ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 1, 1971 Математика

Л. А. ТЕР-ИСРАЕЛЯН

РАВНОМЕРНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ В УГЛЕ ФУНКЦИЙ МЕРОМОРФНЫМИ С ОЦЕНКОЙ ИХ РОСТА

В настоящей работе рассматривается задача равномерного приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценками их роста. Вопросы аппроксимации в угле целыми функциями рассмотрены в работах М. В. Келдыша [1, 2]. В случае приближения в угле целыми функциями часто оказывается, что рост аппроксимирующей функции намного больше роста аппроксимируемых функций и, в силу теорем типа Фрагмена-Линделефа, сильно зависит от раствора угла аппроксимации. В случае же приближения мероморфными функциями их рост (в терминах роста характеристической функции) удается ограничить ростом голоморфной в угле функции, которую мы приближаем. Кроме того, оказывается, что в случае приближения мероморфными функциями задача касательного приближения сравнительно легко сводится к задаче равномерного приближения.

Результаты, полученные в настоящей работе, имеют применение в теории распределения значений мероморных функций (следствие 2).

Теорема 1. *Пусть* $0<\alpha<\beta<2\pi$ *и* $f(z)$ — *голоморфная функция в угловой области* $\Delta_\beta=\left\{z\in\mathrm{C}\colon |\arg z|\leqslant\frac{\beta}{2}\right\}$. *Тогда для всякого* $\varepsilon\in(0,1)$ *и* $q\in\left(1, 1+\sin\frac{\beta-\alpha}{4}\right)$ *существует мероморфная функция* $F(z)$, *удовлетворяющая условиям*

1. $|f(z)-F(z)|\leqslant\varepsilon$ *для* $z\in\Delta_\alpha$, $|z|\geqslant 1$;
2. $|F(z)|\leqslant\varepsilon$ *для* $z\in \mathrm{C}\diagdown\Delta_\beta$;
3. $$T(r,F)\leqslant A\left[\int_1^r\int_1^t\frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\,d\tau\,dt+\int_1^r\frac{\ln M(qt)}{t}\,dt+\right.$$
$$\left.+\ln^+M(q^{l+1}r)+\ln^3 r+1\right]\qquad \text{для } r\geqslant 1,$$

где $T(r,F)$ — *неванлинновская характеристика* $F(z)$, $M(r)=\max\limits_{|z|<r}|f(z)|$, l — *наименьшее целое, удовлетворяющее условию* $q^{l-1}>\dfrac{1}{1-\sin\frac{\beta-\alpha}{4}}$, *а* A *не зависит от* r.

Доказательство. Сделаем следующие обозначения:

$$l_k = \left\{\zeta \in \mathbf{C}\colon \arg\zeta = \frac{\alpha+\beta}{4},\ q^k \leqslant |\zeta| \leqslant q^{k+1}\right\},$$

$$l'_k = \left\{\zeta \in \mathbf{C}\colon \arg\zeta = -\frac{\alpha+\beta}{4},\ \ q^k \leqslant |\zeta| \leqslant q^{k+1}\right\} \quad (k = -1, 0, 1, \cdots),$$

$$\Gamma_k = \left\{\zeta \in \mathbf{C}\colon\ |\zeta| = q^k,\ \ |\arg\zeta| \leqslant \frac{\alpha+\beta}{4}\right\}.$$

Пусть l_k ориентировано по убыванию модуля его точек, l'_k — по возрастанию, а Γ_k — по возрастанию $\arg z$ $(z \in \Gamma_k)$. Обозначим через $-l_k$, $-l'_k$ и $-\Gamma_k$ те же самые кривые, но имеющие противоположное направление. Теперь обозначим

$$\gamma = l_{-1} \cup (-\Gamma_{-1}) \cup l'_{-1},\quad L_n = \bigcup_{k=0}^{n} l_k,\quad L'_n = \bigcup_{k=0}^{n} l'_k,\quad \gamma_n = L_n \cup L'_n.$$

$$V_k = \left\{z \in \mathbf{C}\colon\ |z-\zeta_k| < q^k \sin\frac{\beta-\alpha}{4}\right\},\ \text{где } \zeta_k = q^k e^{i\frac{\alpha+\beta}{4}},\quad (k = 0, 1, \cdots)$$

$$V'_k = \left\{z \in \mathbf{C}\colon\ |z-\zeta'_k| < q^k \sin\frac{\beta-\alpha}{4}\right\},\ \text{где } \zeta'_k = q^k e^{-i\frac{\alpha+\beta}{4}}.$$

При $\zeta \in l_k$, $z \overline{\in} V_k$ имеем следующее разложение для $\dfrac{1}{\zeta - z}$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\zeta_k)^j}{(z-\zeta_k)^{j+1}}.$$

