, что для главной части $\Xi(A(\lambda))$ оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 имеет место представление

$$\Xi(A(\lambda))x = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{p_j} (\lambda - \lambda_0)^{-k} \sum_{r=0}^{p_j-k} Z_r^{(j)}(x) \chi_{p_j-k-r}. \quad (3.3)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1. Учитывая, что корневые функции $A(\lambda)$ в нормальной точке λ_0 совпадают с полюсными функциями $A^{-1}(\lambda)$ в этой точке, можно из теоремы 3.2 вывести теорему 3.1.

3. Формула (3.3) позволяет получить главную часть конечномероморфной и фредгольмовой в точке λ_0 оператор-функции $A(\lambda)$ по каноническим системам полюсных и присоединенных к ним векторов $A(\lambda)$ и $A^*(\lambda)$. В этом пункте решается обратная задача. Указывается правило построения канонической системы полюсных и присоединенных к ним векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 по $\Xi(A(\lambda))$.

Пусть $A(\lambda)$ — конечномероморфная в точке λ_0 оператор-функция и

$$\Xi(A(\lambda)) = (\lambda - \lambda_0)^{-1} K_1 + (\lambda - \lambda_0)^{-\nu+1} K_2 + \dots + (\lambda - \lambda_0)^{-1} K_\nu.$$

Обозначим через U_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) пересечение ядер операторов $K_1, K_2, \dots, K_j$ и через V_j какое-либо дополнение к U_j в U_{j-1} ($U_0 = B_1$). Положим $V_1 = I_1$, а подпространства V_j ($j=2, 3, \dots, \nu$) разложим в прямую сумму $V_j = H_j + H_j'$ так, чтобы выполнялись следующие соотношения

$$K_j H_j \subset K_1 H_1 + K_2 H_2 + \dots + K_{j-1} H_{j-1} \quad (j=2, 3, \dots, \nu)$$

и

$$K_j H_j \cap (K_1 H_1 + K_2 H_2 + \dots + K_{j-1} H_{j-1}) = \{0\} \quad (j=2, 3, \dots, \nu).$$

При этих обозначениях имеет место

Теорема 3.3. Для конечномероморфной в точке λ_0 оператор-функции $A(\lambda)$ имеет место равенство

$$\text{Pol } A(\lambda_0) = K_1 H_1 + K_2 H_2 + \dots + K_\nu H_\nu.$$

Для любого ненулевого вектора $\psi \in H_j$ ($j=1, 2, \dots, \nu$) векторы

$$\chi^{(0)} = K_j \psi, \chi^{(1)} = K_{j-1} \psi, \dots, \chi^{(\nu-j)} = K_\nu \psi \quad (3.4)$$

образуют цепочку из полюсного и присоединенных векторов для $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Пусть $\{\psi_l\}_{l=1}^p$ — объединение базисов всех подпространств H_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) и $\{\chi_l^{(k)}\}$ ($l=1, 2, \dots, p$) — система, построенная для вектора $\psi = \psi_l$ по правилу (3.4). Тогда системы $\{\chi_l^{(k)}\}$ ($l=1, 2, \dots, p$) образуют каноническую систему полюсных и присоединенных векторов для $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

В случае, когда λ_0 является нормальной точкой оператор-функции $A(\lambda)$, теорема 3.3 дает правило построения канонической системы собственных и присоединенных векторов для $A(\lambda)$ в точке λ_0 по коэффициентам главной части оператора $A^{-1}(\lambda)$.

§ 4. Основные теоремы об оператор-функциях, нормальных в области

1. Пусть G — некоторая область в комплексной плоскости. Оператор-функция $A(\lambda)$ со значениями из $L(B_1 \rightarrow B_2)$ называется *нормальной* в G , если она голоморфна и обратима всюду в G за исключением, быть может, конечного числа точек, которые являются ее нормальными точками. Эти исключительные точки назовем *особыми точками* $A(\lambda)$.

Положим

$$M(A(\lambda); G) = \sum_{j=1}^k M(A(\lambda_j)),$$

где λ_j ($j = 1, 2, \dots, k$) — все особые точки $A(\lambda)$ в G .

Через $N[G] = N[G; B_1 \rightarrow B_2]$ обозначим множество всех нормальных оператор-функций в области G , а через $M_0[G] = M_0[G; B_1 \rightarrow B_2]$ обозначим множество всех голоморфных в G оператор-функций, все значения которых обратимы.

