ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, №№ 2—3, 1971 Математика

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

А. А. ГОНЧАР

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫЕ С НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

§ 1. Введение

Пусть f— функция, определенная и непрерывная на отрезке $\Delta=[a, b]$ действительной прямой $\mathbf{R}$, $R_n(f)$—наилучшее приближение функции f на отрезке Δ посредством рациональных функций порядка не выше n

$$R_n(f)=\inf_{\{r_n\}}\max_{x\in\Delta}|f(x)-r_n(x)|,$$

где нижняя грань берется в классе всех рациональных функций вида

$$r_n(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n},$$

без каких-либо ограничений на расположение полюсов*. Как обычно, через $E_n(f)$ будем обозначать наилучшее приближение f на Δ посредством (алгебраических) полиномов степени $\leqslant n$. Очевидно, $R_n(f)\leqslant E_n(f)$ при любом $n=0, 1, 2,\cdots$.

Хорошо известно, что функции, аналитические на отрезке, характеризуются условием

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E_n(f)}<1$$

(теорема С. Н. Бернштейна). В то же время простые примеры показывают, что любая скорость стремления к нулю последовательности $R_n(f)$ совместима с неаналитичностью функции f в каждой точке отрезка Δ. Ниже будет доказано, что тем не менее класс функций f, для которых последовательность $R_n(f)$ стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии, обладает одним из важнейших свойств класса функций, аналитических на отрезке—свойством единственности. При более сильных ограничениях на скорость убывания $R_n(f)$ соответствующие теоремы единственности были получены ранее в работе [1].

Обозначим через $R(\Delta)$ класс всех функций $f(x)$, $x\in\Delta$, для которых выполнено условие

* Функция f, вообще говоря, комплекснозначна; a_i, b_i, $i=0, 1,\cdots,n$—комплексные числа.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{R_n(f)}<1.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если функции f и g принадлежат классу $R(\Delta)$ и $f(x)=g(x)$ на множестве $e\subset\Delta$ положительной емкости (в частности, на отрезке $\delta\subset\Delta$), то $f(x)\equiv g(x)$, $x\in\Delta$.*

Здесь и всюду в дальнейшем под емкостью множества понимается его логарифмическая (гармоническая) емкость. Заметим, что если множество $e\subset\mathbf{R}$ имеет положительную лебегову меру, то емкость его также положительна. Более того, если положительна h-мера Хаусдорфа множества e относительно функции h, удовлетворяющей условию

$$\int_0 \frac{h(t)}{t}\,dt<\infty,$$

то положительна и емкость множества e (см., например, [2]).

Класс $R(\Delta)$ является естественным расширением класса функций, аналитических на отрезке Δ, в котором сохраняется свойство единственности. Нетрудно проверить, что если f и g принадлежат $R(\Delta)$, то c_1f+c_2g (c_1, c_2—произвольные комплексные числа) и $f\cdot g$ также принадлежат $R(\Delta)$. Тем самым, $R(\Delta)$ — квазианалитическая алгебра функций, содержащая — в качестве собственной подалгебры — совокупность всех функций, аналитических на Δ.

Теорема 1 допускает следующее усиление.

Теорема 2. *Если*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{R_n(f)}<1$$

и $f(x)=0$ на множестве $e\subset\Delta$ положительной емкости, то $f(x)\equiv 0$, $x\in\Delta$.

Отсюда следует, что каждый из классов $R_{\{n_k\}}(\Delta)$, определяемых условием

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[n_k]{R_{n_k}(f)}<1,$$

где $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, также обладает свойством единственности (в форме теоремы 1) и является, тем самым, квазианалитическим классом функций. Переход от $R(\Delta)$ к $R_{\{n_k\}}(\Delta)$ совершенно аналогичен переходу от алгебры всех аналитических функций к квазианалитическим классам С. Н. Бернштейна $B_{\{n_k\}}(\Delta)$ (класс $B_{\{n_k\}}(\Delta)$ определяется условием $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[n_k]{E_{n_k}(f)}<1$). Каждый из классов $R_{\{n_k\}}(\Delta)$ является расширением соответствующего класса $B_{\{n_k\}}(\Delta)$.

В основе доказательства приведенных теорем лежит оценка минимума модуля рациональных функций, формулируемая в терминах емкости конденсатора; эта оценка содержится в работе [3]. Необходимые для дальнейшего определения и формулировку соответствующей леммы мы приведем в следующем параграфе (подробнее см. [3]).