Это разложение допустимо, так как имеем оценку

$$\left|\frac{\zeta-\zeta_k}{z-\zeta_k}\right| \leqslant \left|\frac{\zeta_{k+1}-\zeta_k}{z-\zeta_k}\right| \leqslant \frac{q^k(q-1)}{q^k \sin\frac{\beta-\alpha}{4}} = \frac{q-1}{\sin\frac{\beta-\alpha}{4}} = d < 1.$$

Совершенно аналогично

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\zeta'_k)^j}{(z-\zeta'_k)^{j+1}} \quad \text{для } \zeta \in l'_k,\ z \overline{\in} V'_k.$$

В частности, эти разложения возможны для

$$\zeta \in l_k\ (\zeta \in l'_k) \text{ и } z \in \Delta_2 \cup (\overline{\mathbf{C} \setminus \Delta_3}).$$

Рассмотрим следующие последовательности функций:

$$Q_k(\zeta, z) = -\sum_{j=0}^{n_k} \frac{(\zeta-\zeta_k)^j}{(z-\zeta_k)^{j+1}} \qquad (k = 0, 1, \cdots)$$

$$Q'_k(\zeta, z) = -\sum_{j=0}^{n_k} \frac{(\zeta-\zeta'_k)^j}{(z-\zeta'_k)^{j+1}},$$

в которых последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ пока не определена.

Теперь определим функцию $Q(\zeta, z)$ следующим образом:

$$Q(\zeta, z)=\begin{cases} Q_k(\zeta, z) & \text{для } \zeta\in l_k\setminus\zeta_{k+1} \\ Q_k'(\zeta, z) & \text{для } \zeta\in l_k'\setminus\zeta_{k+1}'. \end{cases} \qquad (k=0, 1, \cdots)$$

Для $\zeta\in l_k\setminus\zeta_{k+1}$, $z\overline{\in} V_k$ имеем оценку:

$$\left|\frac{1}{\zeta-z}-Q(\zeta, z)\right|\leqslant Cd^{n_k}, \text{ где } C=\frac{d}{(1-d)\sin\dfrac{\beta-\alpha}{4}}. \tag{1}$$

Аналогично получим

$$\left|\frac{1}{\zeta-z}-Q(\zeta, z)\right|\leqslant Cd^{n_k} \text{ для } \zeta\in l_k'\setminus\zeta_{k+1}', \ z\overline{\in} V_k'. \tag{1'}$$

Оценки (1) и (1′) получаются непосредственно из определения функции $Q(\zeta, z)$ и разложений для $\dfrac{1}{\zeta-z}$.

Рассмотрим функцию $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$. Для произвольных $\varepsilon>0$ и $\eta>0$ существует рациональная функция $R_1(z)$ с полюсами на γ такая, что

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-R_1(z)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ для } z\in\mathbf{C}\setminus\gamma(\eta),$$

где $\gamma(\eta)$ это η-окрестность множества γ.

η возьмем настолько малым, чтобы выполнялись условия

$$\gamma(\eta)\cap(\overline{\mathbf{C}\setminus\Delta_\beta})=\varnothing,\ \gamma(\eta)\cap\Delta_*\cap\{z\in\mathbf{C}: |z|\geqslant 1\}=\varnothing.$$

Обозначим

$$D_{n,m}=\left\{z\in\mathbf{C}: q^n\leqslant|z|\leqslant q^m,\ |\arg z|\leqslant\frac{\alpha+\beta}{4}\right\} \text{ для } n<m.$$

Теперь рассмотрим последовательность функций $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, определяемую следующим образом:

$$F_n(z)=R_1(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}f(\zeta)\,Q(\zeta, z)\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{n+1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Покажем, что возможен такой выбор последовательности $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, чтобы последовательность $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходилась на каждом компакте $K\subset\mathbf{C}$. Пусть $z\in K$. Тогда можно выбрать настолько большое n, чтобы выполнялись условия

$$K\cap D_{n,m}=\varnothing \text{ для любого } m>n \text{ и } K\cap V_n=K\cap V_n'=\varnothing.$$

Теперь, учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{n+1,\,m+1}\uparrow}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,$$

получим

$$|F_m(z)-F_n(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=n+1}^{m}\int\limits_{l_k\cup l'_k}|f(\zeta)|\left|Q(\zeta,z)-\frac{1}{\zeta-z}\right||d\zeta|.$$

Отсюда, применяя оценки (1) и (1′), получим

$$|F_m(z)-F_n(z)|\leqslant\frac{C}{\pi}\sum_{k=n+1}^{m}\int\limits_{q^k}^{q^{k+1}}M(r)\,d^{n_k}\,dr.$$