Теорема 4.1. Пусть оператор-функция $A(\lambda) \in N[G]$. Тогда

$$M(A(\lambda); G) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{sp} \int_{\Gamma} A'(\lambda) A^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad (4.1)$$

где Γ — простой замкнутый контур, содержащийся в G и ограничивающий область, в которую попадают все особые точки $A(\lambda)$ из G .

Оператор, стоящий под знаком следа в правой части равенства (4.1), конечномерен. След этого оператора равен сумме всех его собственных чисел (с учетом их кратностей).

Теорема 4.1 установлена в [4]. Она выводится из следующей теоремы.

Теорема 4.2. Пусть λ_0 — нормальная точка оператор-функции $A(\lambda)$, тогда

$$M(A(\lambda_0)) = (\lambda - \lambda_0) \operatorname{sp} \Xi(A'(\lambda) A^{-1}(\lambda)).$$

Именно в такой формулировке для случая полиномиальных операторных пучков эта теорема установлена М. В. Келдышем [1]. Для голоморфных оператор-функций она доказана А. С. Маркусом и Е. И. Сигалом [3].

В [4] теорема 4.2 доказана с помощью теоремы 1.1 о факторизации.

Как и в классической теории функций, теорема 4.1 допускает следующее обобщение, полученное в [4].

Теорема 4.3. Пусть $A(\lambda) \in N[G]$ и $f(\lambda)$ — аналитическая в G скалярная функция, тогда

$$\operatorname{sp} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) A'(\lambda) A^{-1}(\lambda) d\lambda = \sum_{j=1}^k M(A(\lambda_j)) f(\lambda_j),$$

где Γ — такой же контур, как в теореме 4.1, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — система всех особых точек $A(\lambda)$ из G .

Из теоремы 4.2 легко выводится

Теорема 4.4. Если точка λ_0 является нормальной для оператор-функций $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda) \in M[\lambda_0]$, то она является нормальной и для их произведения $A(\lambda) = A_1(\lambda) A_2(\lambda)$, причем

$$M(A(\lambda_0)) = M(A_1(\lambda_0)) + M(A_2(\lambda_0)).$$

Эта теорема для голоморфных оператор-функций установлена в [3, 11]. В общем случае она получена в [4].

С помощью теоремы 4.4 доказывается следующая теорема о выделении особенностей.

Теорема 4.5. Пусть $A(\lambda) \in N[G]$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — система всех особых точек $A(\lambda)$ в G . Тогда $A(\lambda)$ допускает следующие представления

$$A(\lambda) = E(\lambda) (I + K(\lambda)), \quad A(\lambda) = (I + R(\lambda)) F(\lambda),$$

где $E(\lambda)$ и $F(\lambda) \in M_0[G]$, а $K(\lambda)$ и $R(\lambda)$ — рациональные в G оператор-функции вида

$$K(\lambda) = \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j} (\lambda - \lambda_j)^{-\nu} K_{\nu j}, \quad R(\lambda) = \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j} (\lambda - \lambda_j)^{\nu} R_{\nu j}$$

с конечномерными коэффициентами $K_{\nu j}$ и $R_{\nu j}$.

2. Оператор-функцию $A(\lambda) \in N[G]$ назовем вполне нормальной, если $A(\lambda)$ допускает расширение по непрерывности на замыкание G и во всех граничных точках G оператор-функция $A_1(\lambda)$ принимает обратимые значения.

Теорема 4.6. Пусть оператор-функция $A_1(\lambda)$ вполне нормальна в области G с границей Γ . Если конечномерноморфная* в G и непрерывная вплоть до Γ оператор-функция $A_2(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\rho(A_1^{-1}(\lambda) A_2(\lambda)) < 1 \quad (\lambda \in \Gamma),$$

где $\rho(C)$ — спектральный радиус оператора C , то оператор-функция $A(\lambda) = A_1(\lambda) + A_2(\lambda)$ вполне нормальна в G и

$$M(A(\lambda); G) = M(A_1(\lambda); G).$$

При дополнительных ограничениях эта теорема установлена в [2, 3]. Во всей общности она содержится в [4].

§ 5. Факторизация оператор-функций относительно контура

1. Пусть Γ — линия в комплексной плоскости, состоящая из конечного числа непересекающихся замкнутых спрямляемых жордановых

* Оператор-функция $A(\lambda)$ называется конечномерноморфной в области G , если она конечномерноморфна во всех точках этой области.

кривых. Предполагается, что контур Γ разбивает расширенную плоскость на два открытых множества G^+ и G^- , причем каждая точка Γ является граничной как для G^+ , так и для G^- . Кроме того, предполагается, что бесконечно удаленная точка принадлежит G^- и $0 \in G^+$.

