ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, № 1, 1971 Математика

Р. Н. ТОНОЯН

О ЕДИНИЧНЫХ ТЕСТАХ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ СХЕМ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть K — некоторая контактная схема, реализующая булевую функцию $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Рассматриваются неисправности в схеме, каждая из которых заключается в том, что один контакт схемы становится всегда замкнутым или всегда разомкнутым. При наличии неисправности схема будет реализовать, вообще говоря, другую функцию $f'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ — так называемую функцию неисправности. Пусть далее рассматривается контроль схемы путем проверки проводимости схемы на наборах $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, где $\alpha_i = 0$ или 1. (Таким образом, допускается испытание проводимости схемы на различных наборах и не допускается какое-либо иное вмешательство в работу схемы). При таком способе контроля мы не в состоянии различить неисправности, имеющие одинаковые функции неисправности. Предположим, что

$$\mathfrak{M} = \{f_0(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots$$
$$\cdots, f_s(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$$

суть все различные функции неисправности для контактной схемы K, а $B^n = \{\tilde{\alpha} / \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),\ \alpha_i = 0$ или $1\}$.

Определение. Подмножество наборов $T \subseteq B^n$ называется единичным тестом для контактной схемы K, или для системы функций $\mathfrak{M}$, если для всякой пары функций $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ и $f_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ из $\mathfrak{M}$ существует набор $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in T$ такой, что $f_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \neq f_j(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. Число наборов в T назовем длиной теста.

В работе [1] предложен общий алгоритм для нахождения минимального теста (т. е. теста минимальной длины). Однако, как указывают авторы, ввиду своей универсальности, алгоритм оказывается громоздким даже для простых случаев. Поэтому представляет интерес построение близкого к минимальному единичного теста для отдельных классов схем.

Рассмотрим линейную функцию $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n + 1 \pmod 2$. Зная схемную реализацию и единичный тест для нее, нетрудно построить единичный тест для любой линейной функции, зависящей не более, чем от n переменных. Известно, что $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ можно реализовать при помощи контактной схемы K_n (рис. 1)

В работе [1] для контактной схемы K_n построен единичный тест длины $3n-2$. В настоящей заметке показано, что если t_n — длина минимального единичного теста для схемы K_n, то справедлива следующая

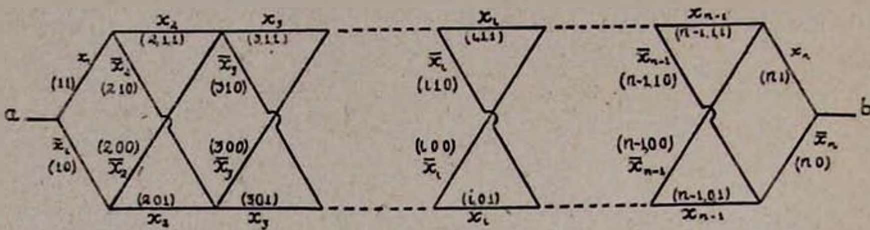

Рис. 1.

Теорема. $2]\log_2 2n[+2 \leqslant t_n \leqslant 3]\log_2 2n[+1$.

где $]a[$ *— наименьшее целое* $\geqslant a$. *При этом построен единичный тест длины* $3]\log_2 2n[+1$.

Занумеруем контакты данной схемы как указано на рис. 1: горизонтальным контактам i-го блока сопоставим символы $(i11)$ и $(i01)$, а наклонным контактам—символы $(i10)$ и $(i00)$. Контактам первого и последнего блоков сопоставим соответственно (11), (10) и $(n1)$, $(n0)$.

Замыкания контактов $(i11)$ и $(i01)$ (соответственно, контактов $(i10)$ и $(i00)$) неразличимы. Обозначим через $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ проводимость схемы при замыкании контакта $(i11)$ или $(i01)$, а через $f_i'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$— проводимость при замыкании $(i10)$ или $(i00)$. Пусть далее $f_{i\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$—проводимость схемы при размыкании контакта $(i\alpha_1\alpha_2)$, где $\alpha_1, \alpha_2 = 0$ или 1. Любой тест T имеет вид $T = T_з \cup T_р$, $T_з \cap T_р = \varnothing$, где $T_р$— тест для обнаружения ошибок размыкания, а $T_з$— тест для ошибок замыкания.

