ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 1, 1971 Математика

И. В. КОВАЛИШИНА

АДДИТИВНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РЕАКТИВНОЙ МАТРИЦЫ—ФУНКЦИИ

Обсуждаемые здесь вопросы тесным образом связаны с одним из основных фактов, установленных в статье [1] В. П. Потапова (теорема 4). Там рассматривается рациональная матрица-функция $w(\lambda)$, разложение которой на элементарные дроби имеет следующий вид:

$$w(\lambda) = I + \sum_{k=1}^{m} \frac{2\sigma_k a_k}{\lambda - \lambda_k} \quad (\sigma_k = \operatorname{Re} \lambda_k).$$

Для того чтобы матрица-функция $w(\lambda)$ была J-несжимающей в правой полуплоскости и J-унитарной на мнимой оси, то есть

$$(1)\quad w^*(\lambda)\, Jw(\lambda) - J \geqslant 0 \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0),$$

$$(2)\quad w^*(i\tau)\, Jw(i\tau) - J = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a_k удовлетворяли неравенству

$$\text{(A)}\qquad \left\| \frac{2\sigma_k 2\sigma_j}{\bar{\lambda}_k + \lambda_j} \overset{*}{a}_k J a_j \right\| \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, m)$$

и равенствам

$$\text{(B)}\qquad 2\sigma_j J a_j = \sum_{k=1}^{m} \frac{2\sigma_k 2\sigma_j}{\bar{\lambda}_k + \lambda_j} \overset{*}{a}_k J a_j \quad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

Здесь J — произвольная эрмитова матрица такая, что $J^2 = I$.

Для краткости рациональную матрицу-функцию $w(\lambda)$, удовлетворяющую условиям (1), (2), назовем *элементарным множителем.*

Тем самым установлены необходимые и достаточные условия элементарности множителя для того случая, когда все полюсы $w(\lambda)$ являются *простыми.*

Естественно возникает вопрос об описании структуры элементарного множителя в общем случае без каких-либо ограничений, накладываемых на кратность полюсов.

Первым этапом решения этой задачи, по-видимому, должно быть исследование элементарного множителя, обладающего *одним* полюсом произвольной кратности

$$w_0(\lambda) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^k A_{n-k}}{(\lambda - \lambda_0)^k} = \prod_{j=1}^{n} \left(I + \frac{2\sigma_0 P_j}{\lambda - \lambda_0} \right),\quad P_j^2 = P_j,\ 2\sigma_0 P_j J \geqslant 0.$$

Сопоставляя его с элементарным множителем

$$w(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}\left(I+\frac{2\sigma_j P_j}{\lambda-\lambda_j}\right)=I+\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sigma_k a_k}{\lambda-\lambda_k}$$

с различными полюсами и теми же проекторами, мы видим, что $w(\lambda)\to w_0(\lambda)$ при $\lambda_j\to\lambda_0$. Так как связь между коэффициентами мультипликативных и аддитивных представлений $w(\lambda)$ и $w_0(\lambda)$ очевидна

$$a_k=\left(I+\frac{2\sigma_1 P_1}{\lambda_k-\lambda_1}\right)\left(I+\frac{2\sigma_2 P_2}{\lambda_k-\lambda_2}\right)\cdots\left(1+\frac{2\sigma_{k-1}P_{k-1}}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}\right)P_k\left(I+\frac{2\sigma_{k+1}P_{k+1}}{\lambda_k-\lambda_{k+1}}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(I+\frac{2\sigma_n P_n}{\lambda_k-\lambda_n}\right)=\left\{I+\sum_{\alpha=1}^{k-1}\frac{2\sigma_\alpha P_\alpha}{\lambda_k-\lambda_\alpha}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{2\sigma_1\cdots 2\sigma_{k-1}P_1\cdots P_{k-1}}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})}\right\}P_k\left\{I+\sum_{\beta=k+1}^{n}\frac{2\sigma_\beta P_\beta}{\lambda_k-\lambda_\beta}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{2\sigma_{k+1}\cdots 2\sigma_n\cdot P_{k+1}\cdots P_n}{(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_n)}\right\}$$

и

$$A_{n-k}=\sum_{\substack{\alpha_1=1,\,2,\dots,\,n-(k-1),\\ \alpha_2=\alpha_1+1,\,\alpha_1+2,\dots,\,n-(k-2),\\ \cdots\cdots\cdots\\ \alpha_k=\alpha_{k-1}+1,\,\alpha_{k-1}+2,\dots,\,n}}P_{\alpha_1}\cdot P_{\alpha_2}\cdots P_{\alpha_k},$$

то можно рассчитывать на получение необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять коэффициенты A_γ, путем предельного перехода в условиях (A) и (B) для $w(\lambda)$.

Заметим однако, что, несмотря на простоту ситуации, решение задачи связано с довольно сложными выкладками.

После этого уже нетрудно установить аналог условий (A) и (B) для общего случая произвольного элементарного множителя с любым набором кратных полюсов.

Наконец, соответствующие условия могут быть записаны и для произвольного реактивного элементарного множителя, то есть множителя, удовлетворяющего дополнительно условиям вещественности и симплектичности.

Полученные здесь сведения могут оказаться полезными для решения проблемы, поставленной еще В. Кауэром [2] о построении реактивной цепи по заданной передаточной функции с минимальным количеством сосредоточенных элементов и об описании всех таких цепей.

§ 1. Вспомогательные предложения

1°. Нам понадобятся несколько очевидных следствий из интерполяционной формулы Лагранжа

$$P(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi'(\lambda_j)}\cdot\frac{F(\lambda_j)}{\lambda-\lambda_j}.$$

Здесь $F(\lambda)$—заданная функция, λ_j—узлы интерполяции, $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\times$ $\times(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, а $P(\lambda)$--полином степени не выше „$n-1$", значения которого в узлах интерполяции совпадают со значениями функции $F(\lambda)$.

1) При $F(\lambda)\equiv 1$ получим

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi'(\lambda_j)}\cdot\frac{1}{\lambda-\lambda_j}=1. \tag{1}$$

2) Если $F(\lambda)$ — полином степени меньшей „$n-1$", то

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{F(\lambda_j)}{\varphi'(\lambda_j)}=0. \tag{2}$$

3) Если $F(\lambda)$—полином степени „$n-1$":

$$F(\lambda)=a_0\lambda^{n-1}+a_1\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1},$$

то

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{F(\lambda_j)}{\varphi'(\lambda_j)}=\frac{a_0}{1}. \tag{3}$$

4) Вообще, если $F(\lambda)$—произвольная функция, то

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{F(\lambda_j)}{\varphi'(\lambda_j)}=D_{n-1}[F(\lambda)], \tag{4}$$

где $D_{n-1}[F(\lambda)])$ — разностное отношение „$n-1$" порядка:

$$D_1[F(\lambda)]=\frac{F(\lambda_2)-F(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1},\quad D_2[F(\lambda)]=\frac{\dfrac{F(\lambda_3)-F(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}-\dfrac{F(\lambda_3)-F(\lambda_1)}{\lambda_3-\lambda_1}}{\lambda_2-\lambda_1},\ldots.$$

Из последней формулы в частности вытекает, что

$$\lim_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\to\lambda_0}\sum_{j=1}^{m}\frac{F(\lambda_j)}{\varphi'(\lambda_j)}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}F(\lambda_0).$$

2°. Основную роль в дальнейшем будет играть обобщение последней формулы на случай функции двух переменных.

