ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, №№ 2—3, 1971 Математика

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

А. Г. АСЛАНЯН, В. Б. ЛИДСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧАСТОТ НИЖНЕЙ СЕРИИ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Введение

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая собственные колебания оболочки вращения с m волнами по параллели (см. [1, 2]):

$$
\begin{gathered}
-u''-\frac{B'}{B}u'-\frac{(1+\sigma)\,m}{2B}v'-\left[\left(\frac{B'}{B}\right)'+(1-\sigma)\left(\frac{1}{R_1R_2}-\frac{m^2}{2B^2}\right)\right]u+\\
+\frac{(3-\sigma)\,m}{2}\frac{B'}{B^2}v+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)w'+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w=\lambda u,\\
-\frac{1-\sigma}{2}v''+\frac{(1+\sigma)\,m}{2B}u'-\frac{1-\sigma}{2}\frac{B'}{B}v'+\frac{(3-\sigma)\,m}{2}\frac{B'}{B^2}u-\\
-\left[\frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{B'}{B}\right)'+\frac{1-\sigma}{R_1R_2}-\frac{m^2}{B^2}\right]v-\frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w=\lambda v, \qquad (0.1)\\
\mu^4\frac{1}{B}\left(\frac{d}{ds}B\frac{d}{ds}-\frac{m^2}{B}\right)\frac{1}{B}\left(\frac{d}{ds}B\frac{dw}{ds}-\frac{m^2}{B}w\right)-\\
-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)\frac{du}{ds}-\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{B'}{B}u-\frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v+\\
+\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right)w=\lambda w.
\end{gathered}
$$

Здесь u, v, w — проекции смещения точки срединной поверхности, s — длина дуги меридиана, $a\leqslant s\leqslant b$, $B(s)$ — расстояние от меридиана до оси вращения, функция $B(s)$ предполагается положительной и достаточно гладкой; $R_1(s)$ и $R_2(s)$—главные радиусы кривизны оболочки:

$$
R_1^{-1}(s)=-\frac{B''(s)}{\sqrt{1-B'^2(s)}},\quad R_2^{-1}(s)=\frac{\sqrt{1-B'^2(s)}}{B(s)}; \qquad (0.2)
$$

λ — параметр, константой отличающийся от частоты колебаний,

μ — малый параметр: $\mu^4=\frac{1}{12}h^2$, где h — толщина оболочки,

σ — коэффициент Пуассона, $\sigma^2<\frac{1}{4}$. Система (0.1) в настоящей статье

рассматривается при граничных условиях

$$u(a)=u(b)=v(a)=v(b)=w(a)=w(b)=w'(a)=w'(b)=0, \tag{0.3}$$

что соответствует жесткому закреплению. Задача (0.1, 3) является самосопряженной*.

Положив в системе (0.1) $\mu=0$, мы придем к безмоментной (вырожденной) системе уравнений, которую запишем сокращенно в виде

$$Z_0 f=\lambda f, \tag{0.4}$$

где f — вектор-функция (u, v, w). Как показано в [3, 4] система (0.4) при граничных условиях

$$u(a)=u(b)=v(a)=v(b)=0 \tag{0.5}$$

также является самосопряженной. Скалярное произведение (f_1, f_2) вводится по формуле

$$(f_1, f_2)=\int_a^b B(s)(u_1\bar{u}_2+v_1\bar{v}_2+w_1\bar{w}_2)\,ds. \tag{0.6}$$

В противоположность моментной задаче (0.1, 3) безмоментная задача (0.4, 5) имеет не чисто дискретный спектр. Как было нами показано в статьях [3, 4], отрезок $[\alpha, \beta]$ значений функции

$$\varphi_1(s)=\frac{1-\sigma^2}{R_2^2(s)},\ a\leq s\leq b \tag{0.7}$$

состоит из точек непрерывного спектра. Вне отрезка $[\alpha, \beta]$ спектр дискретен. Концы этого отрезка могут быть точками сгущения собственных значений. Особый интерес представляет нижняя серия дискретного спектра:

$$\lambda_k<\alpha. \tag{0.8}$$

Интерес к этой части спектра усиливается тем обстоятельством, что при условии (0.8) имеет место регулярное вырождение в смысле [5] задачи (0.1, 3) при $\mu\to 0$ в задачу (0.4, 5). Поэтому для собственных значений моментной задачи $\lambda_k(\mu)<\alpha$ справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_k(\mu)=\lambda_k+\mu\lambda_k^{(1)}+o(\mu). \tag{0.9}$$

В настоящей статье мы находим условия, при которых нижняя серия частот безмоментной задачи бесконечна и находим асимптотику λ_k при $k\to\infty$.

Развиваемая в статье техника мажорантных и минорантных операторов может быть использована при отыскании асимптотики функции распределения у общих самосопряженных систем дифференциальных уравнений при наличии вырождения в старших членах и малого

* Здесь и в дальнейшем под этим понимается, что соответствующий оператор на многообразии гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям, является существенно самосопряженным.

параметра. Например, к исследованию асимптотики функции распределения моментной задачи (0.1, 3) при $h \to 0$.

Авторы признательны А. Л. Гольденвейзеру и П. Е. Товстику за неоднократные обсуждения.

§ 1. Вспомогательные леммы

В этом параграфе мы приведем ряд вспомогательных предложений, которыми воспользуемся ниже при получении асимптотики.

1°. Положим в последнем уравнении (0.1) $\mu=0$ и выразим w через u, v, u'. Подставив w в первые два уравнения (0.1) и умножив каждое из них на $B(s)$, мы придем к системе двух уравнений второго порядка относительно u и v. Эту систему запишем сразу в матричной форме:

$$lz \equiv -(A_0 z')' + A_1 z' + \frac{1}{2} A_1' z + A_2 z = 0, \tag{1.1}$$

где $z=(u, v)$—искомый вектор-столбец, A_0, A_1, A_2—матрицы:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Элементы матриц A_0, A_1 и A_2 — функции λ и s.

