

В. С. АБРАМОВИЧ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ХИЛЛЕ И ТАМАРКИНА

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

в котором $\alpha > 0$ и λ — произвольный комплексный параметр.

Через $E_\rho(z; \mu)$ будем обозначать функцию типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad (\rho > 0), \quad (2)$$

являющуюся, как известно, целой функцией порядка ρ при произвольном значении параметра μ [2].

Хилле и Тамаркиным [1] было установлено, что если $f(x)$ суммируема на $(0, 1)$, то интегральное уравнение (1) при любом значении параметра λ имеет в классе $L(0, 1)$ единственное решение, представляемое в виде*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(\lambda(x-t)^\alpha; \alpha) f(t) dt, \quad x \in (0, 1). \quad (3)$$

Обозначим

$$G_\alpha(x, t) = (x-t)^{\alpha-1}, \quad 0 < t < x < 1, \quad \alpha > 0. \quad (4)$$

Нам удобно будет записать решение (3) с помощью той же функции типа Миттаг-Леффлера в следующей символической форме:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \left\{ \widetilde{E}_{\frac{1}{\alpha}}(z; \alpha) \right\}_{z=\lambda(x-t)^\alpha} G_\alpha(x, t) f(t) dt, \quad x \in (0, 1), \quad (5)$$

полагая

$$\widetilde{E}_{\frac{1}{\alpha}}(z; \alpha) = z E_{\frac{1}{\alpha}}(z; \alpha); \quad G_{\alpha k}(x, t) = e^{\alpha k}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

В дальнейшем используем оператор, действующий из пространства $L(0, 1) \times L(0, 1)$ в $L(0, 1)$.

Пусть $g(x), h(x) \in L(0, 1)$. Обозначим

* Другие доказательства этой формулы приводятся в [2] и [3].

$$g(x) * h(x) \equiv (g * h)(x) = \int_x^1 g\left(\frac{x}{u}\right) h(u) \frac{du}{u}, \quad x \in (0, 1), \quad (7)$$

Пользуясь теоремой Фубини, легко показать коммутативность и ассоциативность введенной операции.

В настоящей статье рассматриваются интегральные уравнения вида

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\prod_{k=1}^n \Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)} \int_0^x G_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(x, t) u(t) dt, \quad x \in (0, 1) \quad (8)$$

с положительными параметрами $\alpha; p_1, \dots, p_n$ и произвольным комплексным параметром λ , в которых функция $G_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(x, t)$ имеет вид*

$$G_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(x, t) = x^{x-1} \left\{ \prod_{k=1}^n (1 - \tau^{p_k})^{\frac{\alpha}{p_k}-1} \right\}_{\tau=\frac{t}{x}} \quad (0 < t < x < 1). \quad (9)$$

Отметим, что уравнение (1) является частным случаем уравнения (8) при $n=1$ и дополнительно $p_1=1$. Как показывает доказываемая ниже теорема, решение уравнения (8) представляется формулой вида (5) с помощью обобщенной функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_{p_1, \dots, p_n}(z; \mu_1, \dots, \mu_n) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\prod_{k=1}^n \Gamma(\mu_k + s p_k^{-1})} \quad (p_k > 0), \quad (10)$$

являющейся целой функцией порядка $\left(\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$. Положим по аналогии с (6).

$$\bar{E}_{p_1, \dots, p_n}(z; \mu_1, \dots, \mu_n) = z E_{p_1, \dots, p_n}(z; \mu_1, \dots, \mu_n); \quad G_{\alpha k; p_1, \dots, p_n}(x, t) \equiv e^{\alpha k}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Теорема. Если функция $f(x)$ суммируема с квадратом на $(0, 1)$, то уравнение (8) имеет единственное решение, которое при условии (11) представимо в виде

$$u(x) = f(x) + p_1 \dots p_n \int_0^x \left\{ \bar{E}_{\frac{\alpha}{p_1}, \dots, \frac{\alpha}{p_n}}\left(z; \frac{\alpha}{p_1}, \dots, \frac{\alpha}{p_n}\right) \right\}_{z=\frac{\lambda e^{\alpha k}(x, t)}{p_1 \dots p_n}}(x, t) \times \\ \times f(t) dt, \quad x \in (0, 1), \quad (12)$$

* Символом $\prod_{k=1}^n$ обозначена $n-1$ раз примененная операция $*$ (7).