Пусть функция двух переменных $F(\mu,\lambda)$ аналитична в некоторой точке $M_0(\mu_0,\lambda_0)$ и точки

$$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p;\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_q$$

выбраны в окрестностях точек μ_0, λ_0 соответственно. Положим

$$\varphi_p(\mu)=(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)\cdots(\mu-\mu_p);\ \varphi_q(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots$$
$$\cdots(\lambda-\lambda_q),$$

и покажем, что при

$$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p \to \mu_0,$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q \to \lambda_0$$

функционал

$$L(F) = \sum_{s=1}^{p} \sum_{t=1}^{q} \frac{F(\mu_s, \lambda_t)}{\varphi_p'(\mu_s)\, \varphi_q'(\lambda_t)} \to \frac{1}{(p-1)!\, q-1)!} \frac{\partial^{p+q-2}}{\partial \mu^{p-1} \partial \lambda^{q-1}} F(\mu_0, \lambda_0).$$

Для вычисления функционала $L(F)$ разложим функцию $F(\mu, \lambda)$ в окрестности точки $M_0(\mu_0, \lambda_0)$ в степенной ряд

$$F(\mu, \lambda) = F(\mu_0, \lambda_0) + \frac{1}{1!}\left\{\frac{\partial}{\partial \mu} F(\mu_0, \lambda_0)(\mu - \mu_0) + \frac{\partial}{\partial \lambda} F(\mu_0, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} F(\mu_0, \lambda_0)(\mu - \mu_0)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \lambda} F(\mu_0, \lambda_0)(\mu - \mu_0)(\lambda - \lambda_0) +\right.$$
$$\left.+ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} F(\mu_0, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^2\right\} + \cdots + \frac{1}{k!}\left\{\frac{\partial^k}{\partial \mu^k} F(\mu_0, \lambda_0)(\mu - \mu_0)^k +\right.$$
$$\left.+ C_k^1 \frac{\partial^k}{\partial \mu^{k-1} \partial \lambda} F(\mu_0, \lambda_0)(\mu - \mu_0)^{k-1}(\lambda - \lambda_0) + \cdots + C_k^k \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} F(\mu_0, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^k\right\} + \cdots.$$

Функционал L на любом члене ряда имеет вид

$$L_{M,N} = \frac{1}{(M+N)!} C_{M+N}^{N} \frac{\partial^{M+N}}{\partial \mu^M \partial \lambda^N} F(\mu_0, \lambda_0) \sum_{s=1}^{p} \sum_{t=1}^{q} \frac{(\mu_s - \mu_0)^M (\lambda_t - \lambda_0)^N}{\varphi_p'(\mu_s)\, \varphi_q'(\lambda_t)} =$$
$$= \frac{1}{(M+N)!} C_{M+N}^{N} \frac{\partial^{M+N}}{\partial \mu^M \partial \lambda^N} F(\mu_0, \lambda_0) \sum_{s=1}^{p} \frac{(\mu_s - \mu_0)^M}{\varphi_p'(\mu_s)} \cdot \sum_{t=1}^{q} \frac{(\lambda_t - \lambda_0)^N}{\varphi_q'(\lambda_t)}.$$

Возможными являются следующие три случая:

1) $M < p$ или $N < q$; тогда в силу (3) $L_{M,N} = 0$;

2) $M = p-1$, $N = q-1$; в силу (4)

$$L_{M,N} = L_{p-1,\, q-1} = \frac{1}{(M+N)!} C_{M+N}^{N} \frac{\partial^{M+N}}{\partial \mu^M \partial \lambda^N} F(\mu_0, \lambda_0) =$$
$$= \frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!} \frac{\partial^{p+q-2}}{\partial \mu^{p-1} \partial \lambda^{q-1}} F(\mu_0, \lambda_0);$$

3) $M > p$, $N > q$.

В этом случае можно дать оценку для $L_{M,N}$ через $h = \max\limits_{s} \{|\mu_s - \mu_0|\}$, $k = \max\limits_{t} \{|\lambda_t - \lambda_0|\}$, а именно

$$\left|\frac{\partial^{M+N}}{\partial \mu^M \partial \lambda^N} F(\mu_0, \lambda_0) \frac{C_{M+N}^{N}}{(M+N)!} \sum_{s=1}^{p} \sum_{t=1}^{q} \frac{(\mu_s - \mu_0)^M (\lambda_t - \lambda_0)^N}{\varphi_p'(\mu_s)\, \varphi_q'(\lambda_t)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{M!\, N!} \left|\frac{\partial^{M+N}}{\partial \mu^M \partial \lambda^N} F(\mu_0, \lambda_0)\right| C_M^{p-1} h^{M-p+1} C_N^{q-1} k^{N-q+1}$$

Применяя функционал L к $F(\mu, \lambda)$, получим

$$L(F)=\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}\frac{F(\mu_s,\lambda_t)}{\varphi'_p(\mu_s)\,\varphi'_q(\lambda_t)}=\frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\,\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)+$$

$$+\frac{1}{(p+q-1)!}\left\{\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\mu^{p+q-1}}F(\mu_0;\lambda_0)\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}\frac{(\mu_s-\mu_0)^{p+q-1}}{\varphi'_p(\mu_s)\,\varphi'_q(\lambda_t)}+\cdots+\right.$$

$$+C_{p+q-1}^{q-1}\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\mu^{p}\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}\frac{(\mu_s-\mu_0)^{p}}{\varphi'_p(\mu_s)}\cdot\frac{(\lambda_t-\lambda_0)^{q-1}}{\varphi'_q(\lambda_t)}+C_{p+q-1}^{q}\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q}}F(\mu_0,\lambda_0)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}\frac{(\mu_s-\mu_0)^{p-1}}{\varphi'_p(\mu_s)}\cdot\frac{(\lambda_t-\lambda_0)^{q}}{\varphi'_q(\lambda_t)}+\cdots+\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\lambda^{p+q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}\times$$

$$\times\frac{(\lambda_t-\lambda_0)^{p+q-1}}{\varphi'_p(\mu_s)\,\varphi'_q(\lambda_t)}+\cdots=\frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\,\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)+R.$$

Оценим остаток ряда

$$|R|\leqslant\frac{1}{(p+q-1)!}\left\{\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q-1}}\right|C_{p+q-1}^{q-1}\,C_p^{p-1}h+\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q}}\right|C_{p+q-1}^{q}\,C_q^{q-1}k\right\}+$$

$$+\frac{1}{(p+q)!}\left\{\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p+1}\,\partial\lambda^{q-1}}\right|C_{p+q}^{q-1}\,C_{p+1}^{p-1}h^2+\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q}}\right|C_{p+q}^{q}\,C_p^{p-1}hC_q^{q-1}k+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q+1}}\right|C_{p+q}^{q+1}\,C_{p-1}^{p-1}\,C_{q+1}^{q-1}k^2\right\}+\cdots=\frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\left\{\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q-1}}\right|h+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q}}\right|k\right\}+\frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\cdot\frac{1}{2!}\left\{\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p+1}\,\partial\lambda^{q-1}}\right|h^2+2\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q}}\right|kh+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q+1}}\right|k^2\right\}+\cdots.$$