Введя ступенчатую функцию $\tilde{n}(r)=n_k$ для $r\in[q^k,\ q^{k+1})$ $(k=0,1,\cdots)$, получим

$$|F_m(z)-F_n(z)|\leqslant\frac{C}{\pi}\int\limits_{q^{n+1}}^{q^{m+1}}M(r)\,d^{\tilde{n}(r)}\,dr.$$

Теперь уже выбор $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ определится выбором функции $\tilde{n}(r)$ для $r>1$. $\tilde{n}(r)$ определим как ступенчатую функцию, удовлетворяющую неравенству

$$M(r)\,d^{\tilde{n}(r)}\leqslant\frac{\pi\varepsilon}{3Cr^2}\quad\text{для } r\geqslant1. \tag{2}$$

Из (2) следует сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty}M(r)\,d^{\tilde{n}(r)}\,dr$, причем

$$\frac{C}{\pi}\int\limits_1^{\infty}M(r)\,d^{\tilde{n}(r)}\,dr\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

Для удовлетворения (2) выберем $\tilde{n}(r)$ следующим образом:

$$\tilde{n}(r)=n_k=\left[\max\left\{1;\ \frac{\ln\left\{M(q^{k+1})\dfrac{Cq^{2(k+1)}}{\pi\varepsilon}\right\}}{\ln\dfrac{1}{d}}+1\right\}\right]$$

для $r\in[q^k,\ q^{k+1})$ $(k=0,1,\cdots)$, где квадратные скобки означают целую часть находящегося в них выражения.

Очевидно

$$\tilde{n}(r)\leqslant C_1+\frac{\ln\left\{M(rq)\dfrac{Cq^2r^2}{\pi\varepsilon}\right\}}{\ln\dfrac{1}{d}}\quad\text{для } r\geqslant1, \tag{2'}$$

где C_1—некоторая постоянная относительно r.

При указанном выборе $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ последовательность $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходится на каждом компакте $K \subset \mathbf{C}$. Из самого вида функций $F_n(z)$ $(n=0, 1, \cdots)$ следует, что предельная функция $F(z)$ является мероморфной с полюсами порядка не выше n_k в точках ζ_k, ζ'_k, а также имеющей общие полюсы с $R_1(z)$.

Докажем, что $F(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

Пусть сначала $z \in \Delta_k$, $|z|>1$. Выберем n настолько большим, чтобы $z \in D_{0,n}$ и $|F(z)-F_n(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда, учитывая,

что
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{-1,n+1}\uparrow}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$
получим

$$|F(z)-f(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\left|F_n(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{-1,n+1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_n}|f(\zeta)|\left|Q(\zeta,z)-\frac{1}{\zeta-z}\right||d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{C}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty}M(r)\,d^{\overline{n}(r)}\,dr \leqslant \varepsilon.$$

Итак, условие 1 для функции $F(z)$ выполнено.

Пусть теперь $z \in \overline{\mathbf{C}\setminus\Delta_\beta}$. Выберем n настолько большим, чтобы $|F(z)-F_n(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Так как $z \overline{\in} D_{-1,n+1}$, имеем $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{-1,n+1}\uparrow}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0$.

Учитывая это, получим

$$|F(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\left|F_n(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{-1,n+1}\uparrow}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right| \leqslant \varepsilon.$$

Итак, условие 2 для $F(z)$ также выполнено.

Перейдем к оценке неванлинновской характеристики $T(r,F)=$ $=m(r,F)+N(r,F)$ функции $F(z)$.

Сперва оценим $N(r,F)=\int\limits_{0}^{r}\frac{n(t,F)}{t}\,dt$. Обозначим через N_1 число полюсов $R_1(z)$, получим для $r>1$

$$n(r,F)=N_1+2\sum_{|\zeta_k|<r}n_k=N_1+2\sum_{q^k<r}n_k=N_1+2\sum_{k<\frac{\ln r}{\ln q}}n_k.$$

Применяя оценку (2′), получим

$$n(r, F) \leqslant N_1 + \left(C_1 + \frac{\ln \frac{Cq^2}{\pi\varepsilon}}{\ln \frac{1}{q}}\right)\frac{\ln r}{\ln q} + \frac{2\ln q}{\ln \frac{1}{d}}\left(\frac{\ln r}{\ln q} + 1\right)\frac{\ln r}{\ln q} +$$

$$+ \frac{2}{\ln \frac{1}{d}} \sum_{q^k < r} \ln M(q^{k+1}).$$

Кроме того

$$\ln M(q^{k+1}) \leqslant \frac{1}{q^{k+1} - q^k} \int_{q^k}^{q^{k+1}} \ln M(qt)\, dt \leqslant \frac{q}{q-1} \int_{q^k}^{q^{k+1}} \frac{\ln M(qt)}{t}\, dt.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{q^k < r} \ln M(q^{k+1}) \leqslant \frac{q}{q-1} \int_1^r \frac{\ln M(qt)}{t}\, dt + \frac{q}{q-1} \ln M(qr).$$