причем

$$\begin{aligned} u(x) &\in L_2(0, 1), \text{ если } \alpha \in \left(\frac{\rho_n}{2}, +\infty\right), \\ v(x) &\in L_1(0, 1), \text{ если } \alpha \in \left[0, \frac{\rho_n}{2}\right], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\rho_n = \left(\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}\right)^{-1}. \quad (14)$$

В частности, при $n = p_1 = 1$ мы получаем формулу (5) (теорему Хилле — Тамаркина).

Доказательству теоремы предположим несколько лемм.

Лемма 1. Положим

$$\varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n} \left(\frac{t}{x}\right) = x^{1-\alpha} \prod_{k=1}^n \frac{p_k}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)} G_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(x, t) = \quad (15)$$

$$= \prod_{k=1}^n \left[\frac{p_k}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)} (1 - \tau^{p_k})^{\frac{\alpha}{p_k}-1} \right]_{\tau=\frac{t}{x}} \quad (0 < t < x < 1; 0 < \alpha; p_k < +\infty). \quad (16)$$

Функции $\varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(\tau)$ ($0 < \alpha < +\infty$) при значениях параметра α : α_1 , α_2 и $\alpha_1 + \alpha_2$ связаны тождеством

$$(\varphi_{\alpha_1; p_1, \dots, p_n} * \tau^{\alpha_2} \varphi_{\alpha_2; p_1, \dots, p_n})(\tau) = \varphi_{\alpha_1 + \alpha_2; p_1, \dots, p_n}(\tau) \quad (0 < \tau < 1). \quad (17)$$

Доказательство. В самом деле, при $n=1$, $p_1=p$ тождество (17) проверяется непосредственно. Имеем

$$\begin{aligned} (\varphi_{\alpha_1; p} * \tau^{\alpha_2} \varphi_{\alpha_2; p})(\tau) &= \frac{p^2}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2}{p}\right)} \int_x^1 u^{\alpha_1-1} \left(1 - \frac{\tau^p}{u^p}\right)^{\frac{\alpha_1}{p}-1} (1 - u^p)^{\frac{\alpha_2}{p}-1} du = \\ &= \frac{p}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2}{p}\right)} \int_x^1 p u^{p-1} (u^p - \tau^p)^{\frac{\alpha_1}{p}-1} (1 - u^p)^{\frac{\alpha_2}{p}-1} du \end{aligned}$$

и, переходя к переменной интегрирования

$$v = \frac{u^p - \tau^p}{1 - \tau^p},$$

получим, что

$$(\varphi_{\alpha_1; p} * \tau^{\alpha_2} \varphi_{\alpha_2; p})(\tau) = \frac{p}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2}{p}\right)} (1 - \tau^p)^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{p}-1} \times$$

$$\times \int_0^1 v^{\frac{\alpha_2}{p}-1} (1-v)^{\frac{\alpha_1}{p}-1} dv = \frac{p}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{p}\right)} (1-\tau^p)^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{p}-1} \equiv \varphi_{\alpha_1 + \alpha_2; p}(\tau).$$

Предполагая далее, что тождество (17) имеет место для некоторого $n > 1$, и замечая, что

$$\varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_{n+1}}(\tau) = (\varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n} * \varphi_{\alpha; p_{n+1}})(\tau) \quad (0 < \alpha < +\infty), \quad (18)$$

а также

$$\tau^\beta \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_{n+1}}(\tau) = (\tau^\beta \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n} * \tau^\beta \varphi_{\alpha; p_{n+1}})(\tau) \quad (0 < \alpha, \beta < +\infty), \quad (18')$$

в силу предположения индукции имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_1 + \alpha_2; p_1, \dots, p_{n+1}}(\tau) &= (\varphi_{\alpha_1 + \alpha_2; p_1, \dots, p_n} * \varphi_{\alpha_1 + \alpha_2; p_{n+1}})(\tau) = \\ &= \varphi_{\alpha_1; p_1, \dots, p_n} * \tau^{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2; p_1, \dots, p_n} * (\varphi_{\alpha_1; p_{n+1}} * \tau^{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2; p_{n+1}})(\tau) = \\ &= (\varphi_{\alpha_1; p_1, \dots, p_n} * \varphi_{\alpha_1; p_{n+1}}) * (\tau^{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2; p_1, \dots, p_n} * \tau^{\alpha_2} \varphi_{\alpha_2; p_{n+1}})(\tau) = \\ &= (\varphi_{\alpha_1; p_1, \dots, p_{n+1}} * \tau^{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2; p_1, \dots, p_{n+1}})(\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, тождество (17) справедливо и для $n+1$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Для функции $\varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(\tau)$ (16) имеет место асимптотическая формула

$$\varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(\tau) = O((1-\tau)^{\frac{\alpha}{p_n}-1}), \quad \tau \rightarrow 1-0, \quad (19)$$