§ 2. Емкость конденсатора. Леммы

Пусть S—расширенная комплексная плоскость, E и F—непересекающиеся замкнутые подмножества S, каждое из которых имеет связное дополнение, D—дополнение к $E \cup F$. Пару (E, F) (или тройку (E, F, D)) будем называть конденсатором.

Предположим, что каждое из множеств E, F имеет положительную емкость. Пусть $H(z)$—гармоническая мера множества ∂F относительно области D в точке $z \in D$. Другими словами, H—обобщенное решение задачи Дирихле в области D, построенное по граничным данным, равным 0 на ∂E и 1 на ∂F. Конденсатор (E, F, D) будем называть регулярным, если все точки границы области D регулярны в смысле задачи Дирихле в области D; в этом случае функция H гармонична в D, непрерывна в $\overline{D}$ и равна 0 и 1 на ∂E и ∂F, соответственно.

Обозначим через Γ произвольный контур (состоящий из конечного числа попарно непересекающихся аналитических жордановых кривых), принадлежащий области D и разделяющий множества E и F ($S \setminus \Gamma$ представляет собой объединение двух открытых множеств $D(E) \supset E$ и $D(F) \supset F$ таких, что $\partial D(E) = \partial D(F) = \Gamma$). Пусть $\frac{\partial}{\partial n}$—производная по нормали к контуру Γ, внешней по отношению к множеству $D(E)$, ds—элемент длины дуги. Величина

$$c = c(E, F) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial n} \, ds$$

называется емкостью конденсатора (E, F). При тех ограничениях, которые уже наложены на множества E, F, имеем $0 < c(E, F) < +\infty$.

Лемма 1 (см. [3]). *Пусть (E, F)—конденсатор, $r_n(z)$—произвольная рациональная функция от z порядка не выше n. Если*

$$\max_{z \in E} |r_n(z)| \leqslant M,$$

то

$$\min_{z \in F} |r_n(z)| \leqslant M e^{-\frac{n}{c}},$$

где $c = c(E, F)$—емкость конденсатора (E, F).

Пусть теперь $\breve{E}$ и $\breve{F}$—произвольные непересекающиеся подмножества S, каждое из которых имеет связное дополнение и положительную емкость. По определению положим: $c(\breve{E}, \breve{F}) = \sup c(E, F)$, где верхняя грань берется по всем конденсаторам (E, F) таким, что

$E \subset \widetilde{F}$, $F \subset \widetilde{F}$. Для доказательства сформулированных выше теорем кроме леммы 1 нам понадобится

Лемма 2. *Если замкнутое множество $E \subset \Delta$ имеет положительную емкость и $E \neq \Delta$, то $c(E, \Delta \setminus E) = +\infty$.*

Следующие два параграфа посвящены доказательству этой леммы

§ 3. Вспомогательные предложения

Предложения, приведенные в этом параграфе, формулируются и доказываются в той степени общности, которая необходима для дальнейшего. Возможно, некоторые из них представляют самостоятельный интерес.

1°. Пусть (E, F, D)—конденсатор; A, B—действительные числа, $A < B$; $U(z)$, $z \in D$—функция, гармоническая в D и такая, что

$$\varliminf_{z \to \zeta,\, z \in D} U(z) \geqslant A, \quad \forall \zeta \in \partial E,$$

$$\varlimsup_{z \to \zeta,\, z \in D} U(z) \leqslant B, \quad \forall \zeta \in \partial F.$$

Тогда

$$c(E, F) \geqslant \frac{1}{2\pi(B-A)} \int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} ds, \tag{1}$$

где Γ — произвольный контур, разделяющий множества E и F, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к Γ, внешней по отношению к множеству, ограниченному Γ и содержащему E.

Это предложение по существу содержится в монографии [4] (ср. п. 2.12, (в)).

Пусть K — ограниченное замкнутое множество положительной емкости, имеющее связное дополнение G. Через $g(K, z)$ будем обозначать функцию Грина области G с особенностью в бесконечно удаленной точке. Множество K называется регулярным, если все его граничные точки являются регулярными точками в смысле задачи Дирихле в области G. Регулярные точки $\zeta \in \partial K$ характеризуются условием: $\lim\limits_{z \to \zeta,\, z \in G} g(K, z) = 0$ (критерий Булигана). Заметим, что конденсатор (E, F) регулярен в том и только том случае, когда регулярны множества E и F.