Для дальнейшего существенно, что

$$a_1(s, \lambda) = B(s) \frac{\lambda - \varphi_1(s)}{\lambda - \varphi_2(s)}, \tag{1.3}$$

где $\varphi_1(s)$ определено по формуле (0.7), а $\varphi_2(s) = R_1^{-2} + 2\sigma R_1^{-1} R_2^{-1} + R_2^{-2}$ Легко проверить, что

$$\varphi_2(s) - \varphi_1(s) = (R_1^{-1} + \sigma R_2^{-1})^2 \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Отметим еще, что

$$d_1(s) = \frac{1-\sigma}{2} B(s) > 0. \tag{1.5}$$

Выражения для элементов матриц A_1 и A_2 мы пока не приводим. Важно отметить, что задача

$$lz = \mu z, \quad z(a) = z(b) = 0, \tag{1.6}$$

где l определено формулой (1.1), является самосопряженной, если скалярное произведение определено по формуле

$$(z_1, z_2) = \int_a^b (u_1 \bar{u}_2 + v_1 \bar{v}_2)\, ds. \tag{1.7}$$

Самосопряженность оператора l можно проверить непосредственно*.

2°. Пусть $\lambda < \alpha$, где

$$\alpha = \inf \varphi_1(s), \quad s \in [a, b]. \tag{1.8}$$

Обозначим через $n(\lambda)$ число собственных значений задачи (0.4, 5), меньших λ ($n(\lambda)$ называется функцией распределения собственных значений задачи).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *$n(\lambda)$ при каждом $\lambda < \alpha$ равно числу отрицательных собственных значений задачи* (1.6).

Доказательство следует из установленной нами в [3, 4] осцилляционной теоремы, согласно которой $n(\lambda)$ при $\lambda < \alpha$ равно числу нулей определителя

$$\Delta(s, \lambda) = \begin{vmatrix} u_1(s, \lambda) & u_2(s, \lambda) \\ v_1(s, \lambda) & v_2(s, \lambda) \end{vmatrix} \tag{1.9}$$

при $a < s < b$. Здесь $(u_i(s, \lambda), v_i(s, \lambda))$ $(i = 1, 2)$—два решения задачи Коши для системы (1.1) с начальными условиями:

$$u_1(a, \lambda) = 0, \ v_1(a, \lambda) = 0, \ u_1'(a, \lambda) = 1, \ v_1'(a, \lambda) = 0, \tag{1.10}$$

$$u_2(a, \lambda) = 0, \ v_2(a, \lambda) = 0, \ u_2'(a, \lambda) = 0, \ v_2'(a, \lambda) = 0. \tag{1.11}$$

Известно, однако**, что число нулей определителя (1.9) на интервале (a, b) равно числу отрицательных собственных значений задачи (1.6). Отсюда следует справедливость леммы 1.

Лемма 1 позволяет свести вопрос об асимптотике функции распределения $n(\lambda)$ при $\lambda \to \alpha - 0$ к исследованию отрицательного спектра задачи (1.6). Последняя представляет собой классическую самосопряженную задачу и для исследования ее спектра может быть привлечена развитая техника.

3°. Пусть $N(\mu)$—функция распределения собственных значений задачи (1.6)***. Пусть $c \in (a, b)$. Рассмотрим на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ две краевые задачи для уравнения $lz = \mu z$ с нулевыми граничными условиями на концах этих отрезков. Пусть $N_1(\mu)$ и $N_2(\mu)$ — соответствующие функции распределения. Ниже мы используем следующий факт.

---

* Этот факт следует также из вещественности квадратичной формы $Y(f) = -(L_0 f, f) - \lambda(f, f)$ при вещественном фиксированном λ и всех $f = (u, v, w)$ таких, что выполнено для u и v (0.5), а w—произвольно. В самом деле, подставив w из третьего уравнения (0.1) с $\mu = 0$ в интеграл $Y(f)$, мы обнаружим, что интеграл (lz, z) вещественен при всех z, удовлетворяющих условию (0.5). Отсюда следует самосопряженность l.

** Этот факт также следует из [3, 4]. См., кроме того, [6, 7]. Всюду нули и собственные значения берутся с учетом кратности.

*** Подчеркнем, что $n(\lambda) = N(0)$.

Лемма 2. *При всех* μ

$$N_1(\mu)+N_2(\mu)\leqslant N(\mu)\leqslant N_1(\mu)+N_2(\mu)+2. \tag{1.12}$$

По поводу левого неравенства см. [8], стр. 345, теорема 2. Правое неравенство легко следует из теоремы 13, [9], стр. 31.

4°. Число отрицательных собственных значений задачи (1.6) может неограниченно возрастать при $\lambda\to\alpha-0$, поскольку в силу (1.3) задача (1.6) является сингулярной при $\lambda=\alpha$. Действительно, в точке $s=s_0$, где функция $\varphi_1(s)$ (см. (0.7)) достигает инфимума α, коэффициент $a_1(s,\alpha)$ при старшей производной обращается в нуль. Можно показать однако, что нижняя серия бесконечна лишь при условии $\frac{\partial}{\partial s}a_1(s_0,\alpha)=0$, то есть

$$\varphi_1'(s_0)=0^*. \tag{1.13}$$

Из наших дальнейших рассуждений будет следовать, что асимптотика $n(\lambda)$ при $\lambda\to\alpha-0$ обусловлена поведением функции $\varphi_1(s)$ в малой окрестности точки s_0. Функция $n(\lambda)$ растет тем быстрее, чем сильнее уплощение графика $\varphi_1(s)$ в окрестности $s=s_0$.

Пусть при $p\geqslant2$

$$\varphi_1(s)=\varphi_1(s_0)+\frac{1}{p!}\varphi_1^{(p)}(s_0)(s-s_0)^p+O((s-s_0)^{p+1}). \tag{1.14}$$

Предположим для определенности, что функция $\varphi_1(s)$ достигает инфимума в единственной точке $s_0<b$. Введем безразмерный параметр $\varepsilon>0$ по формуле**

$$\varepsilon=[\gamma^2(\alpha-\lambda)]^{1/p}. \tag{1.15}$$

Разобьем отрезок $[s_0,b]$ на три***:

$$\Delta_1=[s_0,s_1],\ \Delta_2=[s_1,s_2],\ \Delta_3=[s_2,b]. \tag{1.16}$$

Функции распределения трех задач для системы $lz=\mu z$ с нулевыми граничными условиями на концах отрезков Δ_k $(k=1,2,3)$ обозначим соответственно через $N_k(\mu)$.

Из наших дальнейших рассмотрений будет следовать, что основной вклад в асимптотику $n(\lambda)$ при определенном выборе точек $s_1(\varepsilon)$ и $s_2(\varepsilon)\to s_0$ вносится функцией $N_2(0)$.

Для функций $N_3(0)$ и $N_1(0)$ мы сейчас укажем грубые оценки сверху, достаточные для дальнейшего.