В этом параграфе рассматривается случай $B_1 = B_2 = B$.

В статье [12] было введено следующее определение факторизации оператор-функций. Пусть $A(\lambda)$ ($\lambda \in \Gamma$) — непрерывная на Γ оператор-функция в $L = L(B \rightarrow B)$. Представление оператор-функции $A(\lambda)$ в виде

$$A(\lambda) = A_-(\lambda) D(\lambda) A_+(\lambda) \quad (\lambda \in \Gamma) \quad (5.1)$$

называется *факторизацией* оператор-функций $A(\lambda)$ относительно контура Γ , если множители обладают следующими свойствами:

1) оператор-функция $D(\lambda)$ имеет вид

$$D(\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda^{x_j} P_j + P_0,$$

где операторы P_j ($j=1, 2, \dots, n$) являются взаимно ортогональными одномерными проекторами из L , $P_0 = I - \sum_{j=1}^n P_j$ и $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ — некоторые целые числа, отличные от нуля;

2) оператор-функции $A_-(\lambda)$, $A_+(\lambda)$ допускают продолжения, голоморфные внутри и непрерывные в множествах $G^- \cup \Gamma$, $G^+ \cup \Gamma$, причем все значения оператор-функций $A_-(\lambda)$ и их продолжения обратимы.

Если оператор-функция $A(\lambda)$ ($\lambda \in \Gamma$) допускает факторизацию, то, как показано в [12], числа $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ однозначно определяются самой оператор-функцией $A(\lambda)$. Число $\text{Ind } A(\lambda)$, определяемое равенством

$$\text{Ind } A(\lambda) = \sum_{j=1}^n x_j (= \text{Ind } (A(\lambda); \Gamma))$$

назовем *суммарным индексом* оператор-функции $A(\lambda)$.

Теорема 5.1. Пусть $A(\lambda)$ ($\lambda \in \Gamma$) — непрерывная оператор-функция со значениями из L , допускающая продолжение в $\Gamma \cup G^+$, являющееся вполне нормальной в G^+ оператор-функцией.

Тогда оператор-функция $A(\lambda)$ допускает факторизацию (5.1) относительно контура Γ (со свойствами 1) и 2)), причем множитель $A_-(\lambda)$ может быть выбран так, чтобы он имел вид

$$A_-(\lambda) = I + \sum_{r=1}^k \sum_{j=-n_r}^0 (\lambda - a_r)^j K_{rj}, \quad (5.2)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k \in G^+$ и операторы K_{rj} конечномерны.

Эта теорема доказывается сведением к конечномерному случаю. Последнее возможно произвести в силу теоремы 4.5.

Теорема 5.1 сохраняет силу, если в ее формулировке заменить G^+ на G^- , а формулу (5.2) заменить на соответствующую формулу

для $A(i)$. Эти две теоремы позволяют легко доказать следующее предложение.

Теорема 5.2. *Оператор-функция $A(i)$ ($i \in \Gamma$) с обратимыми значениями допускает факторизацию относительно контура Γ в том и только том случае, когда она представима в виде $A(i) = X(i) Y(i)$, где $X(i)$ — вполне нормальная оператор-функция в G^- , а $Y(i)$ вполне нормальна в G^+ .*

2. В следующем предложении указывается формула для вычисления суммарного индекса.

Теорема 5.3. *Для каждой вполне нормальной в G^+ оператор-функции $A(i)$ имеет место равенство*

$$\text{Ind}(A(i); \Gamma) = M(A(i); G^+).$$

Если оператор-функция $dA(i)/di$ ($i \in G^+$) допускает непрерывное продолжение на Γ , то, кроме того, имеет место равенство

$$\text{Ind}(A(i); \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{sp} \int_{\Gamma} A'(i) A^{-1}(i) di.$$

Аналогичная теорема справедлива в случае, когда оператор-функция $A(i)$ вполне нормальна в G^- .

Из теоремы 5.3 легко выводится равенство

$$\text{Ind}(A_1(i) A_2(i)) = \text{Ind}(A_1(i)) + \text{Ind}(A_2(i))$$

для случая, когда $A_1(i)$ и $A_2(i)$ одновременно являются вполне нормальными в G^+ или G^- , а также в случае, когда $A(i)$ вполне нормальна в G^- , а $A_2(i)$ вполне нормальна в G^+ .

Результаты этого параграфа получены совместно с Ю. Лайтерером. При более ограничительных условиях теорема 5.1 установлена в [12].