2°. Пусть (E, F, D)—конденсатор; множества E, F — ограничены и имеют положительную емкость; ρ_1 и ρ_2 — положительные постоянные. Если $\partial F \subset \{z\colon g(E, z) \leqslant \rho_1\}$, $\partial E \subset \{z\colon g(F, z) \leqslant \rho_2\}$, то

$$c(E, F) \geqslant \frac{1}{\rho_1 + \rho_2}. \tag{2}$$

Положим $U(z) = g(E, z) - g(F, z)$, $z \in D$. Эта функция гармонична в D, причем

$$\varliminf_{z \to \zeta,\, z \in D} U(z) \geqslant -\rho_2, \quad \forall \zeta \in \partial E,$$

$$\varlimsup_{z \to \zeta,\, z \in D} U(z) \leqslant \rho_1, \quad \forall \zeta \in \partial F.$$

Пусть Γ—контур, разделяющий множества E и F; выберем его так, чтобы $\infty \in D(F)$ (определение $D(F)$ см. в § 2). По 1° имеем

$$c(E, F) \geqslant \frac{1}{2\pi(\rho_1+\rho_2)} \int_\Gamma \frac{\partial U}{\partial n} ds. \tag{3}$$

При этом

$$\int_\Gamma \frac{\partial g(E, z)}{\partial n} ds = 2\pi, \quad \int_\Gamma \frac{\partial g(F, z)}{\partial n} ds = 0.$$

Следовательно, $\int_\Gamma \frac{\partial U}{\partial n} ds = 2\pi$; учитывая это равенство, из (3) получаем (2).

3°. Пусть E—замкнутое множество положительной лебеговой меры, принадлежащее отрезку $[\alpha, \beta]$, $\operatorname{mes} E \geqslant \tau(\beta-\alpha)$, $0 < \tau < 1$. Тогда

$$\sup_{z \in [\alpha, \beta] \setminus E} g(E, z) \leqslant g([0, \tau], 1). \tag{4}$$

Докажем сначала, что если какая-либо концевая точка отрезка $[\alpha, \beta]$—например, точка β—не принадлежит множеству E, то

$$g(E, \beta) \leqslant g([0, \tau], 1). \tag{5}$$

Воспользуемся для этого следующим соотношением (см., например, [5]):

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{|t_n(z)|}{\max\limits_{z \in E} |t_n(z)|} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{g(E, z)}, \quad z \overline{\in} E, \tag{6}$$

где $t_n(z)$—полином Чебышева для множества E с нулями на этом множестве (степень $t_n(z)$ равна n, старший коэффициент равен 1). Фиксируем натуральное n; пусть $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(a_k \leqslant a_{k+1})$—нули полинома $t_n(z)$. Положим $E^* = [\alpha, \alpha + \operatorname{mes} E]$, $a_k^* = \alpha + \operatorname{mes}(E \cap [\alpha, a_k])$, $k = 1, 2, \cdots, n$, $t_n^*(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} (z - a_k^*)$.

Легко видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$|t_n^*(\beta)| \geqslant |t_n(\beta)|, \tag{7}$$

$$\max_{z \in E^*} |t_n^*(z)| \leqslant \max_{z \in E} |t_n(z)|. \tag{8}$$

По лемме Бернштейна-Уолша (см. [3])

$$|t_n^*(\beta)| \leqslant \max_{z \in E^*} |t_n^*(z)| \cdot e^{ng(E^*, \beta)}. \tag{9}$$

Наконец
$$g(E^*, \beta) \leqslant g([\alpha, \alpha+\tau(\beta-\alpha)], \beta) = g([0, \tau], 1). \tag{10}$$
Из соотношений (7)—(10) следует
$$\left(\frac{|t_n(\beta)|}{\max\limits_{z\in E}|t_n(z)|}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\frac{|t_n^*(\beta)|}{\max\limits_{z\in E^*}|t_n^*(z)|}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e^{g([0,\tau],1)}.$$

Переходя здесь к пределу при $n\to\infty$ и используя равенство (6), получаем неравенство (5).