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

---

* Нетрудно проверить, что $\varphi_2(s_0)>\alpha$ и, следовательно, все коэффициенты системы (1.1)—гладкие функции $s\in[a,b]$ при $\lambda<\alpha$.

** Здесь γ — размерная единица.

*** Если s_0—внутренняя точка, то разбиению, аналогичному (1.16), подвергается и отрезок $[a,s_0]$.

$$N_3(0) \leqslant \frac{C}{t_2^{p/2}}, \tag{1.17}$$

где $t_2(\varepsilon) = s_3(\varepsilon) - s_0$, *а константа* C *не зависит от* ε.

Для доказательства оценим снизу квадратичную форму*

$$(lz, z) = \int_{\Delta_1} \left\{ (A_0 z', z') + (A_1 z', z) + \frac{1}{2}(A_1' z, z) + (A_2 z, z) \right\} ds. \tag{1.18}$$

Разложив функции $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ в (1.3) по степеням $t = s - s_0$, получим с учетом (1.14)

$$a_1(s, \lambda) = (a_{p,0} t^p + q_0 \varepsilon^p)(1 + O(\rho)), \tag{1.19}$$

где

$$a_{p,0} > 0, \; q_0 > 0, \tag{1.20}$$

а

$$\rho = (t^2 + \gamma^2 \varepsilon^2)^{1/2}. \tag{1.21}$$

Аналогично**,

$$d_1(s) = d_{1,0}(1 + O(\rho)), \; d_{1,0} > 0. \tag{1.22}$$

Очевидно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и всех $s > s_2$ будет

$$a_1(s, \lambda) \geqslant \frac{1}{2} a_{p,0} t_2^p, \; d_1(s) > \frac{1}{2} d_{1,0}. \tag{1.23}$$

Интегрируя в (1.18) по частям то слагаемое из $(A_1 z', z)$, которое содержит u', легко приходим с учетом (1.23) к заключению, что

$$(lz, z) \geqslant \int_{\Delta_2} \left[\frac{1}{2} a_{p,0} t_2^p u'^2 + \frac{1}{2} d_{1,0} v'^2 - C_1 |v' \cdot u| - C_1 (u^2 + v^2) \right] ds$$

при достаточно большом C_1. Поскольку, далее $C_1 |v' \cdot u| \leqslant \frac{1}{2} C_1 \delta v'^2 + \frac{1}{2} \frac{C_1}{\delta} u^2$ при любом $\delta > 0$, то, выбирая δ из условия $\frac{1}{2} d_{1,0} - \frac{1}{2} C_1 \delta > \frac{1}{4} d_{1,0}$, получим при всех достаточно малых t_2: $(lz, z) > \int_{\Delta_2} \left[\frac{1}{2} a_{p,0} t_2^p (u'^2 + v'^2) - C(u^2 + v^2) \right] ds$. Отсюда следует, что

$$(lz, z) \geqslant (l_1 z, z), \tag{1.24}$$

---

* Во избежание путаницы, отметим, что круглыми скобками под знаком интеграла обозначено „обычное“ скалярное произведение для двумерных векторов. Например, $(A_2 z, z) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} z_i z_j$, где $z_1 = u$, $z_2 = v$. Для наших целей здесь достаточно брать лишь вещественные вектор-функции $z = (u, v)$.

** Явные выражения для констант см. на стр. 22, 23.

где $l_1 z = -\frac{1}{2} a_{p,0} t_2^p z'' - Cz$. Система $l_1 z = \mu z$ при нулевых граничных условиях на концах отрезка Δ_3 легко интегрируется, и в силу (1.24) мы получаем оценку (1.17). Лемма 3 доказана.

Аналогично устанавливается

Лемма 4.

$$N_1(0) \leqslant \frac{Ct_1}{\varepsilon^{p/2}}, \tag{1.25}$$

где $t_1(\varepsilon) = s_1(\varepsilon) - s_0$, а константа C не зависит от ε.

5°. Оценка функции $N_2(0)$ много тоньше и мы займемся ею в §§ 2 и 3. Заметим здесь, что система $lz = \mu z$ на отрезке $[s_1, s_2]$ может быть упрощена. В дополнение к (1.19) и (1.22) разложим по формуле Тейлора в окрестности (s_0, α) элементы матриц (1.2):

$$b_1(s, \lambda) = b_{1,0} + \left.\frac{\partial b_1}{\partial s}\right|_0 \cdot t + O(\rho^2), \tag{1.26}$$

$$\alpha_{ij}(s, \lambda) = \alpha_{ij,0} + \left.\frac{\partial}{\partial s}\alpha_{ij}\right|_0 \cdot t + O(\rho^2). \tag{1.27}$$

Заметим, что для любой функции $v(s)$, обращающейся в нуль на концах отрезка Δ_2, справедливо неравенство

$$\int_{\Delta_2} v'^2(s)\,ds > \frac{\pi^2}{(s_2 - s_1)^2}\int_{\Delta_2} v^2(s)\,ds > \frac{\frac{\pi^2}{2}}{\rho_0}\int_{\Delta_2} v^2(s)\,ds, \tag{1.28}$$

где*

$$\rho_0 = (t_2^2 + \gamma^2\varepsilon^2)^{1/2},\ t_2 = s_2 - s_0. \tag{1.29}$$

Рассмотрим после этого наряду с задачей $lz = \mu z$, $z(s_1) = z(s_2) = 0$, две задачи:

$$-(A_0^{\pm} z')' + A_1^{\pm} z' + A_2^{\pm} z = \mu z,$$
$$z(s_1) = z(s_2) = 0, \tag{1.30}$$

где 2×2 матрицы $A_0^{\pm}$, $A_1^{\pm}$, $A_2^{\pm}$ имеют вид:

$$A_0^{\pm} = \operatorname{diag}\{(a_{p,0} t^p + q_0 \varepsilon^p)(1 \pm C\rho_0),\ d_{1,0}(1 \pm C\rho_0)\},$$

$$A_1^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & -b_{1,0} \\ b_{1,0} & 0 \end{pmatrix},\ A_2^{\pm} = \operatorname{diag}\{\alpha_{11,0} \pm C\rho_0,\ 0\}. \tag{1.31}$$

Системы в (1.30) сокращенно будем записывать в виде $l^{\pm} z = \mu z$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Существует столь большое C и такое $\delta > 0$, что при всех $\rho_0 < \delta$ будет*

$$l^+ > l > l^-. \tag{1.32}$$

---

* По поводу γ см. сноску на стр. 117.