Таким образом, $t_n = t_з^n + t_р^n$, где $t_з^n$ — длина минимального теста для системы функций

$$\{f_0(x_1, \cdots, x_n), f_1(x_1 \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n);\ f_1'(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n'(x_1, \cdots, x_n)\}, \tag{1}$$

а $t_р^n$ — длина минимального теста для системы

$$\{f_0(x_1, \cdots, x_n),\ f_{11}(x_1, \cdots, x_n),\ f_{10}(x_1, \cdots, x_n), \cdots,\ f_{i00}(x_1, \cdots, x_n),\ f_{i01}(x_1, \cdots, x_n),\ f_{i10}(x_1, \cdots, x_n),\ f_{i11}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_{n0}(x_1, \cdots, x_n),\ f_{n1}(x_1, \cdots, x_n)\}.$$

Теорема 1. $]\log_2(2n+1)[\leqslant t_з^n \leqslant]\log_2 2n[+1$.

Нижняя оценка следует из определения теста: если $T = \{\tilde\alpha_1, \tilde\alpha_2, \cdots, \tilde\alpha_s\}$— тест, то существует хотя бы $2n+1$ различных s-мерных наборов $(f_i(\tilde\alpha_1), f_i(\tilde\alpha_2), \cdots, f_i(\tilde\alpha_s))\ \overline{\overline{\in}}\ f_i(T)$, т. е. $2^s \geqslant 2n+1$.

Пусть $2^{k-1} < 2n \leqslant 2^k$. Рассмотрим таблицу L порядка $k \times 2^k$, i-ый столбец которой $\tilde\sigma_{i} = (0, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}, \cdots, \sigma_{ik})$ есть двоичное разложение числа $i-1$:

$$L=\begin{pmatrix} 000\cdots & 0 & \cdots 0\\ 000\cdots & \sigma_{l2} & \cdots 1\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ 001\cdots & \sigma_{lk-1} & \cdots 1\\ 010\cdots & \sigma_{lk} & \cdots 1\end{pmatrix}\overline{\overline{df}}\ (\tilde{\sigma}_1,\ \tilde{\sigma}_2,\cdots,\tilde{\sigma}_{2k}).$$

Определим систему векторов

$$\tilde{\gamma}_1=(1,\ 0,\ 0,\cdots,0)=(1;\ \tilde{\sigma}_1),$$

$$\tilde{\gamma}_2=(0;\ \tilde{\sigma}_2),\ \ \tilde{\gamma}_3=(0;\tilde{\sigma}_3),\cdots,\ \ \tilde{\gamma}_{n-2}=(0;\ \tilde{\sigma}_{n-2}),$$

$$\tilde{\gamma}_{n-1}=\begin{cases}(0;\ \tilde{\sigma}_{n-1}), \text{ если } \tilde{\sigma}_1+\tilde{\sigma}_2+\cdots+\tilde{\sigma}_{n-1}\neq(0,0,\cdots,0)\\ (0;\ \tilde{\sigma}_n) \text{ — в противном случае,}\end{cases}$$

$$\tilde{\gamma}_n=\begin{cases}\tilde{\gamma}_1+\tilde{\gamma}_2+\cdots+\tilde{\gamma}_{n-1}, & \text{если } n \text{ — нечетное число}\\ \tilde{\gamma}_1+\tilde{\gamma}_2+\cdots+\tilde{\gamma}_{n-1}+(1,1,\cdots,1), & \text{если } n \text{ — четное число.}\end{cases}$$

(Сумма векторов берется по mod 2).

Из определения следует, что

1. $\tilde{\gamma}_1+\tilde{\gamma}_2+\cdots+\tilde{\gamma}_n+(n+1,\ n+1,\cdots,n+1)=(0,0,\cdots,0)$.