Докажем теперь неравенство (4). Без ограничения общности можно предположить, что E—регулярное множество (так что для любой точки $\zeta\in E$ $g(E, z)\to 0$ при $z\to\zeta$, $z\bar{\in} E$). В этом случае $\sup\limits_{z\in[\alpha,\beta]\setminus E} g(E, z) = g(E, x_0)$, $x_0\in[\alpha, \beta]\setminus E$. Положим $\Delta_1=[\alpha, x_0]$, $\Delta_2=[x_0, \beta]$, $|\Delta_k|=\text{mes}\,\Delta_k$, $E_k=E\cap\Delta_k$. По крайней мере для одного из отрезков Δ_k имеем $\text{mes}\,E_k\geqslant\tau|\Delta_k|$. По доказанному, для соответствующего k $g(E_k, x_0)\leqslant g([0, \tau], 1)$. Остается заметить, что $g(E, x_0)\leqslant g(E_k, x_0)$; неравенство (4) доказано.

4°. Пусть E—замкнутое множество нулевой лебеговой меры, принадлежащее отрезку $[\alpha, \beta]$. Для любого $\varepsilon>0$ найдется замкнутое множество $F\subset[\alpha, \beta]\setminus E$ такое, что $g(F, z)<\varepsilon$ для $z\in[\alpha, \beta]\setminus F$.

По $\varepsilon>0$ подберем τ_ε, $0<\tau_\varepsilon<1$, так, чтобы было выполнено неравенство $g([0, \tau_\varepsilon], 1)<\varepsilon$. В качестве F можно взять любое замкнутое множество, принадлежащее $[\alpha, \beta]\setminus E$ и такое, что $\text{mes}\,F>\tau_\varepsilon(\beta-\alpha)$. Из предложения 3° вытекает: $g(F, z)\leqslant g([0, \tau_\varepsilon], 1)<\varepsilon$ для любого $z\in[\alpha, \beta]\setminus F$.

5°. Пусть E и F—произвольные замкнутые подмножества отрезка $[\alpha, \beta]$ такие, что $E\cap F=\varnothing$, $\text{mes}\,E\geqslant\frac{\beta-\alpha}{4}$, $\text{mes}\,F\geqslant\frac{\beta-\alpha}{4}$. Тогда $c(E, F)\geqslant C_0$, где $C_0>0$—абсолютная постоянная.

Согласно 3° имеем $g(E, z)\leqslant g\left(\left[0, \frac{1}{4}\right], 1\right)$, $z\in F$, $g(F, z)\leqslant g\left(\left[0, \frac{1}{4}\right], 1\right)$, $z\in E$. Применяя 2°, получаем
$$c(E, F)\geqslant\left[2g\left(\left[0, \frac{1}{4}\right], 1\right)\right]^{-1}=C_0.$$

Пусть P_1 и P_2—ограниченные замкнутые множества на действительной прямой, $P_1\subset P_2$. Через $H(P_1, P_2, z)$ будем обозначать гармоническую меру множества P_1 относительно $S\setminus P_2$ в точке $z\in S\setminus P_2$.

6°. Для любого замкнутого множества $e\subset\Delta_1=[-1, 1]$, $0<\tau_1\leqslant\text{mes}\,e\leqslant\tau_2<2$, и любого $x>1$ справедливы неравенства
$$H([-1, -1+\tau_1], \Delta_1, x)\leqslant H(e, \Delta_1, x)\leqslant H([1-\tau_2, 1], \Delta_1, x).$$

В справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственным вычислением (достаточно выразить соответствующие гармонические меры через функцию Грина для дополнения к $[-1, 1]$ с особенностью в точке x).

7°. Пусть E и F — непересекающиеся замкнутые подмножества отрезка $\Delta_1=[-1, 1]$. Для любого $\varepsilon>0$ найдутся $A_\varepsilon>1$ и $\delta_\varepsilon>0$ (A_ε и δ_ε зависят только от ε) такие, что каковы бы ни были E, $\operatorname{mes} E > 1-\delta_\varepsilon$, и F, $\operatorname{mes} F > 1-\delta_\varepsilon$, при любом действительном x, $|x|>A_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\left|H(F, E\cup F, x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon. \tag{11}$$

Пусть $x>1$; E и F — непересекающиеся замкнутые множества, принадлежащие Δ_1; предположим, что мера каждого из них $\geqslant 1-\delta$, $\delta>0$. Используя 6°, получаем

$$H([-1, -\delta], \Delta_1, x)\leqslant H(F, \Delta_1, x)\leqslant H([-\delta, 1], \Delta_1, x). \tag{12}$$