Соотношение (1.32) *понимается в смысле неравенства квадратичных форм операторов.*

Для доказательства оценим интегралы

$$J_1=\int_{\Delta_2} t\,|v'\cdot u|\,dt,\quad J_2=\int_{\Delta_2}|u\cdot v|\,dt,\quad J_3=\int_{\Delta_2} v^2\,dt, \tag{1.33}$$

которые входят в оценку формы оператора l с некоторыми постоянными (мы пользуемся разложениями коэффициентов в окрестности (s_0, α)). Очевидно

$$|J_1|\leqslant\frac{1}{2}\rho_0\int_{\Delta_2} v'^2\,dt+\frac{1}{2}\rho_0\int_{\Delta_2} u^2\,dt,$$

$$|J_2|\leqslant\frac{1}{2\rho_0}\int_{\Delta_2} v^2\,dt+\frac{1}{2}\rho_0\int_{\Delta_2} u^2\,dt,$$

и, наконец, в силу (1.28),

$$|J_3|\leqslant\frac{\rho_0^2}{\pi^2}\int_{\Delta_2} v'^2\,dt.$$

Эти неравенства позволяют легко указать столь большое C в (1.31), при котором выполнено (1.32) при всех достаточно малых ρ_0. Лемма 5 доказана.

6°. Мы воспользуемся ниже также следующим предложением.

Лемма 6. *Пусть* $r'(t)>0$ *при* $t_1\leqslant t\leqslant t_2$. *Пусть функция* $\psi(t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$|\psi(t)|<\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \frac{|\psi'(t)|}{|r'(t)|}<\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1.34}$$

при всех $t_1\leqslant t\leqslant t_2$. *Тогда число нулей* $\nu(t_1, t_2)$ уравнения

$$\sin r(t)+\psi(t)=0 \tag{1.35}$$

на отрезке $[t_1, t_2]$ *удовлетворяет неравенству*

$$\left[\frac{1}{\pi}(r(t_2)-r(t_1))\right]-2\leqslant\nu(t_1, t_2)\leqslant\left[\frac{1}{\pi}(r(t_2)-r(t_1))\right]+2. \tag{1.36}$$

Квадратными скобками здесь обозначена целая часть числа.

Подстановкой $\tau=r(t)$ лемма сводится к элементарному рассуждению, которое мы опускаем.

Дальнейшие рассмотрения мы разобьем на два случая, в зависимости от значения p в формуле (1.14). Мы начнем с технически более сложного случая.

§ 2. Случай $p>2$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функция* $\varphi_1(s) = \frac{1-\nu^2}{R_2^2(s)}$ *достигает своего инфимума* α *в единственной точке* $s=s_0$, *лежащей внутри отрезка* $[a, b]$. *Пусть* $\alpha>0$ *и пусть*

$$\varphi_1'(s_0) = \varphi_1''(s_0) = \cdots = \varphi_1^{(p-1)}(s_0) = 0, \quad \varphi_1^{(p)}(s_0) \neq 0 \ (p>2). \tag{2.1}$$

Тогда для функции распределения собственных значений $n(\lambda)$ *задачи* (0.4, 5) *имеет место формула*

$$\lim_{\lambda\to\alpha-0} \frac{n(\lambda)}{(\alpha-\lambda)^{\frac{2-p}{2p}}} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\delta}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{a_{p,0}t^p + q_0}}, \tag{2.2}$$

*где**

$$\delta = \frac{b_{1,0}^2}{d_{1,0}} - \alpha_{11,0} > 0. \tag{2.3}$$

Для доказательства разобьем отрезок $[s_0, b]$ на три, как в (1.16), положив

$$s_1 = s_0 + \gamma\varepsilon^{1+\varkappa_1}, \quad s_2 = s_0 + \gamma\varepsilon^{\varkappa}, \tag{2.4}$$

где $\varkappa$ и $\varkappa_1$ подчинены условиям

$$0 < \varkappa < \frac{p-2}{p}, \quad 0 < \varkappa_1 < \frac{p-2}{2}. \tag{2.5}$$

После этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$l^+ z = \mu z \tag{2.6}$$

(см. § 1, п. 5°) и оценим число $N_2^+(0)$ отрицательных собственных значений задачи (2.6) при нулевых граничных условиях на концах отрезка $[s_1, s_2]$. С этой целью введем определитель $\Delta(s, \varepsilon)$, аналогичный определителю (1.9), с той лишь разницей, что начальные условия вида (1.10), (1.11) для решений системы (2.6) задаются при $s=s_0$. Система $l^+ z = 0$ имеет вид

$$-((a_{p,0}t^p + q_0\varepsilon^p)(1+C\rho_0)u_t')_t' - b_{1,0}v_t' + (\alpha_{11,0} + C\rho_0)u = 0,$$

$$-d_{1,0}(1+C\rho_0)v_{tt}'' + b_{1,0}u_t' = 0, \tag{2.7}$$

$$t = s - s_0.$$

Второе уравнение интегрируется, и задача сводится к одному уравнению второго порядка относительно $u(t)$. Последнее интегрируется асимптотически при $t\to+0$ и $\varepsilon\to+0$ ([10]). Для элементов $c_{ij}(t, \varepsilon)$ определителя $\Delta(t, \varepsilon)$ находим формулы:

$$c_{11}(t, \varepsilon) = [g(t, \varepsilon)]^{-1/4}\{\sin r(t, \varepsilon) + \chi(t, \varepsilon)\}, \tag{2.8}$$

---

* Выражения для констант $a_{p,0}$; q_0; $b_{1,0}$; $d_{1,0}$; $\alpha_{11,0}$; δ см. в § 4, п. 2°.

$$c_{21}(t, \varepsilon) = \frac{b_{1,0}}{\overset{*}{d}_{1,0}} \int_0^t c_{11}(\xi, \varepsilon)\, d\xi, \tag{2.9}$$

$$c_{12}(t, \varepsilon) = -\frac{b_{1,0}}{\delta^*} + \frac{b_{1,0}}{\delta^*} \left| \frac{g(0, \varepsilon)}{g(t, \varepsilon)} \right|^{1/4} (\cos r(t, \varepsilon) + \chi(t, \varepsilon)), \tag{2.10}$$

$$c_{22}(t, \varepsilon) = t + \frac{b_{1,0}}{\overset{*}{d}_{1,0}} \int_0^t c_{12}(\xi, \varepsilon)\, d\xi. \tag{2.11}$$