Теперь для $n(r, F)$ получим оценку

$$n(r, F) \leqslant \frac{2q}{(q-1)\ln \frac{1}{d}}\left(\int_1^r \frac{\ln M(qt)}{t}\, dt + \ln M(qr)\right) + B_1 \ln^2 r + N_1,$$

где B_1 не зависит от r.

Учитывая, что для $t \in [q^{-1}, 1)$ $n(t, F) \leqslant N_1$, окончательно получим оценку для $N(r, F)$

$$N(r, F) \leqslant \frac{2q}{(q-1)\ln \frac{1}{d}}\left(\int_1^r \int_1^t \frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\, d\tau\, dt + \int_1^r \frac{\ln M(qt)}{t}\, dt\right) +$$

$$+ B \ln^3 r + N_1 \ln q,$$

где B не зависит от $r > 1$.

Перейдем теперь к оценке $m(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |F(re^{i\theta})|\, d\theta$. Предположим, что $r \geqslant q^2$. Пусть h — то целое, для которого $r \in [q^h, q^{h+1})$. Тогда ясно, что $h > 2$, и пусть l — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$q^{l-1} > \frac{1}{1 - \sin \frac{\beta - \alpha}{4}}.$$

Очевидно, что для такого l и $r \in [q^h, q^{h+1})$ имеем

$$re^{i\theta} \overline{\in} V_{h+l} \cup V'_{h+l}.$$

Возьмем теперь j настолько большим, чтобы выполнялось

$$|F(re^{i\theta})-F_j(re^{i\theta})|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3} \text{ и } j>h+l.$$

Тогда получим

$$|F_j(re^{i\theta})-F_{h+l}(re^{i\theta})|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

И далее

$$\ln^+|F(re^{i\theta})|\leqslant\ln^+|F_{h+l}(re^{i\theta})|+\ln 2.$$

Учитывая, что при $r\in[q^h, q^{h+1})$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{-1,h-1}\uparrow}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,$$

получим $$|F_{h-2}(re^{i\theta})|\leqslant\varepsilon.$$

Эта оценка возможна, потому что $re^{i\theta}\overline{\in}V_{h-2}\cup V'_{h-2}$. Отсюда

$$\ln^+|F(re^{i\theta})|\leqslant\ln^+|F_{h+l}(re^{i\theta})-F_{h-2}(re^{i\theta})|+2\ln 2.$$

Имеем

$$|F_{h+l}(re^{i\theta})-F_{h-2}(re^{i\theta})|\leqslant\Bigl|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{h+l}\setminus\gamma_{h-2}}f(\zeta)\,Q(\zeta,re^{i\theta})\,d\zeta\Bigr|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{h-1}}|f(\zeta)|\left|\frac{1}{\zeta-re^{i\theta}}\right||d\zeta|+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{h+l+1}}|f(\zeta)|\left|\frac{1}{\zeta-re^{i\theta}}\right||d\zeta|.$$

Далее

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{h+l+1}}|f(\zeta)|\frac{1}{|\zeta-re^{i\theta}|}|d\zeta|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{M(q^{h+l+1})}{q^{h+l+1}-q^{h+1}}q^{h+l+1}\cdot2\pi\leqslant\frac{q^l}{q^l-1}\cdot M(q^{l+1}r), \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{h-1}}|f(\zeta)|\frac{1}{|\zeta-re^{i\theta}|}|d\zeta|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{M(q^{h-1})}{q^h-q^{h-1}}q^{h-1}\,2\pi\leqslant\frac{1}{q-1}M(r). \tag{5}$$

Оценим $\displaystyle\Bigl|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{h+l}\setminus\gamma_{h-2}}f(\zeta)\,Q(\zeta,re^{i\theta})\,d\zeta\Bigr|.$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{h+l}\setminus\gamma_{h-2}}f(\zeta)\,Q(\zeta,re^{i\theta})\,d\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=h-1}^{h+l}\int\limits_{l_k\cup l'_k}|f(\zeta)|\;|Q(\zeta,re^{i\theta})|\,|d\zeta|.$$