2. $\forall\ (1\leqslant i\neq j\leqslant n)(\tilde{\gamma}_i\neq\tilde{\gamma}_j)\ \&\ (\tilde{\gamma}_i\neq\tilde{\tilde{\gamma}}_j)$, где $\tilde{\tilde{\gamma}}_j$ — отрицание набора $\tilde{\gamma}_j$.

3. $\forall\ (1\leqslant i\leqslant n)\ (\tilde{\gamma}_i\neq(0,0,\cdots 0))\ \&\ (\tilde{\gamma}_i\neq(1,\ 1,\cdots,1))$.

Пусть T' — матрица порядка $(k+1)\times n$, j-ый столбец которой есть набор $\tilde{\gamma}_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, т. е. $T'=(\tilde{\gamma}_1,\ \tilde{\gamma}_2,\cdots,\tilde{\gamma}_n)$. Предположим, что $(\tilde{\alpha}_1,\ \tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_{k+1})$ — строки матрицы T'.

Лемма 1. *$\{\tilde{\alpha}_1,\ \tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_{k+1}\}=T_з$ есть единичный тест для ошибок замыкания.*

Достаточно показать, что все векторы типа (1) для $\tilde{\alpha}_1,\ \tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_{k+1}$ различны. Из определения $\tilde{\gamma}_n$ следует, что $f_0\,(T_з)=(f_0(\tilde{\alpha}_1),\ f_0\,(\tilde{\alpha}_2),\cdots,$ $f_0\,(\tilde{\alpha}_{k+1}))=(0,\ 0,\cdots,0)$.

Далее, пусть $f_0\,(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\beta_n)=0$. Легко проверить, что тогда $f_l\,(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_n)=\bar{\beta}_l$ и $f_l'\,(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_n)=\beta_l$. Следовательно, $f_l\,(T_з)=$ $=\tilde{\tilde{\gamma}}_l$ и $f_l'(T_з)=\tilde{\gamma}_l$. Лемма 1 следует из вышеуказанных свойств $\tilde{\gamma}_1,\ \tilde{\gamma}_2,$ $\cdots,\ \tilde{\gamma}_n$. Построенный тест имеет длину $k+1=\,]\log_2 2n[+1$ и теорема 1 доказана.

Теорема 2. $]\log_2 2n[+1\leqslant t_p^n\leqslant 2]\log_2 2n[$.

Существуют $4n-1$ функций неисправности и поэтому $t_p^n \geqslant$ $\geqslant]\log_2 2n[+1$. Для получения верхней оценки рассмотрим использованную в предыдущей теореме таблицу $L=(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \cdots, \tilde{\sigma}_{2^k})$ и определим систему наборов:

$$\tilde{\delta}_1=(\tilde{\sigma}_1, \bar{\sigma}_1),\ \tilde{\delta}_2=(\tilde{\sigma}_2, \bar{\sigma}_2), \cdots, \tilde{\delta}_{n-2}=(\tilde{\sigma}_{n-2}, \bar{\sigma}_{n-2}),$$

$$\tilde{\delta}_{n-1}=\begin{cases}(\tilde{\sigma}_{n-1}, \bar{\sigma}_{n-1}), & \text{если } \tilde{\sigma}_1+\tilde{\sigma}_2+\cdots+\tilde{\sigma}_{n-1}\neq(0, 0, \cdots, 0)\\ (\tilde{\sigma}_n, \bar{\sigma}_n) & \text{— в противном случае,}\end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_n=\begin{cases}\tilde{\delta}_1+\tilde{\delta}_2+\cdots+\tilde{\delta}_{n-1}, & \text{если } n \text{ — четное число}\\ \tilde{\delta}_1+\tilde{\delta}_2+\cdots+\tilde{\delta}_{n-1}+(1, 1, \cdots, 1) & \text{— в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть $\tilde{\beta}=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2k})$ — произвольный набор из 0 и 1 длины $2k$, а $\tilde{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k)$ — набор длины k. Через $[\tilde{\varepsilon}; \tilde{\beta}]$ обозначим набор $(\varepsilon_1\beta_1, \varepsilon_2\beta_2, \cdots, \varepsilon_k\beta_k, \bar{\varepsilon}_1\beta_{k+1}, \cdots, \bar{\varepsilon}_k\beta_{2k})$. Пусть далее $\tilde{\beta}^\alpha=(\beta_1^\alpha, \beta_2^\alpha, \cdots, \beta_{2k}^\alpha)$, где $\alpha=0, 1$ $(0^0=1'=1;\ 0'=1^0=0)$.