Здесь

$$g(t, \varepsilon) = a_{p,0} t^p + q_0 \varepsilon^p, \tag{2.12}$$

$$r(t, \varepsilon) = \int_0^t \frac{\sqrt{\delta - \frac{1}{4}[(\sqrt{g})']^2 + O(\rho_0)}}{\sqrt{g}}\, d\xi. \tag{2.13}$$

Через $\overset{*}{d}_{1,0}$ и δ^* обозначены функции ε, которые стремятся к $d_{1,0}$ и δ соответственно при $\varepsilon \to 0$,

$$\rho_0 = (t_2^2 + \gamma^2\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}, \quad t_2 = s_2 - s_0. \tag{2.14}$$

Через $\chi(t, \varepsilon)$ обозначены функции, удовлетворяющие условиям:

$$\chi(t, \varepsilon) = O(t^{\frac{p}{2}-1}), \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi(t, \varepsilon) = |g(t, \varepsilon)|^{-\frac{1}{2}} \cdot O(t^{\frac{p}{2}-1}) \tag{2.16}$$

с константами в O-членах, не зависящими от ε.

Оценка остатков $\chi(t, \varepsilon)$ в (2.8) и (2.10) проводится стандартным приемом. Уравнение $(g(t, \varepsilon) u_t')_t' + \delta^* u = 0$ подстановкой $u = y_1$, $\sqrt{g}\, u_t' = y_2$ сводится к системе двух уравнений, которая после диагонализации приводится к интегральному уравнению (см. по этому поводу [10], гл. 1).

Оценим число нулей $\nu(t_1, t_2)$ определителя $\Delta(t, \varepsilon)$ на отрезке $[t_1, t_2]$, где $t_1 = s_1 - s_0$, $t_2 = s_2 - s_0$, а $s_1(\varepsilon)$ и $s_2(\varepsilon)$ определены формулой (2.4)*.

Оценим предварительно элементы $c_{ij}(t, \varepsilon)$ при

$$\gamma\varepsilon^{1+\varkappa_1} \leqslant t \leqslant \gamma\varepsilon^{\gamma}. \tag{2.17}$$

В силу (2.3) из (2.10) следует, что

$$c_{22}(t, \varepsilon) = -\frac{a_{11,0}}{\delta^*} t + \frac{b_{1,0}}{\delta^*} \int_0^t \left[\frac{g(0, \varepsilon)}{g(\xi, \varepsilon)} \right]^{\frac{1}{4}} \cos r(\xi, \varepsilon)\, d\xi +$$

---

* Заметим, что согласно леммам 1 и 2 $\nu(t_1, t_2)$ с точностью до ± 2 совпадает с $N_2^+(0)$.

$$+ tO(\gamma_0) + O(t^{\frac{p}{2}}). \qquad (2.18)$$

Интеграл в (2.18) обозначим через J. Взяв его по частям, легко найдем

$$|J| \leqslant C\varepsilon^{\frac{p}{4}} [g(t, \varepsilon)]^{\frac{1}{4}}$$

и, следовательно

$$|J| \leqslant t \cdot C \cdot \frac{\varepsilon^{\frac{p}{4}}}{g^{1/4}} \cdot \frac{g^{1/2}}{t}. \qquad (2.19)$$

Заметим, что при условии (2.17), в силу (2.5) при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{g^{1/2}}{t} = \frac{\sqrt{a_{p,0} t^p + q_0 \varepsilon^p}}{t} = o(1). \qquad (2.20)$$

Предполагая временно, что

$$a_{11,0} \neq 0, \qquad (2.21)$$

получаем

$$c_{22}(t, \varepsilon) = -\frac{a_{11,0}}{\delta} t(1 + o(1)). \qquad (2.22)$$

Интегрируя по частям интеграл с $\sin r(t, \varepsilon)$ в (2.9), получаем:

$$|C_{21}(t, \varepsilon)| \leqslant C[g(t, \varepsilon)]^{1/4}. \qquad (2.23)$$

Имеем теперь, используя (2.8), (2.22),

$$\Delta(t, \varepsilon) = c_{11}c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} =$$

$$= \frac{c_{22}}{g^{1/4}} [\sin r(t, \varepsilon) + \gamma(t, \varepsilon) + \gamma_1(t, \varepsilon)], \qquad (2.24)$$

где

$$\gamma_1(t, \varepsilon) = -g^{\frac{1}{4}} c_{12} c_{21} c_{22}^{-1}. \qquad (2.25)$$

Для этой функции в соответствии с (2.22) и (2.23) имеем

$$|\gamma_1(t, \varepsilon)| \leqslant C g^{1/4} \cdot g^{1/4} \cdot t^{-1} = o(1). \qquad (2.26)$$

Мы воспользовались формулой (2.20). Аналогично доказывается, что при условии (2.17)

$$\left|\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right| = [g(t, \varepsilon)]^{-1/2} \cdot o(1). \qquad (2.27)$$

Используя оценки для $\gamma(t, \varepsilon)$ и $\gamma_1(t, \varepsilon)$, мы заключаем на основании леммы 6, что число нулей $\nu(t_1, t_2)$ определителя $\Delta(t, \varepsilon)$ на отрезке (2.17) с точностью до ± 2 равно

$$\left[\frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\delta - \frac{1}{4}[(\sqrt{g})']^2 + O(\rho_0)}}{\sqrt{g}} d\tau\right].$$

Замечая, что

$$[(\sqrt{g})']^2 = O\left[\left(\frac{t^{p-1}}{\sqrt{g}}\right)^2\right] = O(t^{p-2})$$

с константами в O-членах, не зависящими от ε, получаем

$$\nu(t_1, t_2) = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi}\int\limits_{\varepsilon^{1+\varkappa_1}}^{\varepsilon^{\varkappa}} \frac{d\tau}{\sqrt{g(\tau, \varepsilon)}}(1 + o(1)) =$$

$$= \varepsilon^{\frac{2-p}{2}} \frac{\sqrt{\delta}}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{a_{p,0}\xi^p + q_0}}(1 + o(1)). \qquad (2.28)$$

Таким образом, для $N_2^+(0)$ справедлива асимптотическая формула (2.28) (см. сноску на стр. 122). Поскольку в главный член (2.28) не входит константа C, то эта же формула, очевидно, справедлива и для $N_2^-(0)$. В силу леммы 5 имеем $N_2^-(0) \geqslant N_2(0) \geqslant N_2^+(0)$. Следовательно, формула (2.28) справедлива и для $N_2(0)$. Заметим теперь, что согласно лемме 4

$$N_1(0) = O(\varepsilon^{1+\varkappa_1} \cdot \varepsilon^{-p/2}) = o(\varepsilon^{1-\frac{p}{2}}),$$

а в силу леммы 3 $N_3(0) = O(\varepsilon^{-\varkappa\frac{p}{2}})$, что вследствие (2.5) также есть $o(\varepsilon^{1-\frac{p}{2}})$.