Сопоставим мажорирующий ряд с разложением в ряд производной

$$\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q-1}}F(\mu,\lambda)-\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)=\frac{1}{1!}\left\{\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)\,(\mu-\mu_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q}}F(\mu_0,\lambda_0)\,(\lambda-\lambda_0)\right\}+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^{p+q}}{\partial\mu^{p+1}\,\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)(\mu-\mu_0)^2+\right.$$

$$\left.+2\,\frac{\partial^{p+q}}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q}}F(\mu_0,\lambda_0)(\mu-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)+\frac{\partial^{p+q}}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q+1}}F(\mu_0,\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^2\right\}+\cdots$$

и, так как производный ряд будет абсолютно сходящимся в окрестности точки $M_0(\mu_0,\lambda_0)$, то ряд

$$\frac{1}{1!}\left\{\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q-1}}\right||\mu-\mu_0|+\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q}}\right||\lambda-\lambda_0|\right\}+\cdots$$

становится как угодно малым при $\mu \to \mu_0$, $\lambda \to \lambda_0$. Для остатка ряда $|R|$ это означает, что $|R| < \varepsilon$ при $|\mu_s - \mu_0| < \delta$, $|\lambda_t - \lambda_0| < \delta$ $(s = 1, 2, \cdots, p;$ $t = 1, 2, \cdots, q)$.

Таким образом, показано, что

$$\lim_{\substack{\mu_s \to \mu_0 \\ \lambda_t \to \lambda_0}} \sum_{s=1}^{p} \sum_{t=1}^{q} \frac{F(\mu_s, \lambda_t)}{\varphi_p'(\mu_s)\,\varphi_q'(\lambda_t)} = \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \frac{\partial^{p+q-2}}{\partial \mu^{p-1}\,\partial \lambda^{q-1}} F(\mu_0, \lambda_0). \quad (5)$$

3°. К вспомогательному материалу относится и следующее матричное соотношение:

пусть даны n точек $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Рассмотрим функции

$$\varphi_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

$$\varphi_{n-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = \frac{\varphi_n(\lambda)}{\lambda - \lambda_1},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\varphi_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n) = \frac{\varphi_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_{n-2}},$$

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda - \lambda_n = \frac{\varphi_2(\lambda)}{\lambda - \lambda_{n-1}}.$$

Их производные в точках $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ будут

$$\varphi_n'(\lambda_j) = (\lambda_j - \lambda_1)\cdots(\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1})\cdots(\lambda_j - \lambda_n),$$

$$\varphi_{n-1}'(\lambda_j) = (\lambda_j - \lambda_2)\cdots(\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1})\cdots(\lambda_j - \lambda_n)$$

и т. д.

Рассмотрим матрицу

$$T = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\varphi_n'(\lambda_1)} & \frac{1}{\varphi_n'(\lambda_2)} & \cdots & \frac{1}{\varphi_n'(\lambda_n)} \\ 0 & \frac{1}{\varphi_{n-1}'(\lambda_2)} & \cdots & \frac{1}{\varphi_{n-1}'(\lambda_n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\varphi_1'(\lambda_n)} \end{Vmatrix} \quad (6)$$

и покажем, что обратной матрицей будет

$$T_1 = \begin{Vmatrix} \varphi_{n-1}(\lambda_1) & \varphi_{n-2}(\lambda_1) \cdots \varphi_1(\lambda_1) & 1 \\ 0 & \varphi_{n-2}(\lambda_2) \cdots \varphi_1(\lambda_2) & 1 \\ 0 & 0 \quad \cdots \varphi_1(\lambda_3) & 1 \\ \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В самом деле, пусть $T \cdot T_1 = (b_{kj})$.

Тогда при $j = k$ $b_{kk} = \varphi_{n-k}(\lambda_k) \cdot \dfrac{1}{\varphi_{n-k+1}'(\lambda_k)} = 1;$

при $j < k$, очевидно, $b_{kj} = 0$;
и, наконец, при $j \geqslant k+1$ в силу [2]

$$b_{kj} = \sum_{s=k}^{n} \varphi_{n-j}(\lambda_s) \cdot \frac{1}{\varphi_{n-k+1}(\lambda_s)} = 0,$$

так как подсчет степеней дает

$$(n-k+1)-(n-j) = j+1-k \geqslant 2.$$

§ 2. Необходимые и достаточные условия элементарности

Теорема. *Для того чтобы матрица-функция* $w_0(\lambda) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^k A_{n-k}}{(\lambda-\lambda_0)^k}$ *была элементарным множителем необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты* A_γ *удовлетворяли неравенству*

$$\text{(A)} \qquad \left\|(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{j} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!} A^*_{k-\alpha} J A_{j-\beta}\right\| \geqslant 0$$

$$\begin{pmatrix} k = 1, 2, \cdots, n \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

и равенствам

$$\text{(B)} \qquad JA_{p-1} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!} A^*_{n-\alpha} J A_{p-\beta} \quad (p=1, 2, \cdots, n).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $w_0(\lambda) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^k A_{n-k}}{(\lambda-\lambda_0)^k} = \prod_{j=1}^{n}\left(I + \frac{2\sigma_0 P_j}{\lambda-\lambda_0}\right)$ является элементарным множителем, то есть удовлетворяет условиям

$$w_0^*(\lambda)\, J w_0(\lambda) - J \geqslant 0 \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0),$$

$$w_0^*(i\tau)\, J w_0(i\tau) - J = 0.$$

Из теоремы 4 [1] вытекает следующее выражение для J-формы элементарного множителя

$$w(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\left(I + \frac{2\sigma_j P_j}{\lambda-\lambda_j}\right) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sigma_k a_k}{\lambda-\lambda_k},$$

$$w^*(\lambda)\, J w(\lambda) - J = (\lambda+\bar{\lambda}) \left[\frac{I}{\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_n}, \cdots, \frac{I}{\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_j}\right] \left(\frac{2\sigma_k 2\sigma_j}{\bar{\lambda}_k+\lambda_n}\, a_k^* J a_j\right) \begin{bmatrix} \frac{I}{\lambda-\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{I}{\lambda-\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Сейчас целесообразно переписать ее так

$$w^*(\lambda)\,Jw(\lambda)-J=(\lambda+\bar\lambda)\left[\frac{I}{\bar\lambda-\bar\lambda_1},\cdots,\frac{I}{\bar\lambda-\bar\lambda_n}\right]T^*\cdot T^{*-1}\times$$

$$\times\left(\frac{2\sigma_k 2\sigma_j}{\bar\lambda_k+\lambda_j}\,\overset{*}{a}_k\,Ja_j\right)T^{-1}\cdot T\begin{vmatrix}\dfrac{I}{\lambda-\lambda_1}\\ \cdots\\ \dfrac{I}{\lambda-\lambda_n}\end{vmatrix},$$

где матрица T имеет вид (6).