§ 6. Нулевые фактор-кратности оператор-функций

1. Пусть $A(i) \in M[l_0]$ и пусть λ_0 — характеристическое число $A(i)$. Все собственные векторы бесконечного ранга $A(i)$ в точке λ_0 вместе с нулевым вектором образуют линейное множество. Его замыкание обозначим через $U(A(\lambda_0))$. Фактор-пространство $\text{Ker } A(\lambda_0)/U(A(\lambda_0))$ называется *фактор-ядром* $A(i)$ в точке λ_0 и обозначается через $\overline{\text{Ker}} A(\lambda_0)$.

Элементами фактор-ядра являются классы собственных векторов, ранги которых конечны и равны между собой. Эти классы называются *собственными фактор-векторами* оператор-функции $A(i)$ в точке λ_0 . Если $\Phi \in \overline{\text{Ker}} A(\lambda_0)$, то *рангом* Φ называется ранг любого собственного вектора класса Φ . Ранг Φ обозначается через $\text{Rang } \Phi$.

Пусть $\alpha = \dim \text{Ker } A(\lambda_0) < \infty$. Канонической системой собственных фактор-векторов $A(i)$, отвечающей числу λ_0 , называется система

фактор-векторов $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_\alpha$, ранги которых обладают следующим свойством: $\text{Rang } \Phi_1$ является максимальным из рангов всех собственных фактор-векторов, соответствующих λ_0 , а $\text{Rang } \Phi_j$ ($j = 2, 3, \dots, \alpha$) является максимальным из рангов всех собственных фактор-векторов из какого-нибудь прямого дополнения в $\text{Ker } A(\lambda_0)$ к линейной оболочке фактор-векторов $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{j-1}$.

Пусть $n_j = \text{Rang } \Phi_j$ ($j = 1, 2, \dots, \alpha$). Легко видеть, что ранг любого собственного фактор-вектора Φ , соответствующего числу λ_0 , всегда равен одному из чисел n_j . Следовательно, числа n_j ($j = 1, 2, \dots, \alpha$) определяются оператор-функцией $A(\lambda)$ однозначно (сама каноническая система собственных фактор-векторов определяется, вообще говоря, неоднозначно). Числа n_j называются *частными нулевыми фактор-кратностями* оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 , а набор $\bar{n}(A(\lambda_0)) = [n_1, n_2, \dots, n_\alpha]$ — *набором частных нулевых фактор-кратностей*. Число $\bar{N}(A(\lambda_0)) = \sum_{j=1}^{\alpha} n_j$ называется *нулевой фактор-кратностью* опера-

тор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 . Если $\text{Ker } A(\lambda_0) = U(A(\lambda_0))$, то положим $\bar{N}(A(\lambda_0)) = 0$ и будем считать набор $\bar{n}(A(\lambda_0))$ пустым.

Если $\dim \text{Ker } A(\lambda_0) = \infty$, то положим $\bar{N}(A(\lambda_0)) = \infty$. Легко видеть, что если ранги всех собственных векторов $A(\lambda)$, соответствующих λ_0 , конечны, то есть $\text{Ker } A(\lambda_0) = \text{Ker } A(\lambda_0)$, то $\bar{N}(A(\lambda_0)) = \bar{N}(A(\lambda_0))$ и $\bar{n}(A(\lambda_0)) = \bar{n}(A(\lambda_0))$.

Если оператор-функции $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda) \in M[\lambda_0]$ эквивалентны в точке λ_0 , то $\bar{n}(A_1(\lambda_0)) = \bar{n}(A_2(\lambda_0))$ и, следовательно, $\bar{N}(A_1(\lambda_0)) = \bar{N}(A_2(\lambda_0))$.

Теорема 6.1. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — конечномероморфная и фредгольмова в точке λ_0 оператор-функция и равенство

$$A(\lambda) = E(\lambda) D(\lambda) F(\lambda),$$

где $D(\lambda) = \sum_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j)^{k_j} Q_j D P_j + Q_0 D P_0$, является ее факторизацией в точке λ_0 . Тогда имеют место равенства

$$\text{Ker } A(\lambda_0) = \text{Im } F_n^{-1}(\lambda_0) \left(I - \sum_{k_j > 0} P_j - P_0 \right),$$

$$U(A(\lambda_0)) = \text{Im } F^{-1}(\lambda_0) \left(I - \sum_{j=0}^n P_j \right), \quad U(A^*(\lambda_0)) = \text{Im } E^{*-1}(\lambda_0) \left(I^* - \sum_{j=0}^n Q_j^* \right),$$

$$\omega^+(D(\lambda_0)) = \dim U(A(\lambda_0)) \quad \text{и} \quad \omega^-(D(\lambda_0)) = \dim U(A^*(\lambda_0)).$$