Повторив все рассуждения для отрезка $[a, s_0]$ и воспользовавшись леммами 2 и 1, мы приходим к формуле (2.2).

Освободимся теперь от условия (2.21). Возмутим коэффициент при u в первом уравнении системы (0.1) функцией $\xi\omega(s)$, где $\omega(s)$ положительна в малой окрестности точки s_0 и продолжена нулем на весь отрезок $[a, b]$, ξ—малый параметр. Меняя знак у ξ, находим для $n(\lambda)$ оценки сверху и снизу; устремив ξ к нулю, получаем формулу (2.2) без предположения (2.21).

Если s_0 совпадает с концом отрезка $[a, b]$, то правую часть (2.2) следует разделить на 2. В этом случае p может быть любым действительным числом, большим двух.

В заключение отметим, что обращение формулы (2.2) дает при $k \to \infty$

$$\lambda_k = a - C_0^{\frac{2p}{p-2}} \cdot k^{\frac{2p}{2-p}}(1 + o(1)). \qquad (2.29)$$

Через C_0 обозначена правая часть (2.2).

§ 3. Случай $p=2$

Докажем следующее предложение.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi_1(s)$ достигает положительного инфимума α в единственной точке $s=s_0\in(a, b)$. Пусть $\varphi_1'(s_0)=0$ и*

$$\varphi_1''(s_0)\neq 0, \tag{3.1}$$

тогда

$$\lim_{\lambda\to\alpha-0}\frac{n(\lambda)}{\ln\dfrac{1}{\gamma^2(\alpha-\lambda)}}=\frac{1}{\pi\sqrt{a_{2,0}}}\operatorname{Re}\sqrt{\delta-\frac{1}{4}a_{2,0}}\,. \tag{3.2}$$

Константы те же, что и в теореме 1. По поводу γ см. сноску на стр. 117.

Для доказательства разобьем отрезок $[s_0, b]$ на три, как в (1.16), положив

$$s_1=s_0+\gamma\varepsilon\ln\ln\frac{1}{\varepsilon},\quad s_2=s_0+\gamma\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}. \tag{3.3}$$

Для функции $N_1(0)$ согласно лемме 4 справедлива оценка

$$N_1(0)=O\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{3.4}$$

Для $N_3(0)$ согласно лемме 3 имеем

$$N_3(0)=O\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{3.5}$$

Для оценки $N_2(0)$ обратимся к системам $l^+z=0$ и $l^-z=0$. Последние при $p=2$ имеют вид (ср. (2.7))

$$-((a_{2,0}t^2+q_0\varepsilon^2)(1\pm C\rho_0)u_t')_t'-b_{1,0}v_t'+(\alpha_{11,0}\pm C\rho_0)u=0, \tag{3.6}$$

$$-d_{1,0}(1\pm C\rho_0)v_{tt}''+b_{1,0}u_t'=0,$$

$$t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

где

$$t_1=\gamma\varepsilon\ln\ln\frac{1}{\varepsilon},\quad t_2=\gamma\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}. \tag{3.7}$$

Асимптотика решений системы (3.6) при $t\to 0$ и $\varepsilon\to 0$ отличается от асимптотики, приведенной нами в § 2 при $p>2$. Мы упростим исследование, введя в рассмотрение на отрезке $[t_1, t_2]$ две вспомогательные задачи:

$$-\left(\left(a_{2,0}+\frac{q_0}{C_1^2(\varepsilon)}\right)t^2(1+C\rho_0)u_t'\right)_t'-b_{1,0}v_t'+(\alpha_{11,0}+C\rho_0)u=\mu u,$$

$$-d_{1,0}(1+C\rho_0)v_{tt}''+b_{1,0}u_t'=\mu v \tag{3.8}$$

и

$$-(a_{2,0}(1-C\rho_0)t^2u_t')_t'-b_{1,0}v_t'+(\alpha_{11,0}-C\rho_0)u=\mu u,$$

$$-d_{1,0}(1-C\rho_0)\,v''_{tt}+b_{1,0}u'_t=\mu v \tag{3.9}$$

при нулевых граничных условиях на концах отрезка $[t_1, t_2]$. Систему (3.8) условимся сокращенно записывать в виде $l^{++}z=\mu z$, а систему (3.9)—в виде $l^{--}z=\mu z$. В первом уравнении системы (3.8) мы через $C_1(\varepsilon)$ обозначили $\gamma\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}$; учитывая неравенство $\frac{t}{C_1(\varepsilon)}\geqslant\varepsilon$ при условии $t>t_1$, легко придти к заключению, что $l^{++}\geqslant l\geqslant l^{--}$, и следовательно, $N_2^{--}(0)\geqslant N_2(0)\geqslant N_2^{++}(0)$. Системы (3.8) и (3.9) интегрируются в элементарных функциях. Для элементов $c_{ij}(t,\varepsilon)$ характеристического определителя $\Delta(t,\varepsilon)$ получаем*

$$c_{11}=\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\sigma_1}-\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\sigma_2};\quad c_{21}=\frac{b_{1,0}}{d^*_{1,0}}\int_{t_1}^{t}c_{11}(\tau,\varepsilon)\,d\tau,$$

$$c_{12}=\frac{b_{1,0}}{\delta^*}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\sigma_1}-\frac{b_{1,0}}{\delta^*};\quad c_{22}=\frac{b_{1,0}}{d^*_{1,0}}\int_{t_1}^{t}c_{12}(\tau,\varepsilon)\,d\tau+(t-t_1). \tag{3.10}$$

Здесь через σ_1 и σ_2 обозначены корни квадратного уравнения $\sigma^2+\sigma+\frac{\delta^*}{a^*_{2,0}}=0$, возникающего при решении уравнения Эйлера, к которому сводится интегрирование системы (3.9):

$$\sigma_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{\delta^*-\frac{1}{4}a^*_{2,0}}}{\sqrt{a^*_{2,0}}}.$$