При $\zeta\in l_k$ имеем

$$|Q(\zeta,re^{i\theta})|=|Q_k(\zeta,re^{i\theta})|\leqslant\sum_{j=0}^{n_k}\frac{|\zeta_{k+1}-\zeta_k|^j}{|re^{i\theta}-\zeta_k|^{j+1}}\leqslant$$

$$\leqslant (n_k+1)\left(1+\frac{|\zeta_{k+1}-\zeta_k|^{n_k}}{|re^{i\theta}-\zeta_k|^{n_k+1}}\right),$$

а при $\zeta\in l_k'$ имеем

$$|Q(\zeta, re^{i\theta})|\leqslant (n_k+1)\left(1+\frac{|\zeta_{k+1}'-\zeta_k'|^{n_k}}{|re^{i\theta}-\zeta_k'|^{n_k+1}}\right).$$

Введем функцию $\delta(re^{i\theta})$ следующим образом:

$$\delta(re^{i\theta})=\min\{\min_{h-1\leqslant k\leqslant h+l}\{|re^{i\theta}-\zeta_k|\};\ \min_{h-1\leqslant k\leqslant h+l}\{|re^{i\theta}-\zeta_k'|\}\}.$$

Отсюда для $\zeta\in l_k\cup l_k'$ получим

$$|Q(\zeta, re^{i\theta})|\leqslant (n_k+1)\left(1+q^{ln_k}\frac{r^{n_k}}{[\delta(re^{i\theta})]^{n_k+1}}\right).$$

Здесь мы использовали тот факт, что для $k\in[h-1, h+l)$ и $r\in[q^h, q^{h+1})$ имеем

$$|\zeta_{k+1}-\zeta_k|=|\zeta_{k+1}'-\zeta_k'|\leqslant q^l\cdot r.$$

Учитывая то, что для $\zeta\in\gamma_{h+l}\setminus\gamma_{h-2}$ и $r\in[q^h, q^{h+1})$

$$|f(\zeta)|\leqslant M(q^{h+l+1})\leqslant M(q^{l+1}r),$$

$$\int\limits_{l_k\cup l_k'}|d\zeta|\leqslant 2q^l r,\ \text{когда}\ k\in[h-1, h+l],$$

получим

$$\int\limits_{l_k\cup l_k'}|f(\zeta)|\,|Q(\zeta, re^{i\theta})|\,|d\zeta|\leqslant 2q^l(n_k+1)\,M(q^{l+1}r)\left[r+q^{ln_k}\left(\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\right)^{n_k+1}\right].$$

А так как n_k возрастает с возрастанием k, то

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{h+l}\setminus\gamma_{h-2}}f(\zeta)\,Q(\zeta, re^{i\theta})\,d\zeta\right|\leqslant\frac{q^l(l+1)(n_{h+l}+1)\,M(q^{l+1}r)}{\pi}\times$$

$$\times\left[r+q^{ln_{h+l}}\left(\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\right)^{n_{h+l}+1}\right].$$

Отсюда получим следующую оценку:

$$\ln^+\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{h+l}\setminus\gamma_{h-2}}f(\zeta)\,Q(\zeta, re^{i\theta})\,d\zeta\right|\leqslant\ln^+M(q^{l+1}r)+\ln^+n_{h+l}+\ln r+$$

$$+n_{h+l}\,l\ln q+(n_{h+l}+1)\ln^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}+\ln^+\frac{q^l(l+1)}{\pi}+2\ln 2.$$

Учитывая (4) и (5), получим

$$\ln^+|F(re^{i\theta})|\leqslant 3\ln^+M(q^{l+1}r)+n_{h+l}\left(l\ln q+\ln^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}+1\right)+\ln r+$$

$$+\ln^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}+\ln^+\frac{q^l(l+1)}{\pi}+\ln^+\frac{q^l}{q^l-1}+\ln^+\frac{1}{q-1}+2\ln 2+\ln 3. \tag{6}$$

По определению $n_{h+l}=\bar{n}(q^l r)$ для $r\in[q^h, q^{h-1})$, а используя (2'), получим

$$n_{h+l}\leqslant C_1+\frac{\ln\left\{M(q^{l+1}r)\frac{Cq^{2(l+1)}r^2}{\pi\varepsilon}\right\}}{\ln\frac{1}{d}}\quad\text{при } r\in[q^h, q^{h+1}).$$

При интегрировании (6) от 0 до 2π будет фигурировать $\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\,d\theta$.

Однако такой интеграл оценивается независимо от r (см. [3]).

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\,d\theta\leqslant 2\ln 2\,(l+2)+\frac{1}{2}\cdot$$

Теперь с учетом вышесказанного из (6) получим

$$m(r,F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|F(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant A''(\ln^+M(q^{l+1}r)+\ln r+1)\ \text{для}\ r>q^2,$$

где A'' не зависит от r.