Набор частных нулевых фактор-кратностей $\bar{n}(A(\lambda_0))$ совпадает с системой чисел $\{k_j\}_{k_j > 0}$ и

$$\bar{N}(A(\lambda_0)) = \sum_{k_j=0} k_j.$$

Конечномероморфная в области G оператор-функция называется *фредгольмовой* в этой области, если она фредгольмова во всех точках G . С помощью теоремы 6.1 легко доказывается

Теорема 6.2. Пусть $A(\lambda)$ — конечномероморфная и фредгольмова оператор-функция в области G . Тогда для всех точек $\lambda \in G$ число $\dim U(A(\lambda_0))$ принимает одно и то же значение. Всюду за исключением, быть может, конечного или счетного множества точек с предельными на границе G , имеет место равенство $\text{Ker } A(\lambda) = U(A(\lambda))$; в упомянутых изолированных точках $\bar{N}(A(\lambda)) > 0$ и $\text{Ker } A(\lambda) \supset U(A(\lambda))$.

Теоремы 6.1 и 6.2 установлены в [4, 5]. Для голоморфных оператор-функций теорема 6.2 доказана в [13] в более общем случае. Часть утверждений теоремы 6.2 установлена ранее для голоморфных оператор-функций в [14] и для некоторых классов конечномероморфных оператор-функций в [15] и [16].

Точку λ_0 назовем *особой* точкой оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$, если λ_0 является полюсом $A(\lambda)$ или $\bar{N}(A(\lambda_0)) > 0$.

Теорема 6.3. Пусть $A(\lambda)$ — конечномероморфная и фредгольмова оператор-функция в области G и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — все особые точки $A(\lambda)$ в G . Тогда $A(\lambda)$ можно представить в виде

$$A(\lambda) = A_1(\lambda)(I + K(\lambda)), \quad A(\lambda) = (I + R(\lambda))A_2(\lambda),$$

где $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ — голоморфные и фредгольмовы в G оператор-функции, для которых

$$U(A_j(\lambda)) = \text{Ker } A_j(\lambda) \quad (\lambda \in G; j=1, 2);$$

оператор-функции $K(\lambda)$ и $R(\lambda)$ имеют вид

$$K(\lambda) = \sum_{l=1}^s \sum_{\nu=-n_j}^{m_j} (\lambda - \lambda_j)^\nu K_{jl},$$

и

$$R(\lambda) = \sum_{l=1}^s \sum_{\nu=-p_j}^{q_j} (\lambda - \lambda_j)^\nu R_{jl},$$

где K_{jl} и R_{jl} — конечномерные операторы. Кроме того

$$n(I + K(\lambda)) = n(I + R(\lambda)) = \bar{n}(A(\lambda)) \quad (\lambda \in G).$$

2. Теорему 4.4 о кратности произведения оператор-функций можно дополнить следующим предложением.

Теорема 6.4. Пусть $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — две конечномероморфные и фредгольмовы в точке λ_0 оператор-функции. Тогда для их произведения $A(\lambda) = A_1(\lambda)A_2(\lambda)$ имеют место соотношения

$$\bar{N}(A(\lambda_0)) \leq \bar{N}(A_1(\lambda_0)) + \bar{N}(A_2(\lambda_0)), \quad P(A(\lambda_0)) \leq P(A_1(\lambda_0)) + P(A_2(\lambda_0)) \quad (6.1)$$

и

$$\dim U(A(\lambda_0)) \leq \dim U(A_1(\lambda_0)) + \dim U(A_2(\lambda_0)).$$

Эта теорема по существу установлена в [7]. Из нее вытекает, что если $U(A_1(\lambda_0)) = U(A_2(\lambda_0)) = \{0\}$, то $U(A(\lambda_0)) = \{0\}$ и

$$N(A(\lambda_0)) \leq N(A_1(\lambda_0)) + N(A_2(\lambda_0)).$$

Для формулировки одного уточнения теоремы 6.2 введем следующие обозначения.

Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$, причем $\bar{n}(A(\lambda_0)) = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ и $p(A(\lambda_0)) = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$. Числа $\bar{n}_j(A(\lambda_0))$ и $p_j(A(\lambda_0))$ ($j=1, 2, \dots$) определим равенствами

$$\bar{n}_j(A(\lambda_0)) = \begin{cases} n_j; & j \leq k \\ 0; & j > k \end{cases}; \quad p_j(A(\lambda_0)) = \begin{cases} p_j; & j \leq s \\ 0; & j > s \end{cases}.$$

Теорема 6.5. При условиях теоремы 6.4 имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^m \bar{n}_j(A(\lambda_0)) \leq \sum_{j=1}^m \bar{n}_j(A_1(\lambda_0)) + \sum_{j=1}^m \bar{n}_j(A_2(\lambda_0)) \quad (m=1, 2, \dots)$$

и

$$\sum_{j=1}^m p_j(A(\lambda_0)) \leq \sum_{j=1}^m p_j(A_1(\lambda_0)) + \sum_{j=1}^m p_j(A_2(\lambda_0)) \quad (m=1, 2, \dots).$$

Эта теорема доказывается с помощью теоремы 6.4.

3. Рассмотрим еще изменение кратности оператор-функции при ее малых возмущениях, если не выполнены условия теоремы 4.6 о полной нормальности невозмущенной оператор-функции.

Теорема 6.5. Пусть $A_1(\lambda)$ — голоморфная и фредгольмова оператор-функция в замыкании области G , причем для всех $\lambda \in G$, за исключением, быть может, конечного числа точек, $\dim \text{Ker } A(\lambda) = 0$. Пусть Γ — граница области G . Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что всякая оператор-функция $A_2(\lambda)$, голоморфная в G , непрерывная вплоть до Γ и удовлетворяющая условию

$$\max_{\lambda \in \Gamma} \|A_1(\lambda) - A_2(\lambda)\| < \delta,$$

является фредгольмовой в $GU\Gamma$, причем

$$N(A_2(\lambda); G) \leq N(A_1(\lambda); G),$$

где через $N(A(\lambda); G)$ обозначена сумма нулевых кратностей $A(\lambda)$ во всех особых точках из G .

Каким бы малым ни было число δ , величина $N(A_2(\lambda); G)$ при соответствующем выборе $A_2(\lambda)$ может принимать все значения от нуля до $N(A(\lambda); G)$.

Теорема 6.5 установлена в [17]. В [7] предложено другое доказательство этой теоремы и установлено последнее замечание.

§ 7. Факторизация оператор-функций в области и ее приложения

1. Пусть G — некоторая область комплексной плоскости. Через $M[G] = M[G; B_1 \rightarrow B_2]$ обозначим множество оператор-функций $A(\lambda)$ ($\lambda \in G$) со значениями из $L(B_1 \rightarrow B_2)$, каждая из которых гооморфна всюду в G , за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет полюсы.

Оператор-функцию $D(\lambda) \in M[G]$ назовем *диагональной рациональной* в G , если она представима в виде

$$D(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} r_j(\lambda) Q_j D P_j, \quad (7.1)$$

где $r_j(\lambda)$ — рациональные функции, все нули и полюсы которых лежат в G , P_j ($j = 1, 2, \dots, k$) — система взаимно ортогональных проекторов в пространстве B_1 , Q_j ($j = 0, 1, \dots, k$) — система взаимно ортогональных проекторов в пространстве B_2 , а $D \in L(B_1 \rightarrow B_2)$ — оператор, изоморфно отображающий подпространство $\text{Im } P_j$ на подпространство $\text{Im } Q_j$ ($j = 0, 1, \dots, k$).

Легко видеть, что диагональная рациональная в G оператор-функция $D(\lambda)$ конечномероморфна и фредгольмова в G в том и только том случае, когда $D(\lambda)$ допускает представление (7.1) со следующими дополнительными свойствами:

$$\dim Q_j = \dim P_j = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad r_0(\lambda) \equiv 1 \quad (7.2)$$

и

$$\dim(I - P_0) < \infty, \quad \dim(I - Q_0) < \infty. \quad (7.3)$$

Обозначим через $S[G]$ множество всех конечномероморфных и фредгольмовых в G диагональных и рациональных оператор-функций. При этом будем всегда предполагать, что они представлены в виде (7.1) и выполняются соотношения (7.2), (7.3).

Две оператор-функции $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda) \in M[G]$ назовем *эквивалентными* в G , если $A_1(\lambda) = E(\lambda) A_2(\lambda) F(\lambda)$, где $E(\lambda) \in M_0[G; B_2 \rightarrow B_2]$ и $F(\lambda) \in M_0[G; B_1 \rightarrow B_1]$. Если оператор-функция $A(\lambda) \in M[G]$ эквивалентна оператор-функции $D(\lambda) \in S[G]$, то равенство, устанавливающее эту эквивалентность, назовем *факторизацией* $A(\lambda)$ в области G .