Дело в том, что при $\lambda_j\to\lambda_0$

$$T\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{I}{\lambda-\lambda_1}\\ \dfrac{I}{\lambda-\lambda_2}\\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{I}{\lambda-\lambda_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{\varphi_n'(\lambda_j)}\cdot\dfrac{I}{\lambda-\lambda_j}\\ \sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{1}{\varphi_{n-1}'(\lambda_j)}\cdot\dfrac{I}{\lambda-\lambda_j}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{1}{\varphi_1'(\lambda_n)}\cdot\dfrac{I}{\lambda-\lambda_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{I}{\varphi_n(\lambda)}\\ \dfrac{I}{\varphi_{n-1}(\lambda)}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{I}{\varphi_1(\lambda)}\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}\dfrac{I}{(\lambda-\lambda_0)^n}\\ \dfrac{I}{(\lambda-\lambda_0)^{n-1}}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{I}{\lambda-\lambda_0}\end{vmatrix}$$

и мы получим нужное обрамление матрицы J-формы для $w_0(\lambda)$. Задача сводится тогда к отысканию предела матрицы

$$T^{*-1}\left(\frac{2\sigma_k 2\sigma_j}{\bar\lambda_k+\lambda_j}\,\overset{*}{a}_k\,Ja_j\right)T^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}\overset{*}{\varphi}_{n-1}(\lambda_1)\,I & 0 & 0\cdots & 0\\ \overset{*}{\varphi}_{n-2}(\lambda_1)\,I & \overset{*}{\varphi}_{n-2}(\lambda_2)\,I & 0\cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \overset{*}{\varphi}_1(\lambda_1)\,I & \overset{*}{\varphi}_1(\lambda_2)\,I & \overset{*}{\varphi}_1(\lambda_3)\,I\cdots & 0\\ I & I & I\cdots & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{2\sigma_1 2\sigma_1}{\bar\lambda_1+\lambda_1}\,\overset{*}{a}_1\,Ja_1\cdots & \dfrac{2\sigma_1 2\sigma_n}{\bar\lambda_1+\lambda_n}\,\overset{*}{a}_1\,Ja_n\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{2\sigma_n 2\sigma_1}{\bar\lambda_n+\lambda_1}\,\overset{*}{a}_n\,Ja_1\cdots & \dfrac{2\sigma_n 2\sigma_n}{\bar\lambda_n+\lambda_n}\,\overset{*}{a}_n\,Ja_n\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\varphi_{n-1}(\lambda_1)\,I\cdots & \varphi_1(\lambda_1)\,I & I\\ 0\ \ \cdots & \varphi_1(\lambda_2)\,I & I\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ 0\ \ \cdots & 0 & I\end{pmatrix}=(b_{kj}).$$

Рассмотрим произвольный элемент этой матрицы

$$b_{kj}=[\overset{*}{\varphi}_{n-k}(\lambda_1)\,I,\cdots,\overset{*}{\varphi}_{n-k}(\lambda_k)\,I,0,\cdots,0]\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{4\sigma_1\sigma_1}{\bar\lambda_1+\lambda_1}\,\overset{*}{a}_1\,Ja_1\cdots & \dfrac{4\sigma_1\sigma_n}{\bar\lambda_1+\lambda_n}\,\overset{*}{a}_1\,Ja_n\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{4\sigma_n\sigma_1}{\bar\lambda_n+\lambda_1}\,\overset{*}{a}_1\,Ja_1\cdots & \dfrac{4\sigma_1\sigma_n}{\bar\lambda_n+\lambda_n}\,\overset{*}{a}_n\,Ja_n\end{pmatrix}\begin{vmatrix}\varphi_{n-j}(\lambda_1)\,I\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \varphi_{n-j}(\lambda_j)\,I\\ 0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ 0\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{\beta=1}^{j}\sum_{\alpha=1}^{k}2\sigma_\alpha 2\sigma_\beta\,\overset{*}{a}_\alpha\,Ja_\beta\,\overset{*}{\varphi}_{n-k}(\lambda_\alpha)\,\frac{1}{\bar\lambda_\alpha+\lambda_\beta}\,\varphi_{n-j}(\lambda_\beta).$$

Если в этой сумме заменить a_α^* и a_β их выражениями

$$a_\gamma=\left(I+\frac{2\sigma_1P_1}{\lambda_\gamma-\lambda_1}\right)\cdots\left(I+\frac{2\sigma_{\gamma-1}P_{\gamma-1}}{\lambda_\gamma-\lambda_{\gamma-1}}\right)P_\gamma\left(I+\frac{2\sigma_{\gamma+1}P_{\gamma+1}}{\lambda_\gamma-\lambda_{\gamma+1}}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(I+\frac{2\sigma_nP_n}{\lambda_\gamma-\lambda_n}\right)=\left(I+\sum_{l=1}^{\gamma-1}\frac{2\sigma_lP_l}{\lambda_\gamma-\lambda_l}+\cdots+\frac{2\sigma_1\cdots2\sigma_{\gamma-1}\cdot P_1\cdots P_{\gamma-1}}{(\lambda_\gamma-\lambda_1)\cdots(\lambda_\gamma-\lambda_{\gamma-1})}\right)\times$$

$$\times P_\gamma\left(I+\sum_{l=\gamma+1}^{n}\frac{2\sigma_lP_l}{\lambda_\gamma-\lambda_l}+\cdots+\frac{2\sigma_{\gamma+1}\cdots2\sigma_n\cdot P_{\gamma+1}\cdots P_n}{(\lambda_\gamma-\lambda_{\gamma+1})\cdots(\lambda_\gamma-\lambda_n}\right),$$

то b_{kj} представится в виде суммы произведений проекторов

$$(P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_p})^*J(P_{\beta_1}\cdots P_{\beta_q})$$

со скалярными коэффициентами.

Выберем какое-либо из таких произведений и выделим из этой суммы сумму слагаемых указанного вида. Так как произведение $P_{\alpha_1}\cdot P_{\alpha_2}\cdots P_{\alpha_p}$ войдет в состав a_α тогда и только тогда, когда среди его множителей присутствует P_α, то при суммировании следует учитывать лишь значения α, равные $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, где $\alpha_s\leqslant k$, $\alpha_{s+1}>k$.

То же относится и к суммированию по индексу β.

Таким образом, выделенная сумма имеет вид

$$2\sigma_{\alpha_1}\cdots2\sigma_{\alpha_p}P_{\alpha_p}^*\cdots P_{\alpha_1}^*JP_{\beta_1}\cdots P_{\beta_q}\cdot2\sigma_{\beta_1}\cdots2\sigma_{\beta_q}\sum_{\rho=1}^{s}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\overline{\varphi}_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})}{\psi_p'(\lambda_{\alpha_\rho})}\times$$

$$\times\frac{1}{\overline{\lambda}_{\alpha_\rho}+\lambda_{\beta_\tau}}\cdot\frac{\varphi_{n-j}(\lambda_{\beta_\tau})}{\psi_q'(\lambda_{\beta_\tau})},\qquad (*)$$

где $\psi_p(\lambda)=(\lambda-\lambda_{\alpha_1})\cdots(\lambda-\lambda_{\alpha_p})$; $\psi_q(\lambda)=(\lambda-\lambda_{\beta_1})\cdots(\lambda-\lambda_{\beta_q})$.