Отсюда следует окончательная оценка для $m(r,F)$ при $r>1$;

$$m(r,F)\leqslant A'(\ln^+M(q^{l+1}r)+\ln r+1), \tag{7}$$

где A' не зависит от r.

Из (3) и (7) получим искомую оценку для $T(r,F)$

$$T(r,F)\leqslant A\left(\int\limits_1^r\int\limits_1^t\frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\,d\tau dt+\int\limits_1^r\frac{\ln M(qt)}{t}\,dt+\ln^+M(q^{l+1}r)+\ln^2 r+1\right)$$

для $r>1$, где A не зависит от r.

Из теоремы 1 можно вывести интересное следствие о приближении голоморфной в угле функции мероморфной с касанием в бесконечности, с оценкой роста этой мероморфной функции.

Следствие 1. *Пусть* $0<\alpha<\beta<2\pi$ *и* $f(z)$ — *голоморфная функция в угловой области* Δ_β. *Тогда для всякого* $\rho\in\left(0,\frac{\pi}{\alpha}\right)$, $\varepsilon\in(0,1)$ *и* $q\in\left(1, 1+\sin\frac{\beta-\alpha}{4}\right)$ *существует мероморфная функция* $F(z)$, *удовлетворяющая условиям:*

1. $|f(z)-F(z)|\leqslant\varepsilon e^{-|z|^\rho}$ *для* $z\in\Delta_\alpha$, $|z|\geqslant 1$;

$$2.\ T(r, F) \leqslant A\left(\int_1^r\int_1^t \frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\,d\tau dt + \int_1^r \frac{\ln M(q\tau)}{t}\,dt + \ln^+ M(q^{l+1}r) + r^\rho\right)$$

для $r \geqslant 1$, *где* A *не зависит от* r, *а* $T(r, F)$, $M(r)$, l *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1.

Доказательство. Рассмотрим функцию $e^{K_\rho z^\rho}$, где $K_\rho > 0$ пока произвольная константа. Эта функция голоморфна в некотором угле Δ_γ, где $0 < \beta < \gamma < 2\pi$, и максимум модуля ее не превышает $e^{K_\rho z^\rho}$ для $|z| \leqslant r$. Тогда по теореме 1 существует мероморфная функция $\omega(z)$, удовлетворяющая условиям:

1. $|\omega(z) - e^{K_\rho z^\rho}| \leqslant \varepsilon$ для $z \in \Delta_\beta$, $|z| \geqslant 1$;
2. $T(r, \omega) \leqslant A' r^\rho$ для $r \geqslant 1$,

где A' не зависит от r.

Теперь рассмотрим функцию $\varphi(z) = f(z)\,\omega(z)$. Эта функция голоморфна в угле Δ_β и имеет в нем максимум модуля, не превышающий $M(r)\,(e^{K_\rho z^\rho} + \varepsilon)$, где $M(r)$ — максимум модуля $f(z)$ в области $\Delta_\beta \cap \{z \in \mathbb{C}: |z| \leqslant r\}$. Вновь применяя теорему 1, получим, что существует мероморфная функция $G(z)$, удовлетворяющая условиям:

1. $|\varphi(z) - G(z)| \leqslant \varepsilon$ для $z \in \Delta_\alpha$, $|z| \geqslant 1$;

$$2.\ T(r, G) \leqslant A''\left(\int_1^r\int_1^t \frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\,d\tau dt + \int_1^r \frac{\ln M(qt)}{t}\,dt + \ln^+ M(q^{l+1}r) + r^\rho\right)$$

для $r \geqslant 1$, где q и l определяются, как и в теореме 1, а A'' не зависит от r.

Докажем, что искомой мероморфной функцией будет функция $F(z) = \dfrac{G(z)}{\omega(z)}$. Для $z \in \Delta_\alpha$, $|z| \geqslant 1$ имеем

$$|f(z) - F(z)| \leqslant \varepsilon\,|\omega(z)|^{-1}.$$

Кроме того, из свойств $\omega(z)$ получим

$$|\omega(z)| \geqslant e^{K_\rho \cos\left(\frac{\alpha}{2}\rho\right)|z|^\rho} - \varepsilon \quad \text{для } z \in \Delta_\alpha,\ |z| \geqslant 1.$$

Теперь выберем K_ρ настолько большим, чтобы удовлетворялось неравенство

$$e^{K_\rho \cos\left(\frac{\alpha}{2}\rho\right) r^\rho} - \varepsilon \geqslant e^{r^\rho} \quad \text{для } r \geqslant 1.$$