Следующие неравенства очевидны:

$$\begin{aligned} H(F, \Delta_1, x)\leqslant H(F, E\cup F, x) &\leqslant H(\Delta_1\setminus E, \Delta_1, x)= \\ &= H(F, \Delta_1, x)+H(\Delta_1\setminus(E\cup F), \Delta_1, x). \end{aligned} \tag{13}$$

Снова используя 6°, оцениваем последнее слагаемое

$$H(\Delta_1\setminus(E\cup F), \Delta_1, x)\leqslant H([1-2\delta, 1], \Delta_1, x). \tag{14}$$

Объединяя (12), (13) и (14), получаем

$$\begin{aligned} H([-1,0], \Delta_1, x)-H([-\delta, 0], \Delta_1, x)\leqslant H(F, E\cup F, x)\leqslant \\ \leqslant H([0, 1], \Delta_1, x)+H([-\delta, 0], \Delta_1, x)+H([1-2\delta, 1], \Delta_1, x). \end{aligned} \tag{15}$$

Имеем $H([-1, 0], \Delta_1, \infty)=H([0, 1], \Delta_1, \infty)=\frac{1}{2}$. Следовательно, можно найти такое $A_\varepsilon>1$, чтобы для $x>A_\varepsilon$ имели место неравенства

$$\left|H([-1, 0], \Delta_1, x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|H([0, 1], \Delta_1, x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Число $\delta_\varepsilon>0$ найдем из условия

$$H([1-2\delta_\varepsilon, 1], \Delta_1, x)<\frac{\varepsilon}{4}, \quad x>A_\varepsilon; \tag{17}$$

тогда, очевидно, и

$$H([-\delta_\varepsilon, 0], \Delta_1, x)<\frac{\varepsilon}{4}, \quad x>A_\varepsilon. \tag{18}$$

Для $\delta=\delta_\varepsilon$ из (15), (16), (17) и (18) получаем

$$\frac{1}{2}-\varepsilon<H(F, E\cup F, x)<\frac{1}{2}+\varepsilon, \quad x>A_\varepsilon.$$

Тем самым, неравенство (11) при $x > A_\varepsilon$ установлено для любых замкнутых множеств E, F, принадлежащих Δ_1, при условии, что мера каждого из них $\geqslant 1-\delta_\varepsilon$. Из соображений симметрии следует, что оно имеет место для таких множеств и при $x < -A_\varepsilon$. Предложение 7° доказано.

8°. Пусть E и F—непересекающиеся замкнутые подмножества отрезка $[x_0-\eta,\ x_0+\eta]$, $H(z)=H(F,\ E\cup F,\ z)$. Для любого $\varepsilon>0$ найдутся $A=A_{\varepsilon,\eta}>\eta$ и $\delta=\delta_{\varepsilon,\eta}>0$ такие, что каковы бы ни были E, $\operatorname{mes} E\geqslant\eta-\delta$, и F, $\operatorname{mes} F\geqslant\eta-\delta$, при любом действительном x, $|x-x_0|>A$, имеет место неравенство

$$\left|H(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

При этом $A_{\varepsilon,\eta}=\eta A_\varepsilon\to 0$ при $\eta\to 0$ (ε—фиксировано).

Это утверждение сводится к предыдущему очевидным линейным преобразованием.

§ 4. Доказательство леммы 2

Докажем сначала утверждение леммы 2 при следующем дополнительном предположении: существует отрезок $\Delta_1\subset\Delta$ такой, что емкость множества $E_1=E\cap\Delta_1$ положительна, в то время как лебегова мера E_1 равна нулю. Пусть E_2—замкнутое подмножество E_1, все точки которого регулярны (емкость $E_2>0$, мера $E_2=0$). Положим $g(E_2, x)=0$ для $x\in E_2$ и рассмотрим множество $\Omega=\{x\in\Delta_1\colon g(E_2, x)<\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$. Ω — открытое (относительно Δ_1) множество, покрывающее E_2; пусть $\omega_1,\cdots,\omega_m$ — непересекающиеся интервалы, принадлежащие Ω и в совокупности покрывающие E_2, $\overline{\omega}_1,\cdots,\overline{\omega}_m$ — соответствующие отрезки, $\overline{\omega}=\bigcup\limits_{k=1}^{m}\overline{\omega}_k$. По 4° при любом k, $1\leqslant k\leqslant m$, существует замкнутое множество $F_k\subset\overline{\omega}_k\setminus E_1$ такое, что $g(F_k, x)<\varepsilon$ для $x\in\overline{\omega}_k\setminus F_k$. Пусть $F=\bigcup\limits_{k=1}^{m}F_k$; очевидно