Через $a^*_{2,0}$, $d^*_{1,0}$, δ^* обозначены функции ε, которые стремятся соответственно к $a_{2,0}$, $d_{1,0}$, δ при $\varepsilon\to 0$. Для облегчения оценки нулей $\Delta(t,\varepsilon)$ при $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ удобно сделать подстановку $t=\varepsilon\tau$. В результате мы сведем вопрос к оценке числа нулей функции $\Delta_\varepsilon(\tau)\equiv\Delta(\varepsilon\tau,\varepsilon)$ на отрезке

$$\gamma\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\leqslant\tau\leqslant\gamma\frac{1}{\varepsilon\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{3.11}$$

Легко проверить, что при условии

$$\delta-\frac{1}{4}a_{2,0}>0$$

для $\Delta_\varepsilon(\tau)$ справедлива формула

$$\Delta_\varepsilon(\tau)=2i\varepsilon\tau^{\frac{1}{2}}C_2C_1^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)\left\{\sin\left[\frac{\sqrt{\delta^*-\frac{1}{4}a^*_{2,0}}}{\sqrt{a^*_{2,0}}}\ln\frac{\tau}{C_1}+\varphi_0\right]+O(\tau^{-1/2})\right\}. \tag{3.12}$$

* Мы ограничиваемся рассмотрением системы (3.8). Условия Коши (ср. (1.10) и (1.11)) ставятся при $t=t_1$.

Здесь φ_0 и $C_0>0$ — постоянные. Следовательно, для числа нулей $\nu(t_1, t_2)$ детерминанта $\Delta(t, \varepsilon)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ справедлива оценка

$$\nu(t_1, t_2)=\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\delta^* - \frac{1}{4}\dot{a}_{2,0}}}{\sqrt{\dot{a}_{2,0}}} \ln\frac{1}{\varepsilon}+O\left(\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{3.13}$$

Такая же оценка справедлива, очевидно, и в случае системы $l^{--}z=0$. Учитывая (3.4), (3.5) и формулу $\varepsilon=|\gamma^2(\alpha-\lambda)|^{1/2}$, мы для случая внутренней точки s_0 получаем соотношение (3.2).

Если $\delta-\frac{1}{4}a_{2,0}\leqslant 0$, то определитель $\Delta(t, \varepsilon)$ имеет лишь конечное число нулей на отрезке $[t_1, t_2]$ и формула (3.2) справедлива всегда.

§ 4. Некоторые замечания

1°. В случае, если функция $\varphi_1(s)$ достигает своего инфимума α в нескольких точках с одним и тем же p, то главный член асимптотической формулы для $n(\lambda)$ представляет собой при $p>2$ сумму правых частей (2.2), а при $p=2$ сумму правых частей (3.2).

В связи с формулой (2.2) отметим, что если $\varphi_1(s)$ принимает свое наименьшее значение α на некотором отрезке $[s_0-d, s_0+d]$ (это соответствует $p=+\infty$), то для функции распределения справедлива формула

$$\lim_{\lambda\to\alpha-0}\frac{n(\lambda)}{(\alpha-\lambda)^{-1/2}}=\frac{1}{\pi}\int_{-d}^{d}\frac{\sqrt{\delta(s)}}{\sqrt{q(s)}}ds, \tag{4.1}$$

где $\delta(s)=\frac{b_1^2(s)}{d_1(s)}-a_{11}(s)$ (ср. (2.3)), а $q(s)=\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}a_1(s, \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ (ср. (1.19)).

Нетрудно показать, что в этом случае участок меридиана оболочки, соответствующий $s\in[s_0-d, s_0+d]$, представляет собой либо вертикальный отрезок (случай цилиндра), либо дугу окружности с центром на оси вращения (случай сферического пояса).

Интеграл в правой части (4.1) берется явно и в случае цилиндра равен

$$\frac{2d}{\pi R_2^2}\sqrt{(1-\sigma^2)(\sigma^2+2m^2)}, \tag{4.2}$$

а в случае сферы равен

$$\frac{2d}{\pi R^2}\sqrt{(1-\sigma^2)(1+\sigma)(2+\sigma)}. \tag{4.3}$$

Обратив формулу (4.1), найдем при $k\to+\infty$

$$\lambda_k=\alpha-\frac{C_0^2}{k^2}(1+o(1)), \tag{4.4}$$

где через C_0 обозначена правая часть (4.1).

2°. Приведем выражения для констант, входящих в формулы предыдущих параграфов.

Пусть в окрестности точки $s = s_0$, где $\varphi_1(s)$ достигает инфимума

$$B(s) = \beta_0 + \beta_1 t + \frac{1}{2!}\beta_2 t^2 + \cdots, \quad t = s - s_0, \tag{4.5}$$

и

$$\varphi_1(s) = \frac{1-\sigma^2}{\beta_0^2}\left\{\omega_0 + \omega_1 t + \frac{1}{2!}\omega_2 t^2 + \cdots\right\}, \tag{4.6}$$

тогда

$$\omega_0 = 1 - \beta_1^2, \quad \omega_1 = -\frac{2\beta_1}{\beta_0}(1 - \beta_1^2 + \beta_0\beta_2),$$

$$\omega_2 = 2\left[-\beta_2^2 - \frac{\beta_2}{\beta_0}(1 - 5\beta_1^2) + \frac{3(1-\beta_1^2)\beta_1^2}{\beta_0^2} - \beta_1\beta_3\right]. \tag{4.7}$$

Условие $\varphi_1'(s_0) = 0$ (см. (1.13)) выполняется согласно (4.7) в двух случаях:

А. $\beta_1 = B_б'(s_0) = 0$,

Б. $1 - \beta_1^2 + \beta_0\beta_2 = 0$.

В случае А. меридиан имеет в точке $s = s_0$ вертикальную касательную, и мы назовем этот случай цилиндрическим. В случае Б точка $s = s_0$ является омбилической: $R_1(s_0) = R_2(s_0)$, и мы назовем этот случай сферическим. Выражения для констант через функцию $B(s)$ и ее производные в случаях А и Б оказываются различными.

Случай А. $p=2$.