Теорема 7.1. Для того чтобы оператор-функция $A(\lambda) \in M[G]$ допускала факторизацию в области G , необходимо и достаточно, чтобы $A(\lambda)$ была конечномероморфна и фредгольмова в G .

Если оператор-функция $A(\lambda)$ допускает факторизацию в G , то диагональный множитель в ней

$$D(\lambda) = \sum_{j=1}^k r_j(\lambda) Q_j DP_j + Q_0 DP_0 \quad (7.4)$$

может быть выбран так, чтобы отношения $r_{j+1}(\lambda)/r_j(\lambda) (j=1, 2, \dots, k-1)$ были полиномами.

Если оператор-функция $A(\lambda)$ нормальна в G и $B_2=B_1$, то равенство (7.4) может быть заменено равенством

$$D(\lambda) = \sum_{j=1}^k r_j(\lambda) P_j + P_0.$$

Пусть оператор-функция $A(\lambda)$ нормальна в G и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — все ее особые точки. Если $A(\lambda)$ эквивалентна в точке λ_j степенной диагональной оператор-функции $D_j(\lambda)$, то в области G она эквивалентна произведению всех $D_j(\lambda)$.

Теорема 7.1 доказана в [6]. В ее доказательстве используется одно предложение из статьи М. А. Шубина [18], доказанное топологическими методами. В замкнутой части G теорема 7.1 может быть доказана без использования этого предложения.

2. Из теоремы 7.1 (см. [6]) непосредственно следует

Теорема 7.2. Пусть оператор-функция $A(\lambda) \in M[G]$ конечномерна и фредгольмова в области G и имеет в этой области не более конечного числа особых точек $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда существуют оператор-функции $F(\lambda) \in M_0[G; B_1 \rightarrow B_1]$ и $E(\lambda) \in M_0[G; B_2 \rightarrow B_2]$ такие, что для всех $\lambda \in G$, за исключением особых точек,

$$\text{Ker } A(\lambda) = F(\lambda) V_1 \text{ и } \text{Im } A(\lambda) = E(\lambda) V_2 \quad (\lambda \in G, \lambda \neq \lambda_j, j=1, 2, \dots, n),$$

где V_j — некоторое фиксированное подпространство $B_j (j=1, 2)$. В особых точках имеют место соотношения

$$\text{Ker } A(\lambda_j) \supset F(\lambda_j) V_1 \text{ и } \text{Im } A(\lambda_j) \subset E(\lambda_j) V_2 \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

В случае отсутствия особых точек при более общих предположениях эта теорема установлена в [18].

3. Остановимся еще на одном приложении теоремы 7.1, изложенном в [6]. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ и $y \in B_2$. Голоморфную в точке λ_0 вектор-функцию $x(\lambda)$ с $x(\lambda_0) \neq 0$ назовем функциональным решением уравнения

$$A(\lambda) x = y, \quad (7.5)$$

если вектор-функция $A(\lambda) x(\lambda) - y$ голоморфна в точке λ_0 и обращается в этой точке в нуль. Вектор $x_0 = x(\lambda_0)$ называется решением уравнения (7.5) в точке λ_0 . Порядок λ_0 как нуля вектор-функции $A(\lambda) x(\lambda) - y$ называется кратностью функционального решения $x(\lambda)$. Рангом решения x_0 уравнения (7.2) называется максимальная из кратностей всех функциональных решений $x(\lambda)$ таких, что $x(\lambda_0) = x_0$, если эти кратности

сти ограничены в совокупности. Если же они неограничены, то будем полагать ранг x_0 равным бесконечности.

Обозначим через $R(A(\lambda_0))^*$ множество всех векторов $y \in B_2$, для которых ранг решения уравнения (7.5) в точке λ_0 неограничен.

Теорема 7.3. Пусть $A(\lambda) \in M[G]$ — конечномероморфная и фредгольмова в области G оператор-функция, Ψ — множество всех особых точек $A(\lambda)$ в G и $\Lambda = G \setminus \Psi$. Для любого вектора $y \in B_2$ имеет место альтернатива: либо уравнение (7.5) разрешимо для всех $\lambda \in \Lambda$, либо оно разрешимо только, быть может, для некоторого не более чем счетного множества точек $\lambda \in \Lambda$, предельные точки которого могут находиться лишь на границе G .

Множество $R(A(\lambda))$ одно и то же для всех $\lambda \in G$. Первое утверждение альтернативы имеет место в том и только том случае, когда $y \in R(A(\lambda))$.