Однако в ней суммирование можно продолжить до p и q, так как в точках λ_{α_ρ} таких, что $\alpha_\rho>k$, $\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})=0$, и вычисление предела выражения (*) сведется к отысканию

$$\lim_{\lambda_{\alpha_\rho},\lambda_{\beta_\tau}\to\lambda_0}\sum_{\rho=1}^{p}\sum_{\tau=1}^{q}\frac{\overline{\varphi}_{n-k}(\overline{\lambda}_{\alpha_\rho})}{\overline{\psi}_p'(\overline{\lambda}_{\alpha_\rho})}\cdot\frac{1}{\overline{\lambda}_{\alpha_\rho}+\lambda_{\beta_\tau}}\cdot\frac{\varphi_{n-j}(\lambda_{\beta_\tau})}{\psi_q'(\lambda_{\beta_\tau})}.$$

Воспользуемся формулой (4, § 1)

$$\lim_{\substack{\mu_s\to\mu_0\\ \lambda_t\to\lambda_0}}\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}\frac{F(\mu_s,\lambda_t)}{\psi_p'(\mu_s)\,\psi_q'(\lambda_t)}=\frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\,\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0),$$

рассматривая в качестве

$$F(\mu,\lambda)=\overline{\varphi}_{n-k}(\mu)\cdot\frac{1}{\mu+\lambda}\cdot\varphi_{n-j}(\lambda).$$

Несложные вычисления частной производной приводят к равенству

$$\lim_{\substack{\lambda_{\alpha_p}\to\lambda_0\\ \lambda_{\beta_q}\to\lambda_0}} \sum_{p=1}^{p}\sum_{q=1}^{q} \frac{\overline{\varphi}_{n-k}(\overline{\lambda}_{\alpha_p})}{\overline{\psi}'_p(\overline{\lambda}_{\alpha_p})}\cdot\frac{1}{\overline{\lambda}_{\alpha_p}+\lambda_{\beta_q}}\cdot\frac{\varphi_{n-j}(\lambda_{\beta_q})}{\psi'_q(\lambda_{\beta_q})} = \frac{(-1)^{p+q+k+j-2n-2}}{(2\sigma_0)^{p+q+k+j-2n-1}}\times$$

$$\times\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(p+k-n-1)!\,(q+j-n-1)!}.$$

Таким образом, скалярный коэффициент при произведении проекторов

$$(P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_p})^* J(P_{\beta_1}\cdots P_{\beta_q})$$

после перехода к пределу имеет вид

$$(2\sigma_0)^{p+q}\cdot\frac{(-1)^{p+q+k+j-2n-2}}{(2\sigma_0)^{p+q+k+j-2n-1}}\cdot\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(p+k-n-1)!\,(q+j-n-1)!},$$

то есть зависит лишь от p и q, но не зависит от частных значений индексов.

Это позволяет сгруппировать всевозможные произведения проекторов

$$(P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_p})^* J(P_{\beta_1}\cdots P_{\beta_q})$$

с одинаковыми c и q, то есть выделить в предельном значении сумму

$$(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}\cdot(-1)^{p+q+k+j-2n-2}\,\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(p+k-n-1)!\,(q+j-n-1)!}\times$$

$$\times\sum_{\substack{\alpha_1=1,2,\cdots,n-(p-1),\\ \alpha_2=\alpha_1+1,\cdots,n-(p-2),\\ \cdots\cdots\\ \alpha_p=\alpha_{p-1}+1,\cdots,n}}(P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_p})^* J\sum_{\substack{\beta_1=1,2,\cdots,n-(q-1)\\ \beta_2=\beta_1+1,\cdots,n-(q-2)\\ \cdots\cdots\\ \beta_q=\beta_{q-1}+1,\cdots,n}}(P_{\beta_1}\cdots P_{\beta_q}) = (2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}\cdot(-1)^{p+q+k+j-2n-2}\times$$

$$\times\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(p+k-n-1)!\,(q+j-n-1)!}\,A^*_{n-p}\,JA_{n-q}.$$

Здесь уже A_{n-p}, A_{n-q} — коэффициенты аддитивного разложения $w_0(\lambda)$.

Легко видеть, что $\lim\limits_{\lambda_\alpha\to\lambda_0} b_{kj}$ представляет собой сумму таких выражений

$$b^0_{kj}=\lim b_{kj}=\sum_{p=n-k+1}^{n}\ \sum_{q=n-j+1}^{n}(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}\cdot(-1)^{p+q+k+j-2n-2}\times$$

$$\times\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(p+k-n-1)!\,(q+j-n-1)!}\,A^*_{n-p}\,JA_{n-q}.$$

Вводя новые индексы суммирования

$$p+k-n=\alpha,$$

$$q+j-n=\beta,$$

где $\alpha=1,2,\cdots,k$; $\beta=1,2,\cdots,j$, окончательно получим

$$b^0_{kj}=(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{j}(-1)^{\alpha+\beta-2}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}\,A^*_{k-\alpha}\,JA_{j-\beta}$$

и, следовательно, после предельного перехода неравенство (A) для $w(\lambda)$ преобразуется в неравенство

$$(A)\quad \left\| (2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{j} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} \overset{*}{A}_{k-\alpha} J A_{j-\beta} \right\| > 0$$

$(k=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, n)$ для $w_0(\lambda)$.

Преобразуем далее условия (B) для $w(\lambda)$

$$2\sigma_k J a_k = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{2\sigma_k 2\sigma_\alpha}{\bar{\lambda}_\alpha + \lambda_k} \overset{*}{a}_\alpha J a_k \quad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{7}$$

в соответствующие условия для $w_0(\lambda)$.

Перепишем систему (7) в матричном виде

$$[2\sigma_1 J a_1, 2\sigma_2 J a_2, \cdots, 2\sigma_n J a_n] = [I, I, \cdots, I] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{4\sigma_1\sigma_1}{\bar{\lambda}_1+\lambda_1} \overset{*}{a}_1 J a_1 \cdots & \frac{4\sigma_1\sigma_n}{\bar{\lambda}_1+\lambda_n} \overset{*}{a}_1 J a_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{4\sigma_n\sigma_1}{\bar{\lambda}_n+\lambda_1} \overset{*}{a}_n J a_1 \cdots & \frac{4\sigma_1\sigma_n}{\bar{\lambda}_n+\lambda_n} \overset{*}{a}_n J a_n \end{pmatrix}$$

или

$$[2\sigma_1 J a_1, \cdots, 2\sigma_n J a_n]\, T^{-1} = [I, \cdots, I]\, T^{*} \cdot T^{*-1} \left(\frac{4\sigma_k\sigma_j}{\bar{\lambda}_k+\lambda_j} \overset{*}{a}_k J a_j \right) T^{-1}.$$

Предел матрицы

$$T^{*-1} \left(\frac{4\sigma_k\sigma_j}{\bar{\lambda}_k+\lambda_j} \overset{*}{a}_k J a_j \right) T^{-1}$$

при условии $\lambda_k, \lambda_j \to \lambda_0$ известен и, так как

$$[I, I, \cdots, I]\, T^{*} = [I, I, \cdots, I] \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \frac{I}{\overset{*}{\varphi}_n(\lambda_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{I}{\overset{*}{\varphi}_n(\lambda_2)} & \frac{1}{\overset{*}{\varphi}_{n-1}(\lambda_2)} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{I}{\overset{*}{\varphi}_n(\lambda_n)} & \frac{I}{\overset{*}{\varphi}_{n-1}(\lambda_n)} & \cdots & \frac{I}{\overset{*}{\varphi}_1(\lambda_n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{I}{\overset{*}{\varphi}_n(\lambda_j)}, \sum_{j=2}^{n} \frac{I}{\overset{*}{\varphi}_{n-1}(\lambda_j)}, \cdots, \sum_{j=n-1}^{n} \frac{I}{\overset{*}{\varphi}_2(\lambda_j)}, \frac{I}{\overset{*}{\varphi}_2(\lambda_n)} \right] = [0, 0, \cdots, 0, I],$$