в которой

$$p_n = \left(\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)^{-1}. \quad (20)$$

Доказательство. Имеем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(\tau) &= \frac{p_n}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_n}\right)} \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_{n-1}}(\tau) * (1-\tau^{p_n})^{\frac{\alpha}{p_n}-1} = \\ &= \frac{p_n}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_n}\right)} \int_{\tau}^1 \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_{n-1}}\left(\frac{\tau}{u}\right) (1-u^{p_n})^{\frac{\alpha}{p_n}-1} \frac{du}{u}. \end{aligned} \quad (21)$$

Предполагая, что

$$\varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_{n-1}}(\tau) = O((1-\tau)^{\gamma}), \quad \gamma > 1 \quad (\tau \rightarrow 1-0), \quad (22)$$

с помощью соотношения (21) находим

$$\varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(\tau) = O\left(\int_{\tau}^1 (u-\tau)^{\gamma} (1-u)^{\frac{\alpha}{p_n}-1} du\right), \quad (\tau \rightarrow 1-0)$$

или, после подстановки $v = \frac{1-u}{1-\tau}$

$$\varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(\tau) = O\left(\int_0^1 (1-\tau)^{\gamma + \frac{\alpha}{p_n}} (1-v)^{\gamma} \cdot v^{\frac{\alpha}{p_n} - 1} dv = O((1-\tau)^{\gamma + \frac{\alpha}{p_n}}\right) \\ (\tau \rightarrow 1-0). \quad (23)$$

Учитывая теперь, что

$$\varphi_{\alpha; p_1}(\tau) = O((1-\tau)^{\frac{\alpha}{p_1} - 1}),$$

после последовательного применения соотношений (21)–(23) ($n \geq 2$), получим формулу (19) леммы.

Лемма 3. Интегральный оператор

$$G_{\alpha; p_1, \dots, p_n} f(x) = \int_0^x G_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(x, t) f(t) dt \quad (24)$$

1°. при условии $\alpha \in \left(\frac{p_n}{2}, +\infty\right)$ действует в классе $L_2(0, 1)$;

2°. если $\alpha \in \left(0, \frac{p_n}{2}\right]$, то он действует из класса $L_2(0, 1)$ в класс $L_1(0, 1)^*$.

Доказательство. Вначале заметим, что если функция $f(x)$ непрерывна на $(0, 1)$ и имеет логарифмическую особенность вида $O(\ln^{\gamma} x)$, $\gamma > 0$ в точке $x=0$, то, как нетрудно видеть, такими же свойствами обладает функция $f(x) * (1-x^p)^{\frac{\alpha}{p}-1}$ ($0 < \alpha, p < +\infty$), имея в точке $x=0$ особенность вида $O(\ln^{\gamma+1} x)$.

Отсюда следует, что функция $\varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(\tau)$ (16) имеет в точке $\tau=0$ особенность логарифмического характера, в промежутке $(0, 1)$ она непрерывна, наконец, в точке $\tau=1$ ее поведение определяется формулой (19) леммы 2.

В частности, при $\alpha > \frac{p_n}{2}$ функция

$$G_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(x, t) = x^{\alpha-1} \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)}{p_k} \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}\left(\frac{t}{x}\right) \quad (0 < t < x < 1) \quad (15')$$

суммируема с квадратом в области $0 < t < x < 1$:

$$\iint_{0 < t < x < 1} G_{\alpha; p_1, \dots, p_n}^2(x, t) dx dt = \left(\prod_{k=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)}{p_k}\right)^2 \int_0^1 x^{2\alpha-2} dx \int_0^x \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}^2 \times$$

* В случае $n=1$ даже из $L_1(0, 1)$ в $L_1(0, 1)$.

$$\times \left(\frac{t}{x} \right) dt = \left(\prod_{k=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)}{p_k} \right)^2 \int_0^1 x^{2\alpha-1} dx \int_0^1 \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}^2(u) du < +\infty \quad (25)$$

и, следовательно, для любой функции $f(x) \in L_2(0, 1)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |G_{\alpha; p_1, \dots, p_n} f(x)|^2 dx &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x G_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(x, t) f(t) dt \right\}^2 dx < \\ &\leq \int_0^1 |f(u)|^2 du \int_0^1 \int_{0 < t < x < 1} G_{\alpha; p_1, \dots, p_n}^2(x, t) dx dt < +\infty, \end{aligned}$$

т. е. $G_{\alpha; p_1, \dots, p_n} f(x) \in L_2(0, 1)$.