Лемма 2. *Для всякой пары наборов* $\tilde{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k)$, $\tilde{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)$ *и для всех номеров* i *и* j, *при* $2\leqslant i, j\leqslant n-1$ *имеет место утверждение* $(\alpha, \lambda=0, 1)$

$$([\tilde{\varepsilon}; \tilde{\delta}_i^\alpha]=[\tilde{\omega}; \tilde{\delta}_j^\lambda])\rightarrow(i=j)\ \&\ (\alpha=\lambda).$$

В самом деле, если $[\tilde{\varepsilon}; \tilde{\delta}_i^\alpha]=[\tilde{\omega}; \tilde{\delta}_j^\lambda]$, то для всех $1\leqslant l\leqslant k$ и $\beta=0, 1$ имеет место равенство $\varepsilon_e^\beta\delta_{ie}^\alpha=\omega_e^\beta\delta_{je}^\lambda$. Отсюда следует, что $\delta_{ie}^\alpha=\omega_e^{\varepsilon_e}\delta_{je}^\lambda$ и $\delta_{je}^\lambda=\varepsilon_e^{\omega_e}\delta_{ie}^\alpha$. Так что $\tilde{\delta}_i^\alpha=\tilde{\delta}_j^\lambda$. Но из определения наборов $\tilde{\delta}_l$ следует, что это возможно лишь при $(i=j)$ и $(\alpha=\lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для всякого набора* $\tilde{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k)$ *утверждение*

$$([\tilde{\varepsilon}; \tilde{\delta}_i^\alpha]\neq\tilde{\delta}_1^\beta)\ \&\ ([\tilde{\varepsilon}; \tilde{\delta}_i^\alpha]\neq\tilde{\delta}_n^\beta)$$

выполняется при всех $1<i<n$ *и* $\alpha, \beta=0, 1$.

Так как каждый из наборов $\tilde{\delta}_1^\beta$ и $\tilde{\delta}_n^\beta$ имеет вид $(\nu_1, \cdots, \nu_k; \bar{\nu}_1, \cdots, \bar{\nu}_k)$, то достаточно показать, что $\exists l\ (1\leqslant l\leqslant k)\ (\varepsilon_e\delta_{ie}^\alpha\neq\bar{\varepsilon}_e\bar{\delta}_{ie}^\alpha)$. Предположим обратное, тогда $\forall l\ (1\leqslant l\leqslant k)\ (\varepsilon_e\delta_{ie}^\alpha=\bar{\varepsilon}_e\bar{\delta}_{ie}^\alpha)$. Отсюда следует, что $\tilde{\delta}_i^{\varepsilon}=(1, 1, \cdots, 1)$, но при $1<i<n$ это невозможно. Лемма доказана.

Пусть T'' — матрица порядка $2k\times n$, j-ый столбец которой есть набор $\tilde{\delta}_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, т. е. $T''\overline{\overline{df}}(\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \cdots, \tilde{\delta}_n)$. Предположим, что $\{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_{2k}\}$ — строки матрицы T''.

Лемма 4. $\{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_{2k}\}=T_p$ *есть единичный тест для ошибок размыкания.*

Покажем, что наборы системы (2) различны. Из определения $\tilde{\zeta}_n$ следует, что $f_0(T_p)=(1, 1, \cdots, 1)$. Пусть $\tilde{\beta}_e=(\beta_{e1}, \beta_{e2}, \cdots, \beta_{en})$. Определим набор $\tilde{\varepsilon}_e=(\varepsilon_{e2}, \varepsilon_{e3}, \cdots, \varepsilon_{en})$ следующим образом:

$$\varepsilon_{e2}=\beta_{e1},\ \varepsilon_{e3}=\beta_{e1}+\beta_{e2}, \cdots, \varepsilon_{en}=\beta_{e1}+\beta_{e2}+\cdots+\beta_{e,\,n-1}.$$

Тогда $\tilde{\varepsilon}_1=\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{k+1}, \tilde{\varepsilon}_2=\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{k+2}, \cdots, \tilde{\varepsilon}_k=\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{2k}$.