Имеем: $\omega_2 > 0$. Отсюда, в силу (4.7), $-\frac{1}{\beta_0} < \beta_2 < 0$. Далее,

$$a_{2.0} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial s^2} a_1(s, \varepsilon)\Big|_0 = -\frac{(1-\sigma^2)\beta_2(1+\beta_0\beta_2)}{(\sigma-\beta_0\beta_2)^2} > 0, \tag{4.8}$$

$$q_0 = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} a_1(s, \varepsilon)\Big|_0 = \frac{\beta_0^3}{(\sigma - \beta_0\beta_2)^2} > 0, \tag{4.9}$$

$$d_{1,0} = \frac{1-\sigma}{2}\beta_0 > 0, \tag{4.10}$$

$$b_{1,0} = \frac{m(1-\sigma)}{2(\sigma-\beta_0\beta_2)}(2+\sigma+\beta_0\beta_2), \tag{4.11}$$

$$a_{11,0} = \frac{(1-\sigma)m^2}{2\beta_0} - (1-\sigma^2)\frac{\sigma - 2\beta_0\beta_2}{\beta_0(\sigma-\beta_0\beta_2)}. \tag{4.12}$$

Для δ (см. (2.3)) получаем формулу

$$\delta = \frac{2m^2(1-\sigma^2)(1+\beta_0\beta_2)}{\beta_0(\sigma-\beta_0\beta_2)^2} + (1-\sigma^2)\frac{\sigma-2\beta_0\beta_2}{\beta_0(\sigma-\beta_0\beta_2)} > 0, \tag{4.13}$$

а

$$\delta-\frac{1}{4}a_{2,0}=\frac{1-\sigma^2}{4\beta_0(\sigma-\beta_0\beta_2)^2}[8m^2(1+\beta_0\beta_2)+$$

$$+9(\beta_0\beta_2)^2-(12\sigma-1)\beta_0\beta_2+4\sigma^2]. \qquad (4.14)$$

Случай А. $p>2$.

Имеем:

$$\omega_2=-2\beta_2'\left(\beta_2+\frac{1}{\beta_0}\right)=0 \qquad (4.15)$$

и $\omega_p>0$. Далее

$$a_{p,0}=\frac{1}{p!}\frac{\partial^p}{\partial s^p}a_1(s,\varepsilon)\Big|_0=\frac{\beta_0(1-\sigma^2)}{(\sigma-\beta_0\beta_2)^2}\cdot\frac{\omega_p}{p!}>0. \qquad (4.16)$$

Остальные константы те же, что и в случае $p=2$. Следует лишь учесть условие (4.15).

Случай Б. $p=2$.

Поскольку $\omega_2>0$, то $\beta_1\neq0$, иначе последняя формула (4.7) приведет к противоречию. Имеем

$$a_{2,0}=\frac{(1-\sigma)\beta_0\omega_2}{2(1+\sigma)\omega_0}>0, \qquad (4.17)$$

$$q_0=\frac{\beta_0^3}{(1+\sigma)^2\omega_0}>0, \qquad (4.18)$$

$$d_{1,0}=\frac{1-\sigma}{2}\beta_0>0, \qquad (4.19)$$

$$b_{1,0}=\frac{1-\sigma}{2}m, \qquad (4.20)$$

$$a_{11,0}=\frac{(1-\sigma)m^2}{2\beta_0}-(1-\sigma)\beta_0\left[\frac{(2+\sigma)\omega_0}{\beta_0^2}+\frac{\omega_2}{2(1+\sigma)\omega_0}\right], \qquad (4.21)$$

$$\delta=(1-\sigma)\left[\frac{(2+\sigma)\omega_0}{\beta_0}+\frac{\beta_0\omega_2}{2(1+\sigma)\omega_0}\right]>0. \qquad (4.22)$$

И, наконец

$$\delta-\frac{1}{4}a_{2,0}=(1-\sigma)\left\{\frac{(2+\sigma)\omega_0}{\beta_0}+\frac{3\beta_0\omega_2}{8(1+\sigma)\omega_0}\right\}>0. \qquad (4.23)$$

Подчеркнем, что в этом случае правая часть (3.2) всегда положительна и не зависит от m.

Случай Б. $p>2$.

Имеем

$$a_{p,0}=\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\frac{\beta_0\omega_p}{p!\,\omega_0}>0 \qquad (4.24)$$

и

$$q_0=\frac{\beta_0^3}{(1+\sigma)^2\omega_0}>0. \qquad (4.25)$$

Остальные константы те же, что и в случае Б, $p=2$, следует лишь учесть, что $\omega_2=0$.

Ա. Գ. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Վ. Բ. ԼԻԴՍԿԻ. Պտտման թաղանթների տեսության ստորին խմբի հաճախականությունների համար ասիմպտոտական բանաձևեր (*ամփոփում*)

Դիտարկվում է բարակ, ճկուն պտտման թաղանթների սեփական տատանումները նկարագրող ավերածված դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմ։ Գտնված են պայմաններ, որոնց դեպքում սեփական թվերի ցածրագույն խումբը անվերջ է։ Գտնված է սեփական թվերի ասիմպտոտիկան։

A. G. ASLANIAN, V. B. LIDSKII. *Asymptotic formula for frequencet of lower seria in theory of shells* (summary)

The paper concernes a „degenerate" system of differential equations describing the natural oscillations of a thin elastic shell of revolution. The conditions are found under which the lower seria of eigenvelues is infinite. The asymptotics of the eigenvalues is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Гольденвейзер.* Некоторые математические проблемы теории упругих тонких оболочек, УМН, XV, вып. V, 1960, 3—75.
2. *П. Е. Товстик.* Исследования по упругости и пластичности, Изд. ЛГУ, № 5, 1966, 45—55.
3. *А. Г. Асланян, В. Б. Лидский.* Осцилляционная теорема в теории колебаний тонких оболочек вращения, ДАН СССР, 196, № 5, 1971, 1040—1042.
4. *А. Г. Асланян, В. Б. Лидский.* Спектр системы, описывающей колебания оболочки вращения, ПММ; 35, № 4, 1971.
5. *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН, XII, вып. 5 (77), 1957, 3—122.
6. *В. Б. Лидский.* Осцилляционные теоремы для канонической системы дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 102, 1955, 877—880.
7. *Ф. Аткинсон.* Дискретные и непрерывные задачи, М., 1968, гл. 10.
8. *Р. Курант, Д. Гильберт.* Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
9. *И. М. Глазман.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., Физматгиз, 1963.
10. *И. М. Рапопорт.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд. АН УССР, Киев, 1954.