Отметим, что если Ψ состоит из конечного числа точек и равенство $A(\lambda) = E(\lambda) D(\lambda) F(\lambda)$, где $D(\lambda)$ имеет вид (7.1), является факторизацией в G оператор-функции $A(\lambda)$, то легко видеть, что $R(A(\lambda))$ состоит из всех векторов $y \in B_2$, для которых выполняется равенство

$$\left(I - \sum_{j=0}^n Q_j\right) E^{-1}(\lambda) y = 0 \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Теорема 7.3 при некоторых дополнительных ограничениях установлена в [19, 20].

Խ. Յ. ԳՈՒԵՐԳԵՐ. Վերլավոր-մեքումորֆ օպերատոր-ֆունկցիաների մի քանի հարցերի մասին (ամփոփում)

Հոդվածը նվիրված է վերլավոր-մեքումորֆ օպերատոր-ֆունկցիաների սպեկտրալ տեսության բնագավառում վերջերս կատարված որոշ հետազոտությունների շարադրմանը:

Որպես ալդ աշխատանքների ելակետ հանդիսացան Մ. Վ. Կելդիշի հայտնի արդյունքները բազմանդամային օպերատորային խորձերի սպեկտրալ հատկությունների մասին:

Մի շարք արդյունքներ տպագրվում են առաջին անգամ:

I. C. GOHBERG. On some topics of spectral theory of finite meromorphic operator-functions (summary)

This is a review of some recent developments in the spectral theory of finite meromorphic operator-functions.

The research on this topic begins with the well known results of M. V. Keldysh on spectral properties of polynomial operator bundle.

Some of the results are being published for the first time.

* В работах [19, 20] это множество называется ядром.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 77, № 1, 1951, 11—14.
2. М. В. Ени. Об устойчивости корневого числа аналитической оператор-функции и о возмущениях ее характеристических чисел и собственных векторов, ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1251—1254.
3. А. С. Маркус и Е. И. Сигал. О кратности характеристического числа аналитической оператор-функции, Матем. исследования, Кишинев, т. 5, вып. 3, 1970.
4. И. Ц. Гохберт и Е. И. Сигал. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теорема Руше, Матем. сборник, 84 (126), № 4, 1971, 607—630.
5. Е. И. Сигал. Фактор-кратность характеристического числа мероморфной оператор-функции, Матем. исслед., Кишинев, т. 5, вып. 4, 1970.
6. И. Ц. Гохберт и Е. И. Сигал. Глобальная факторизация мероморфной оператор-функции и некоторые ее приложения, Матем. исслед., Кишинев, т. 6, вып. 1, 1971.
7. И. Ц. Гохберт и Е. И. Сигал. О корневой кратности произведения мероморфных оператор-функций, Матем. исслед., Кишинев, т. 6, вып. 2, 1971.
8. И. Ц. Гохберт и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, 12, вып. 2, 1957, 43—118.
9. С. Г. Крейн и В. П. Трофимов. О голоморфных оператор-функциях нескольких комплексных переменных, Функциональный анализ и его приложения, 3, вып. 4, 1969, 85—86.
10. Ю. А. Палант. Об одном методе получения признаков кратной полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов. Зап. мех.-мат. факультета Харьковского университета и Харьковского матем. о-ва, 34, 1969.
11. Е. И. Сигал. О кратности характеристического числа произведения оператор-функций, Матем. исслед., Кишинев, 5, вып. 1, 1970, 118—127.
12. И. Ц. Гохберт. Задача факторизации оператор-функций, Известия АН СССР, серия матем. наук, 12, вып. 5, 1964, 1055—1082.
13. А. С. Маркус. О голоморфных оператор-функциях, ДАН СССР, 119, № 6, 1958, 1099—1102.
14. И. Ц. Гохберт. О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, ДАН СССР, 78, № 4, 1951, 629—632.
15. Д. Ф. Харазов. К теории линейных уравнений в пространстве Банаха, Тр. Тбилисского матем. ин-та им. Размадзе, 19, 1953.
16. П. М. Блехер. Об операторах, зависящих мероморфно от параметра, Вестник Московского университета, № 5, 1969, 30—36.
17. В. М. Ени. Некоторые вопросы теории возмущений аналитических оператор-функций, Диссертация, 1967.
18. М. А. Шубин. О голоморфных семействах подпространств банахова пространства, Матем. исслед., Кишинев, 5, вып. 4, 1970.
19. И. Ц. Гохберт и А. С. Маркус. Об одном характеристическом свойстве ядра линейного оператора, ДАН СССР, 105, № 5, 1955, 893—896.
20. А. С. Маркус. О характеристическом свойстве ядра линейного оператора, ДАН СССР, 105, № 6, 1955, 1144—1146.