Отсюда

$$|\omega(z)| \geqslant e^{|z|^\rho} \quad \text{для } z \in \Delta_\alpha,\ |z| \geqslant 1.$$

Окончательно получим

$$|f(z)-F(z)|\leqslant \varepsilon e^{-|z|^{\rho}} \quad \text{для } z\in\Delta_{\alpha},\ |z|\geqslant 1.$$

Условие 2 также выполняется в силу того, что

$$T(r,F)<T(r,G)+T(r,\omega)+\text{const}.$$

Отсюда

$$T(r,F)\leqslant A\left(\int\limits_1^r\int\limits_1^t\frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\,d\tau\,dt+\int\limits_1^r\frac{\ln M(qt)}{t}\,dt+\ln^+ M(q^{l+1}r)+r^{\rho}\right)$$

для $r\geqslant 1$, где A не зависит от r, и следствие 1 доказано.

Замечание 1. Условие 2 теоремы 1 дает возможность обобщить эту теорему на случай нескольких непересекающахся углов вида $\Delta_{\alpha_j}=\left\{z\in\mathbf{C}:\ |\arg z-\theta_j|\leqslant\frac{\alpha_j}{2}\right\}$ $(j=1,2,\cdots,n)$, если в больших непересекающихся углах Δ_{β_j} заданы голоморфные функции $f_j(z)$ $(j=1,2,\cdots$ $\cdots,n)$. Рассмотрев для каждого из этих углов мероморфную функцию $F_j(z)$, удовлетворяющую условию теоремы 1, где вместо ε берется $\frac{\varepsilon}{n}$, за искомую функцию можно взять $F(z)=\sum\limits_{j=1}^{n}F_j(z)$.

Учитывая это замечание и повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве следствия 1 с некоторыми изменениями, получим следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть* $0\leqslant\theta_1<\cdots<\theta_n<2\pi$, $\Delta_{\alpha_j}=\left\{z\in\mathbf{C}:\ |\arg z-\theta_j|\leqslant\frac{\alpha_j}{2}\right\}$, $\Delta_{\beta_j}=\left\{z\in\mathbf{C}:\ |\arg z-\theta_j|<\frac{\beta_j}{2}\right\}$, *причем* $\Delta_{\alpha_j}\subset\Delta_{\beta_j}$, *где* $\bigcap\limits_{j=1}^{n}\Delta_{\beta_j}\setminus\{0\}=\varnothing$, *и* $f_j(z)$ — *голоморфные функции в* Δ_{β_j} $(j=1,2,\cdots,n)$. *Тогда для произвольного набора чисел* $\rho_j\in\left(0,\frac{\pi}{\alpha_j}\right)$ $(j=1,2,\cdots,n)$, $\varepsilon\in(0,1)$ *и* $q\in\left(1,1+\sin\frac{\delta}{2}\right)$, *где* $\delta=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{\beta_j-\alpha_j}{2}\right\}$ *существует мероморфная функция* $F(z)$, *удовлетворяющая условиям*:

1. $|f_j(z)-F(z)|\leqslant\varepsilon e^{-|z|^{\rho_j}}$ *для* $z\in\Delta_{\alpha_j}$, $|z|>1$ $(j=1,2,\cdots,n)$,

2. $$T(r,F)\leqslant A\left(\int\limits_1^r\int\limits_1^t\frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\,d\tau\,dt+\int\limits_1^r\frac{\ln M(qt)}{t}\,dt+\ln^+ M(q^{l+1}r)+r^{\rho}\right)$$

для $r>1$, *где* l — *наименьшее целое, удовлетворяющее неравенству*

$$q^{l-1} > \frac{1}{1-\sin\frac{\delta}{2}}, \; M(r) = \max_{1<j<n} \{M(r, f_j)\}, \; \rho = \max_{1\le j<n} \{\rho_j\},$$

а A не зависит от r.

Замечание 2. Для доказательства теоремы 2 достаточно в доказательстве следствия 1 взять за $\omega(z)$ мероморфную функцию, которая в углах $\Delta_\gamma \supset \Delta_{\beta_j}$ равномерно приближает функции $\varphi_j(z) = \exp\{e^{-i\rho_j\theta_j}\kappa_j z^{\rho_j}\}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$. Такая функция $\omega(z)$ существует, в силу замечания 1. Аналогично, за $G(z)$ берем мероморфную функцию, равномерно приближающую в Δ_{α_j} функцию $\omega(z) f_j(z)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$.