$$F\subset\overline{\Omega}=\{z\colon g(E_2, z)\leqslant\varepsilon\}. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь произвольную точку $x\in\overline{\omega}\setminus F$. При некотором k, $1\leqslant k\leqslant m$, имеем $x\in\overline{\omega}_k\setminus F_k$ и $g(F, x)\leqslant g(F_k, x)<\varepsilon$. Тем самым, $g(F, x)<\varepsilon$ для $x\in\overline{\omega}\setminus F$; следовательно

$$E_2\subset\{z\colon g(F, z)<\varepsilon\}. \tag{20}$$

Из (19) и (20) вытекает оценка $c(E_2, F)\geqslant\dfrac{1}{2\varepsilon}$ (см. предложение 2°). Устремляя ε к нулю и учитывая, что $E_2\subset E_1$, $F\subset\Delta_1\setminus E_1$, получаем $c(E_1, \Delta_1\setminus E_1)=+\infty$; тем более, $c(E, \Delta\setminus E)=+\infty$.

Теперь мы будем предполагать, что для любого отрезка $\Delta_1 \subset \Delta$ емкость и лебегова мера множества $E \cap \Delta_1$ одновременно положительны или равны нулю. Пусть Ω—объединение всех интервалов $\omega \subset R$ таких, что $\mathrm{mes}\,(E \cap \omega) = 0$ (по предположению, тогда и емкость множества $E \cap \omega$ равна нулю); положим $E_1 = \Delta \setminus \Omega$. Очевидно, $E_1 \subset E$ и если $x \in E_1$, то для любого интервала $u \ni x$ $\mathrm{mes}\,(E_1 \cap u) > 0$. Далее, емкость множества $E \setminus E_1 = E \cap \Omega$ равна нулю; учитывая этот факт, получаем

$$c\,(E_1,\ \Delta \setminus E_1) = c\,(E_1,\ \Delta \setminus E) \leqslant c\,(E,\ \Delta \setminus E).$$

Поэтому нам достаточно показать, что $c\,(E_1,\ \Delta \setminus E_1) = +\infty$. Отдельно рассмотрим два случая.

а) Множество $\Delta \setminus E_1$ состоит из конечного числа интервалов (тогда E_1—объединение конечного числа отрезков). Пусть ξ—общая концевая точка какого-нибудь интервала, принадлежащего $\Delta \setminus E_1$, и отрезка, принадлежащего E_1. При некотором $\rho > 0$ и любом δ, $0 < \delta < \rho$, один из отрезков $[\xi - \rho,\ \xi - \delta]$, $[\xi + \delta,\ \xi + \rho]$ принадлежит множеству E_1, другой—множеству $\Delta \setminus E_1$. Емкость конденсатора, соответствующего этой паре отрезков, нетрудно вычислить. Полагая $k = \dfrac{\delta}{\rho}$, имеем

$$c\,([\xi - \rho,\ \xi - \delta],\ [\xi + \delta,\ \xi + \rho]) = c\,([-1, -k],\ [k,\ 1]) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{K'}{K} \sim \frac{1}{\pi^2} \log \frac{1}{k}, \quad k \to 0;$$

здесь K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k, K' — соответствующий интеграл для дополнительного модуля $k' = \sqrt{1-k^2}$. Тем самым, $c\,([\xi - \rho,\ \xi - \delta],\ [\xi + \delta,\ \xi + \rho]) \to +\infty$ при $\delta \to 0$ (и фиксированном ρ). Следовательно, $c\,(E_1,\ \Delta \setminus E_1) = +\infty$.