то остается найти

$$\lim_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \to \lambda_0} [2\sigma_1 J a_1, \cdots, 2\sigma_n J a_n]\, T^{-1} =$$

$$= \lim_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \to \lambda_0} [2\sigma_1 J a_1, \cdots, 2\sigma_n J a_n] \begin{pmatrix} \varphi_{n-1}(\lambda_1) I & \varphi_{n-2}(\lambda_1) I \cdots & \varphi_1(\lambda_1) I & I \\ 0 & \varphi_{n-2}(\lambda_2) I \cdots & \varphi_1(\lambda_2) I & I \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots & \varphi_1(\lambda_{n-1}) I & I \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \to \lambda_0} [2\sigma_1 \, Ja_1 \, \varphi_{n-1}(\lambda_1), \sum_{\alpha=1}^{2} 2\sigma_\alpha Ja_\alpha \, \varphi_{n-2}(\lambda_\alpha), \cdots, \sum_{\alpha=1}^{n-1} 2\sigma_\alpha \, J \, a_\alpha \, \varphi_1(\lambda_\alpha),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} 2\sigma_\alpha Ja_\alpha].$$

Рассмотрим $\lim\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \to \lambda_0} \sum\limits_{\alpha=1}^{k} 2\sigma_\alpha \, Ja_\alpha \, \varphi_{n-k}(\lambda_\alpha)$. Если в сумме заменить a_α его выражением

$$a_\alpha = \left\{ I + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \frac{2\sigma_\beta P_\beta}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} + \cdots + \frac{2\sigma_1 \cdots 2\sigma_{\alpha-1} \cdot P_1 \cdots P_{\alpha-1}}{(\lambda_\alpha - \lambda_1) \cdots (\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha-1})} \right\} P_\alpha \left\{ I + \sum_{\beta=\alpha+1}^{n} \frac{2\sigma_\beta P_\beta}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{2\sigma_{\alpha+1} \cdots 2\sigma_n \cdot P_{\alpha+1} \cdots P_n}{(\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+1}) \cdots (\lambda_\alpha - \lambda_n)} \right\},$$

то она представится в виде суммы произведений проекторов $JP_{\alpha_1} \cdots \cdots P_{\alpha_p}$ со скалярными коэффициентами.

Выберем какое-либо из таких произведений и выделим из рассматриваемой суммы сумму слагаемых указанного вида.

Так как произведение $P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_p}$ войдет в состав a_α тогда и только тогда, когда среди его множителей присутствует P_α, то при суммировании следует учитывать лишь значения α, равные $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, где $\alpha_s \leqslant k$, $\alpha_{s+1} > k$.

Выбранная сумма имеет вид

$$2\sigma_{\alpha_1} \cdots 2\sigma_{\alpha_p} \, JP_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_p} \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})}{\psi_p'(\lambda_{\alpha_\rho})},$$

где $\psi_p(\lambda) = (\lambda - \lambda_{\alpha_1}) \cdots (\lambda - \lambda_{\alpha_p})$.

Заметим, что $\sum\limits_{\rho=1}^{s} \dfrac{\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})}{\psi_p'(\lambda_{\alpha_\rho})} = \sum\limits_{\rho=1}^{p} \dfrac{\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})}{\psi_p'(\lambda_{\alpha_\rho})}$, так как $\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho}) = 0$, если $\alpha_\rho > k$ и

$$\sum_{\rho=1}^{p} \frac{\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})}{\psi_p'(\lambda_{\alpha_\rho})} = \begin{cases} 0, & \text{если } n-k < p-1, \\ 1, & \text{если } n-k = p-1, \\ \xrightarrow[\lambda_{\alpha_\rho} \to \lambda_0]{} \dfrac{1}{(p-1)!} \dfrac{d^{p-1} \varphi_{n-k}(\lambda_0)}{d\lambda^{p-1}} = 0, & \text{если } n-k \geqslant p, \end{cases}$$

в силу формул (2), (3), (4) § 1.

Таким образом, в сумме $\sum\limits_{\alpha=1}^{k} 2\sigma_\alpha \, Ja_\alpha \varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})$ после перехода к пределу остается лишь сумма произведений проекторов, содержащих точно $p = n-k+1$ множителей $P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_{n-k+1}}$ с одинаковыми коэффициентами $(2\sigma_0)^{n-k+1}$, и, следовательно

$$\lim_{\lambda_\alpha \to \lambda_0} \sum_{\alpha=1}^{k} 2\sigma_\alpha J a_\alpha \varphi_{n-k}(\lambda_\alpha) = (2\sigma_0)^{n-k+1} J \sum_{\substack{\alpha_1=1,2,\cdots,k,\\ \alpha_2=\alpha_1+1,\cdots,k+1,\\ \cdots\cdots\\ \alpha_{n-k+1}=\alpha_{n-k}+1,\cdots,n}} (P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_{n-k+1}}) =$$

$$=(2\sigma_0)^{n-k+1} JA_{n-(n-k+1)} = (2\sigma_0)^{n-k+1} JA_{k-1}.$$

Итак, условия (B) для $w_0(\lambda)$ запишутся так:

$$[(2\sigma_0)^n JA_0,\cdots, 2\sigma_0 JA_{n-1}] = [0,\cdots,0,I] \left\| (2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)} \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{j} (-1)^{\alpha+\beta} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} A^*_{k-\alpha} JA_{j-\beta} \right\| = \left\| (2\sigma_0)^{n+1-j} \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{j} (-1)^{\alpha+\beta} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} A^*_{n-\alpha} JA_{j-\beta} \right\|$$

или

$$(2\sigma_0)^{n-p+1} JA_{p-1} = (2\sigma_0)^{n+1-p} \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!} \times$$

$$\times A^*_{n-\alpha} JA_{p-\beta} \quad (p=1,2,\cdots,n).$$

то есть

$$JA_{p-1} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!} A^*_{n-\alpha} JA_{p-\beta} \quad (p=1,2,\cdots,n).$$

Необходимость доказана. Достаточность.