Теперь применим теорему 2 к доказательству одной известной теоремы из теории распределения значений, которую мы сформулируем как

Следствие 2. *Пусть заданы произвольные конечные комплексные числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Тогда для всякого $0<\rho<\infty$ существует мероморфная функция $F(z)$ конечного порядка ρ и нормального типа, имеющая числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$ своими дефектными значениями.*

Доказательство. Для всякого конечного $\rho>0$ существует α для которого выполняются условия:

$$\rho \in \left(0, \frac{\pi}{\alpha}\right), \quad 0 < n\alpha < 2\pi.$$

По теореме 2 существует мероморфная функция $F(z)$, удовлетворяющая условиям:

1. $|F(z) - a_j| \leqslant \varepsilon e^{-|z|^\rho}$ для $z \in \Delta_{\alpha_j}$, $|z| > 1$, $\varepsilon \in (0, 1)$;

2. $T(r, F) \leqslant Ar^\rho$ для $r > 1$,

где $\Delta_{\alpha_j} = \left\{z \in \mathbf{C}:\ |\arg z - \theta_j| \leqslant \frac{\alpha}{2}\right\}$, $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \Delta_{\alpha_j} \setminus \{0\} = \varnothing$, а A не зависит от r. Функция $F(z)$ будет искомой.

Покажем сперва, что значения $a_1, a_2, \cdots, a_n$ являются для нее дефектными.

Действительно

$$m(r, a_j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|F(re^{i\theta}) - a_j|}\, d\theta \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_j-\frac{\alpha}{2}}^{\theta_j+\frac{\alpha}{2}} \ln^+ \frac{1}{|F(re^{i\theta}) - a_j|}\, d\theta.$$

Отсюда и из свойства 1. $F(z)$ для $r > 1$ получим

$$m(r, a_j) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_j-\frac{\alpha}{2}}^{\theta_j+\frac{\alpha}{2}} \ln^+ \frac{e^{r^\rho}}{\varepsilon}\, d\theta = \frac{\alpha}{2\pi}\left(r^\rho + \ln\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Отсюда и из свойства 2. $F(z)$ имеем для $r \geqslant 1$

$$\delta(a_j) = \lim_{r\to\infty} \frac{m(r, a_j)}{T(r, F)} \geqslant \lim_{r\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{2\pi}\left(r^{\rho} + \ln\frac{1}{\varepsilon}\right)}{A r^{\rho}} = \frac{\alpha}{2\pi A} > 0.$$

То, что порядок $F(z)$ — ρ и тип нормален, вытекает из неравенства

$$T(r, F) = T(r, a_j) + O(1) \geqslant m(r, a_j) + O(1) \geqslant \frac{\alpha}{2\pi} r^{\rho} + O(1).$$

Отсюда

$$A' r^{\rho} \leqslant T(r, F) \leqslant A r^{\rho},$$

где A' и A не зависят от r.

Из этого неравенства получим

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log T(r, F)}{\log r} = \rho,$$

$$0 < A' \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r, F)}{r^{\rho}} \leqslant A < +\infty.$$

Итак, следствие 2 доказано.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность моему научному руководителю Н. У. Аракеляну за постановку задачи и оказанную помощь при ее решении.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 15.XII.1970

Լ. Ա. ՏԵՐ-ԻՍՐԱՅԵԼՅԱՆ. Անկյան մեջ հոլոմորֆ ֆունկցիաների հավասարաչափ և շոշափող մոտարկումը մերոմորֆ ֆունկցիաներով և նրանց աճի գնահատականը *(ամփոփում)*։

Հոդվածում ցույց է տրված, որ հավասարաչափ մոտարկումը անկյան մեջ մերոմորֆ ֆունկցիաներով կարելի է կատարել այնպես, որ մոտարկող ֆունկցիաների կարգը և տիպը հավասար են մոտարկվող ֆունկցիաների կարգին և տիպին։ Այնուհետև դիտարկվում է մերոմորֆ ֆունկցիաներով շոշափող մոտարկման խնդիրը, որը բերվում է հավասարաչափ մոտարկման խնդրին։ Հոդվածի վերջում տրվում է արժեքների բաշխման տեսության մի հայտնի թեորեմի նոր ապացույց։

L. A. TER-ISRAJELIAN. *Uniform and tangent approximation of holomorphic in an angle functions by meromorphic functions and estimation of their growth*
(summary)

It is shown in the paper that the uniform approximation in an angle by meromorphic functions may be carried out in such a way, that the order and the type of approximating functions coincide with those for the functions being approximated. The problem of tangent approximation by meromorphic functions is also considered by reduction to the problem of uniform approximation. A new proof of a known theorem from theory of distribution of the values is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* О приближении голоморфных функций целыми функциями, ДАН СССР, 47, № 4, 1945, 243—245.
2. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122
3. *У. Хейман.* Мероморфные функции, Изд. „Мир", 1966.