б) Множество $\Delta \setminus E_1$ есть объединение бесконечного числа непересекающихся интервалов. Фиксируем произвольное натуральное число N. Пусть $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$ — различные точки множества E_1, концевые для дополнительных к E_1 интервалов. Положим $a = \dfrac{1}{2} \min\limits_{1 \leq i \neq j \leq N} |\xi_i - \xi_j|$, $\varepsilon = \dfrac{1}{N}$. Выберем число η, $0 < \eta < \dfrac{a}{2}$, столь малым, что $A_{\varepsilon, \eta} < a$ ($A_{\varepsilon, \eta}$—число, фигурирующее в предложении 8°). Обозначим $u_i = (\xi_i - \eta,\ \xi_i + \eta)$, $i = 1, \cdots, N$. Поскольку $\xi_i \in E_1$, имеем $\mathrm{mes}\,(E_1 \cap u_i) > 0$; пусть x_i — какая-либо точка плотности множества E_1, принадлежащая u_i. Рассмотрим отрезок Δ_i' с центром в точке x_i, столь малый, что $\Delta_i' \subset u_i$ и $\mathrm{mes}\,(E_1 \cap \Delta_i') \geqslant \dfrac{1}{2} |\Delta_i'|$. Будем расширять этот отрезок в сторону интервала, дополнительного к E_1 с концом в точке ξ_i; в результате такого расширения можно построить отрезок $\Delta_i \subset u_i$ такой, что $\mathrm{mes}\,(E_1 \cap \Delta_i) = \dfrac{1}{2} |\Delta_i|$. Пусть $\eta_i = \dfrac{1}{2} |\Delta_i|$, $\delta_i = \delta_{\varepsilon, \eta_i} > 0$ — число, фигурирующее в предложении 8°, $i = 1, \cdots, N$. Построим замкнутые регулярные множества E'_l и F'_l, принадлежащие соответственно $E_1 \cap \Delta_l$ и $\Delta_l \setminus E_1$, так, чтобы лебегова мера каждого из них была больше, чем $\max\left(\eta_l - \delta_l, \frac{\eta_l}{2}\right)$. Рассмотрим регулярный конденсатор (E'_l, F'_l); через $H_l(z)$ обозначим гармоническую меру множества F'_l в точке z относительно дополнения к $E'_l \cup F'_l$. Учитывая построение отрезков Δ_l и множеств E'_l, F'_l и применяя предложение 8°, приходим к следующему выводу: при любых i, $1 \leqslant i \leqslant N$, и j, $1 \leqslant j \leqslant N$, $i \neq j$,

$$\left|H_i(x) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon, \ x \in \Delta_j. \tag{21}$$

Пусть $E' = \bigcup_{l=1}^{N} E'_l$, $F' = \bigcup_{l=1}^{N} F'_l$, $U(z) = \sum_{l=1}^{N} H_l(z)$. Ввиду того, что конденсатор (E'_l, F'_l) регулярен, функция $H_l(z)$ непрерывна во всей плоскости S, равна 0 на E'_l и 1 на F'_l. Следовательно, функция $U(z)$ непрерывна в S, гармонична в области $D = S \setminus (E' \cup F')$, причем (см. (21))

$$U(\zeta) \geqslant (N-1)\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right), \ \forall \zeta \in E', \tag{22}$$

$$U(\zeta) \leqslant 1 + (N-1)\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right), \ \forall \zeta \in F'. \tag{23}$$

Пусть Γ_l — контур, лежащий в достаточно малой окрестности множества E'_l и разделяющий множества E'_l и F'_l (так, что $\infty \in D(F'_l)$). Учитывая, что E'_l и F'_l принадлежат отрезку Δ_l и мера каждого из них $> \frac{\eta_l}{2} = \frac{|\Delta_l|}{4}$, получаем (см. предложение 5°)

$$c(E'_l, F'_l) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_l} \frac{\partial H_l}{\partial n} ds \geqslant C_0, \tag{24}$$

где $C_0 > 0$ — абсолютная постоянная. Отметим также, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial H_l}{\partial n} ds = 0, \ i \neq j. \tag{25}$$

Контур $\Gamma = \bigcup_{l=1}^{N} \Gamma_l$ разделяет множества E' и F'. Применяя соотношения (24) и (25), получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} ds = \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial H_l}{\partial n} ds = \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_l} \frac{\partial H_l}{\partial n} ds \geqslant NC_0. \tag{26}$$

Наконец, используя (22), (23), (26) и применяя предложение 1°, получаем $\left(\text{напомним, что } \varepsilon = \frac{1}{N}\right)$

$$c(E', F') \geqslant \frac{NC_0}{1+(N-1)\cdot 2\varepsilon} \geqslant \frac{NC_0}{3}.$$

Поскольку $E' \subset E_1$, $F' \subset \Delta \setminus E_1$, отсюда следует, что $c(E_1, \Delta \setminus E_1) \geqslant \geqslant \frac{NC_0}{3}$; ввиду произвольности N это означает, что $c(E_1, \Delta \setminus E_1) = +\infty$. Лемма 2 доказана полностью.