Пусть выполнены условия

$$(A)\quad \left\| (2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)} \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{j} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)}! A^*_{k-\alpha} JA_{j-\beta} \right\| >$$

$$> 0 \quad (k=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$$

и

$$(B)\ JA_{p-1} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} A^*_{n-\alpha} JA_{p-\beta} \quad (p=1,2,\cdots,n).$$

Составим J-форму для $w_0(\lambda) = I + \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^p A_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}$

$$w_0^*(\lambda)\, J w_0(\lambda) - J = \left(I + \sum_{q=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^q A^*_{n-q}}{(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^q}\right) J \left(I + \sum_{p=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^p A_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}\right) - J =$$

$$= \sum_{q=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^q A^*_{n-q} J}{(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^q} + \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} (2\sigma_0)^{p+q} \frac{A^*_{n-q} JA_{n-p}}{(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^q(\lambda-\lambda_0)^p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^p JA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}.$$

Заменим в средней сумме дробь $\frac{1}{(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^q(\lambda-\lambda_0)^p}$ суммой дробей

$$\frac{1}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q(\lambda-\lambda_0)^p}=\sum_{\alpha=0}^{q-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(\lambda+\overline{\lambda})(-1)^{\alpha+\beta}C_{\alpha+\beta}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{\alpha+\beta+1}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}+$$

$$+\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(-1)^{q+\beta}C_{q+\beta-1}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{q+\beta}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}+\sum_{\alpha=0}^{q-1}\frac{(-1)^{p+\alpha}C_{p+\alpha-1}^{\alpha}}{(2\sigma_0)^{p+\alpha}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}}.$$

Последнее равенство получается из очевидного тождества

$$\frac{1}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q(\lambda-\lambda_0)^p}=\frac{\lambda+\overline{\lambda}}{2\sigma_0(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q(\lambda-\lambda_0)^p}-\frac{1}{2\sigma_0(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-1}(\lambda-\lambda_0)^p}-$$

$$-\frac{1}{2\sigma_0(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q(\lambda-\lambda_0)^{p-1}}.$$

Тогда

$$w_0^*(\lambda)Jw_0(\lambda)-J=\sum_{q=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^qA_{n-q}^*J}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(2\sigma_0)^{p+q}A_{n-q}^*JA_{n-p}\times$$

$$\times\left\{\sum_{\alpha=0}^{q-1}\frac{(-1)^{p+\alpha}C_{p+\alpha-1}^{\alpha}}{(2\sigma_0)^{p+\alpha}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}}+\sum_{\alpha=0}^{q-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(\lambda+\overline{\lambda})(-1)^{\alpha+\beta}C_{\alpha+\beta}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{\alpha+\beta+1}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(-1)^{q+\beta}C_{q+\beta-1}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{q+\beta}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}\right\}+\sum_{p=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^pJA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}=$$

$$=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{q-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}(\lambda+\overline{\lambda})\frac{(2\sigma_0)^{p+q}A_{n-q}^*JA_{n-p}(-1)^{\alpha+\beta}C_{\alpha+\beta}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{\alpha+\beta+1}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}+$$

$$+\left\{\sum_{q=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^qA_{n-q}^*J}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{q-1}\frac{(2\sigma_0)^{p+q}A_{n-q}^*JA_{n-p}(-1)^{p+\alpha}C_{p+\alpha-1}^{\alpha}}{(2\sigma_0)^{p+\alpha}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}}\right\}+$$

$$+\left\{\sum_{p=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^pJA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(2\sigma_0)^{p+q}A_{n-q}^*JA_{n-p}(-1)^{q+\beta}C_{q+\beta-1}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{q+\beta}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}\right\}.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое последней суммы:

$$1)\ \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{q-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}(\lambda+\overline{\lambda})(2\sigma_0)^{p+q-(\alpha+\beta+1)}\cdot(-1)^{\alpha+\beta}C_{\alpha+\beta}^{\beta}\frac{A_{n-q}^*JA_{n-p}}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=n-k+1}^{n}\sum_{p=n-j+1}^{n}\frac{(\lambda+\overline{\lambda})(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{n-k+1}(\lambda-\lambda_0)^{n-j+1}}(-1)^{p+q+k+j-2n-2}\times$$

$$\times\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(q+k-n-1)!(p+j-n-1)!}A_{n-q}^*JA_{n-p}=(\lambda+\overline{\lambda})\left[\frac{I}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^n},\dots\right.$$

$$\left.\dots,\frac{I}{\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0}\right]\left\|\sum_{q=n-k+1}^{n}\sum_{p=n-j+1}^{n}(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}\times\right.$$

$$\times\frac{(-1)^{p+q+k+j-2n-2}(p+q+k+j-2n-2)!}{(q+k-n-1)!\,(p+j-n-1)!}\,\dot{A}^{*}_{n-q}J\dot{A}_{n-p}\Bigg\|\begin{bmatrix}\frac{I}{(\lambda-\lambda_0)^n}\\ \cdot\ \ \cdot\\ \frac{I}{\lambda-\lambda_0}\end{bmatrix}=$$

где введены новые индексы

$$q-\alpha=n-k+1,\ p-\beta=n-j+1,\ k=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n;$$

$$b=n-k+1,\cdots,n;\ p=n-j+1,\cdots,n.$$

Полагая

$$n-q=k-s,\ n-p=j-t,$$

получим

$$=(\lambda+\bar{\lambda}\left[\frac{I}{(\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_0)^n},\cdots,\frac{I}{\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_0}\right]\Bigg\|\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{j}(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}(-1)^{s+t}\times$$

$$\times\frac{(s+t-2)!}{(s-1)!\,(t-1)!}A^{*}_{k-s}JA_{j-t}\Bigg\|\begin{bmatrix}\frac{I}{(\lambda-\lambda_0)^n}\\ \cdot\ \ \cdot\\ \frac{I}{\lambda-\lambda_0}\end{bmatrix}.$$

2) $$\sum_{p=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^p JA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(2\sigma_0)^{p+q}A^{*}_{n-q}JA_{n-p}}{(2\sigma_0)^{q+\beta}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}(-1)^{q+\beta}C^{q-1}_{q+\beta-1}=$$

$$p-\beta=s$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^p JA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta=0}^{n-s}\frac{(2\sigma_0)^s A^{*}_{n-q}JA_{n-\beta-s}}{(\lambda-\lambda_0)^s}(-1)^{q+\beta}\frac{(q+\beta-1)!}{\beta!\,(q-1)!}=$$

$$\beta=\tau-1$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^p JA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{n-s+1}\frac{(2\sigma_0)^s A_{n-q}JA_{n-\tau+1-s}}{(\lambda-\lambda_0)^s}\times$$

$$\times(-1)^{q+\tau-1}\frac{(q+\tau-2)!}{(\tau-1)!\,(q-1)!}=0,$$

на основании условий (B).

Итак, окончательно

$$w_0^{*}(\lambda)Jw_0(\lambda)-J=(\lambda+\bar{\lambda})\left[\frac{I}{(\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_0)^n},\cdots,\frac{I}{\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_0}\right]\times$$

$$\times\Bigg\|\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{j}(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}(-1)^{s+t}\frac{(s+t-2)!}{(s-1)!(t-1)!}A^{*}_{k-s}JA_{j-t}\Bigg\|\begin{bmatrix}\frac{I}{(\lambda-\lambda_0)^n}\\ \cdot\ \ \cdot\\ \frac{I}{\lambda-\lambda_0}\end{bmatrix},$$

откуда в силу неравенства (A) следует, что

$$w_0^*(\lambda)\, J w_0(\lambda) - J > 0 \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0),$$

$$w_0^*(\lambda)\, J w_0(\lambda) - J = 0 \quad (\operatorname{Re}\lambda = 0),$$

что и требовалось доказать.

После доказанной теоремы доказательство аналогичного факта для произвольного элементарного множителя с любым набором кратных полюсов уже не представляет принципиальных трудностей. Точную формулировку условий (A) и (B) мы опускаем из-за громоздкой записи их.

Тем самым можно считать решенным вопрос о структуре *произвольной рациональной матрицы-функции* J-несжимающей в правой полуплоскости и J-унитарной на мнимой оси.