Смысл введенного набора следующий: так как $f_0(\tilde{\beta}_e)=1$, то для набора $\tilde{\beta}_e$ существует путь, соединяющий вершины a и b контактной схемы K_n, состоящей из замкнутых контактов. $\tilde{\varepsilon}_e$ выбран так, что этот путь проходит через контакт $(i, \varepsilon_{ei}, \beta_{ei})$, $1<i\leqslant n$. Следовательно, при $1<i<n$

$$f_{i\alpha_1\alpha_2}(\beta_{e1}, \beta_{e2}, \cdots, \beta_{en})=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha_1=\varepsilon_{ei},\ \alpha_2=\beta_{ei}\\ 1 & \text{— в противном случае,}\end{cases}$$

т. е. $\bar{f}_{i\alpha_1\alpha_2}(\tilde{\beta}_e)=\varepsilon_{ei}^{\alpha_1}\beta_{ei}^{\alpha_2}$. Пусть $\lambda_i=(\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \cdots, \varepsilon_{ki})$, тогда ясно, что $\bar{f}_{i\alpha_1\alpha_2}(T_p)=[\tilde{\lambda}_i^{\alpha_1}; \tilde{\delta}_i^{\alpha_2}]$. Из леммы 2 следует, что все $f_{i\alpha_1\alpha_2}(T_p)$ различны при $1<i<n$, $\alpha_1, \alpha_2=0, 1$. Далее легко показать, что $\bar{f}_{1\alpha}(T_p)=\tilde{\delta}_1^{\alpha}$, $\bar{f}_{n\sigma}(T_p)=\tilde{\delta}_n^{\sigma}$. Отсюда и из леммы 3 вытекает, что наборы системы (2) различны. Лемма доказана.

Утверждение теоремы 2 следует из доказанной леммы.

Объединяя результаты теорем 1 и 2, получим утверждение сформулированной основной теоремы: если t_n—длина минимального единичного теста для контактной схемы K_n, то

$$2]\log_2 2n[+2\leqslant t_n\leqslant 3]\log_2 2n[+1.$$

Замечание. Если $n=4s-1$; $s=1, 2, \cdots$, то строки матрицы $(\tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \cdots, \tilde{\sigma}_{n+1})$ образуют минимальный тест замыкания для функции $x_1+x_2+\cdots+x_n+n+1 \pmod 2$, причем сложность данного теста есть $\log_2 2n[$.

Ереванский государственный
университет

Поступило 17.XI.1970

Ռ. Ն. ՏՈՆՈՅԱՆ. Գծային ֆունկցիաները իրականացնող կոնտակտ սխեմաների միավոր տեստերի մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ եթե t_n-ը n փոփոխականից կախված գծային ֆունկցիան իրականացնող սխեմայի համար միավոր տեստի երկարությունն է, ապա

$$3]\log_2 2n[+2\leqslant t_n\leqslant 3]\log 2n[+1,$$

որտեղ $]a[$-ն ամենափոքր ամբողջ թիվն է, որը $\geqslant a$: Ընդ որում կառուցված է $3]\log_2 2n[+1$ երկարությամբ միավոր տեստ

R. N. TONOJAN. ***On singular tests for contact schemes, realising linear functions*** **(summary)**

It is proved, that, if t_n is the length of minimal singular test for the schema, realising a linear Boolean function of n variables, then

$$2]\log_2 2n[+2 \leqslant t_n \leqslant 3]\log_2 2n[+1,$$

where $]a[$ is the smallest integer $\geqslant a$. The singular test of the length $3]\log_2 2n[+1$ is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. А. Чегис* и *С. В. Яблонский*. Логические способы контроля электрических схем, Труды МИАН СССР им. Стеклова, том 51.