§ 5. Доказательство теорем 1, 2

Теорема 1 является следствием теоремы 2 и линейности класса $R(\Delta)$. Будем доказывать поэтому теорему 2.

В условиях этой теоремы существуют возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ и число q, $0 < q < 1$, такие, что $R_{n_k}(f) < q^{n_k}$, $k = 1, 2, \cdots$.

Пусть $r_{n_k}(x)$ — последовательность рациональных функций (порядок $r_{n_k}(x)$ не превосходит n_k), для которой

$$\max_{x \in \Delta} |f(x) - r_{n_k}(x)| < q^{n_k}, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{27}$$

(в качестве $r_{n_k}(x)$ можно взять рациональную функцию наилучшего приближения f на Δ порядка n_k). Пусть $f(x) = 0$ на множестве $e \subset \Delta$ положительной емкости и $f(x) \not\equiv 0$, $x \in \Delta$. Положим* $E = \{x \in \Delta: f(x) = 0\}$; множество E замкнуто, имеет положительную емкость и $E \neq \Delta$. По лемме 2 найдется замкнутое множество $F \subset \Delta \setminus E$ такое, что

$$c(E, F) \geqslant Q, \quad q e^{\frac{1}{Q}} = q_1 < 1. \tag{28}$$

По предположению, f не имеет нулей на множестве F; следовательно, $\mu = \min_{x \in F} |f(x)| > 0$. Поскольку последовательность $r_{n_k}(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на множестве F, имеем

$$\lim_{k \to \infty} \min_{x \in F} |r_{n_k}(x)| = \mu > 0. \tag{29}$$

С другой стороны, из (27) следует неравенство

$$\max_{x \in E} |r_{n_k}(x)| < q^{n_k}, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{30}$$

Применяя к конденсатору (E, F) и рациональной функции $r_{n_k}(x)$ лемму 1 и используя (30), (28), получаем

---

* Необходимость рассматривать полное множество нулей функции f показывает, что и при доказательстве теорем единственности по значениям на отрезке $\delta \subset \Delta$ по существу приходится применять лемму 2 в общей формулировке (во всяком случае, для произвольного E положительной лебеговой меры), а не только ее очевидный частный случай: $c(\delta, \Delta \setminus \delta) = +\infty$.

$$\min_{x\in F} |r_{n_k}(x)| < q^{n_k} e^{\frac{n}{Q}} = q_1^{n_k}, \quad k=1, 2, \cdots.$$

Следовательно

$$\lim_{k\to\infty} \min_{x\in F} |r_{n_k}(x)| = 0. \tag{31}$$

Полученное противоречие (ср. (29) и (31)) доказывает теорему.

Ա. Ա. ԳՈՆՉԱՐ. Ռացիոնալ ֆունկցիաներով լավագույն մոտարկումների հետ կապված ֆունկցիաների քվազիանալիտիկ դասեր (*ամփոփում*)

Դիցուք f $[a, b]$*-ում անընդհատ ֆունկցիա է*

$$R_n(f) = \inf_{a_k, b_k} \max_{x\in[a, b]} \left| f(x) - \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} \right|.$$

Թեորեմ. Եթե

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n(f)} < 1$$

և $f(x)=0$, $x\in e\subset[a, b]$, $\operatorname{cap} e > 0$, *ապա* $f(x)\equiv 0$, $x\in[a, b]$.

A. A. GONČAR. *Quasyanalytic classes of functions, connected with best approximations by rational functions* (summary)

Let f be continious function on $[a, b]$,

$$R_n(f) = \inf_{a_k, b_k} \max_{x\in[a, b]} \left| f(x) - \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} \right|.$$

Theorem. If

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{R_n(f)} < 1$$

and $f(x)=0$, $x\in e\subset[a, b]$, $\operatorname{cap} e > 0$, then $f(x)\equiv 0$, $x\in[a, b]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Гончар.* О наилучших приближениях рациональными функциями, ДАН СССР, 100, № 2, 1955, 205—208.
2. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
3. *А. А. Гончар.* О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями, Матем. сборник, 78 (120), № 4, 1959, 640—656.
4. *Г. Полиа* и *Г. Сеге.* Изопериметрические неравенства в математической физике, М., Физматгиз, 1962.
5. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., Изд-во „Наука", 1966.