§ 3. Реактивный множитель

Принципиальным для синтеза электрических цепей является вопрос об аддитивной структуре произвольной реактивной матрицы-функции.

И здесь для простоты ограничимся формулировкой результата для того частного случая, когда реактивная матрица-функция имеет полюсы n-го порядка только в четырех точках

$$\lambda_0, -\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_0, -\lambda_0.$$

Нормируя ее условием $w(\infty) = I$, запишем ее разложение на простейшие дроби

$$w(\lambda) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^k A_{n-k}}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2\sigma_0)^k B_{n-k}}{(\lambda + \bar{\lambda}_0)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2\sigma_0)^k C_{n-k}}{(\lambda - \bar{\lambda}_0)^k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2\sigma_0)^k D_{n-k}}{(\lambda + \lambda_0)^k},$$

где

$$B_\tau = j\bar{A}_\tau j,\ C_\tau = \bar{A}_\tau,\ D_\tau = jA_\tau j,\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеет место

Теорема. *Для того чтобы матрица-функция*

$$w(\lambda) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^k A_{n-k}}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2\sigma_0)^k B_{n-k}}{(\lambda + \bar{\lambda}_0)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^k C_{n-k}}{(\lambda - \bar{\lambda}_0)^k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2\sigma_0)^k D_{n-k}}{(\lambda + \lambda_0)^k},$$

где $B_\tau = j\bar{A}_\tau j$, $C_\tau = \bar{A}_\tau$, $D_\tau = jA_\tau j$ *была J-несжимающей в правой полуплоскости и J-унитарной на мнимой оси необходимо и доста-*

точно, чтобы коэффициенты A_γ, B_γ, C_γ, D_γ *удовлетворяли неравенству*

$$(A)\quad \mathfrak{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} > 0,$$

где

$$a_{11}=\left\| (2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}A^*_{k-\alpha}JA_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{12}=\left\| (-1)^{n-i}(2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\left\{ A^*_{k+i-n-1}J+\sum_{\substack{p+q=2n+1-(k+i),\\ p=n-k+1,\cdots,n}} A^*_{n-p}JA_{n-q}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\alpha=1}^{k}(2\sigma_0)^{\alpha+i-n-1}A^*_{k-\alpha}J\frac{j\overline{b^{(\alpha+i-n-1)}}\,\overline{(\lambda_0)\,j}}{(\alpha+i-n-1)!}\right\}\right\|\begin{pmatrix}k=1,\cdots,n\\ i=1,\cdots,n\end{pmatrix},$$

$$a_{13}=\left\|\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}\frac{(2\sigma_0)^{n-k+\alpha}(2\sigma_0)^{n-i+\beta}}{(\bar\lambda_0+\bar\lambda_0)^{\alpha+\beta-1}}\cdot(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}A^*_{k-\alpha}JC_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{14}=\left\|\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}\frac{(2\sigma_0)^{n-k+\alpha}(-2\sigma_0)^{n-i+\beta}}{(\bar\lambda_0-\lambda_0)^{\alpha+\beta-1}}\cdot(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}A^*_{k-\alpha}JD_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{22}=\left\|(-2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}B^*_{k-\alpha}JB_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{23}=\left\|\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}\frac{(-2\sigma_0)^{n-k+\alpha}(2\sigma_0)^{n-i+\beta}}{(-\lambda_0+\bar\lambda_0)^{\alpha+\beta-1}}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}B^*_{k-\alpha}JC_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{24}=\left\|\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}\frac{(-2\sigma_0)^{n-k+\alpha}(-2\sigma_0)^{n-i+\beta}}{(-\lambda_0-\lambda_0)^{\alpha+\beta-1}}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}B^*_{k-\alpha}JD_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{33}=\left\|(2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}C^*_{k-\alpha}JC_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{34}=\left\|(-1)^{n-i}(2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\left\{ C^*_{k+i-n-1)}J+\sum_{\substack{p+q=2n+1-(k+i).\\ p=n-k-1,\cdots,n}} C^*_{n-p}JC_{n-q}+\right.\right.$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{k}(2\sigma_0)^{\alpha+i-n-1}C^{*}_{k-\alpha}\,J\,\frac{jb^{(\alpha+i-n-1)}(\lambda_0)\,j}{(\alpha+i-n-1)!}\Bigg\}\Bigg\|\quad\begin{pmatrix}k=1,\,2,\cdots,\,n;\\ i=1,\,2,\,\cdots,\,n\end{pmatrix};$$

$$a_{44}=\left\|(-2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}D^{*}_{k-\alpha}\,JD_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,\,n;\; i=1,\,2,\cdots,\,n);$$

(*так как* $\mathfrak{M}\geqslant 0$, *то*

$$a_{21}=a^{*}_{12},\; a_{31}=a^{*}_{13},\; a_{32}=a^{*}_{23},\; a_{41}=a^{*}_{14},\; a_{42}=a^{*}_{24},\; a_{43}=a^{*}_{34})$$

и равенствам

$$(B)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{\alpha+\beta=m}B^{*}_{n-\beta}\,JA_{n-\alpha}=0\quad(m=n+1,\cdots,\,2n),\\ &\sum_{\alpha+\beta=m}(2\sigma_0)^{\alpha+\beta}B^{*}_{n-\beta}\,JA_{n-\alpha}+\sum_{\beta_1-s=m}\frac{(2\sigma_0)^{\beta_1}}{s!}\,[B^{*}_{n-\beta_1}\,Jb^{(s)}(\lambda_0)+\\ &\qquad+\overline{jb^{(s)*}(\lambda_0)}\,j\,JA_{n-\beta_1}]=0\cdot\\ &\qquad(m=1,\,2,\cdots,\,n)\end{aligned}\right.$$

Здесь

$$w(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^{k}A_{n-k}}{(\lambda-\lambda_0)^{k}}+b(\lambda),$$

$$b(\lambda)=I+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-2\sigma_0)^{k}B_{n-k}}{(\lambda+\overline{\lambda}_0)^{k}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^{k}C_{n-k}}{(\lambda-\overline{\lambda}_0)^{k}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-2\sigma_0)^{k}D_{n-k}}{(\lambda+\lambda_0)^{k}}$$

является аналитической матрицей-функцией в окрестности точки λ_0 и потому разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора.

Одесский технологический институт
пищевой и холодильной промышленности

Поступило 21.X.1969

Ի. Վ. ԿՈՎԱԼԻՇԻՆԱ. Կամայական ռեակտիվ մատրիցա-ֆունկցիայի ադիտիվ վերլուծությունը (*ամփոփում*)։

Հոդվածում դիտարկվում է կամայական ռացիոնալ ռեակտիվ մատրից-ֆունկցիայի ադիտիվ ստրուկտուրայի հարցը։ Ստացված են ռեակտիվ մատրիցա-ֆունկցիայի ադիտիվ վերլուծության գործակիցների էլեմենտարության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։

I. V. KOVALISHINA. *Additive decomposition of an arbitrary reactive matrix—function* (summary)

The additive structure of an arbitrary rational reactive matrix-function is considered. The necessary and sufficient conditions of elementarity in forms of the coefficient of additive decomposition of a rational reactive matrix-function are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Потапов*. Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций, ДАН АрмССР, XLIX, 1969.
2. *W. Cauer*. Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Berlin, 1954.