Пусть теперь $0 < \alpha \leq \frac{p_n}{2}$ и $f(x) \in L_2(0, 1)$. В этом случае

$$\begin{aligned} \int_0^1 |G_{\alpha; p_1, \dots, p_n} f(x)| dx &\leq \int_0^1 x^{\alpha-1} dx \int_0^x \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n} \left(\frac{t}{x} \right) |f(t)| dt = \\ &= \int_0^1 |f(t)| dt \int_t^1 x^{\alpha} \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n} \left(\frac{t}{x} \right) \frac{dx}{x} = \int_0^1 |f(t)| dt \int_t^1 \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(x) \frac{dx}{x^{\alpha+1}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Легко видеть, что функция $t^{\alpha+\delta} \int_t^1 \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(x) \frac{dx}{x^{\alpha+1}}$ ограничена на $[0, 1]$ при любом $\delta > 0$. Однако $\delta > 0$ можно выбрать так, чтобы $\frac{f(t)}{t^\delta} \in L_1(0, 1)$. Таким образом, из (26) вытекает, что $G_{\alpha; p_1, \dots, p_n} f(x) \in L_1(0, 1)$.

Лемма доказана полностью.

Доказательство теоремы получим теперь непосредственным применением теории интегральных уравнений Вольтерра [4].

В самом деле, если $\alpha > \frac{p_n}{2}$, то поскольку имеет место условие (25), для резольвенты уравнения (8) имеем сходящийся при любом значении параметра λ ряд

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s K_{s+1}(x, t) \quad (0 < t < x < 1), \quad (27)$$

члены которого определяются посредством рекуррентных соотношений

$$K_1(x, t) = \left[\prod_{k=1}^n \Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right) \right]^{-1} G_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(x, t) =$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{p_1 \cdots p_n} \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n} \left(\frac{t}{x} \right), \quad 0 < t < x < 1, \quad (28)$$

$$K_{s+1}(x, t) = \int_t^x K_s(x, v) K_1(v, t) dv =$$

$$= x \int_{t/x}^1 K_s(x, ux) K_1(ux, t) du, \quad 0 < t < x < 1; \quad s=1, 2, \dots \quad (29)$$

Покажем, что из (28), (29) следует, что

$$K_s(x, t) = \left[\prod_{k=1}^n p_k^{\alpha-1} \Gamma \left(\frac{\alpha s}{p_k} \right) \right]^{-1} G_{\alpha s; p_1, \dots, p_n}(x, t) =$$

$$= \frac{x^{\alpha s-1}}{(p_1 \cdots p_n)^s} \varphi_{\alpha s; p_1, \dots, p_n} \left(\frac{t}{x} \right), \quad 0 < t < x < 1; \quad s=1, 2, \dots \quad (30)$$

Действительно, при $s=1$ формула (30) совпадает с (28). Предполагая далее, что формула (30) имеет место для некоторого $s \geq 1$, с помощью тождества (17) леммы 1 и соотношения (29) находим

$$K_{s+1}(x, t) = x \int_{t/x}^1 \frac{x^{\alpha s-1}}{(p_1 \cdots p_n)^s} \varphi_{\alpha s; p_1, \dots, p_n}(u) \cdot \frac{x^{\alpha-1} u^{\alpha-1}}{p_1 \cdots p_n} \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n} \left(\frac{t/x}{u} \right) \times$$

$$\times du = \frac{x^{\alpha(s+1)-1}}{(p_1 \cdots p_n)^{s+1}} \{ \varphi_{\alpha; p_1, \dots, p_n}(\tau) * (\tau^{\alpha} \varphi_{\alpha s; p_1, \dots, p_n}(\tau)) = \frac{t}{x} =$$

$$= \frac{x^{\alpha(s+1)-1}}{(p_1 \cdots p_n)^{s+1}} \varphi_{\alpha(s+1); p_1, \dots, p_n} \left(\frac{t}{x} \right), \quad 0 < t < x < 1.$$

Таким образом, формула (30) доказана для любого $s \geq 1$ и, следовательно, решение уравнения (8) представимо равномерно сходящимся рядом Неймана

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{p_1 \cdots p_n} \right)^s \frac{G_{\alpha(s+1); p_1, \dots, p_n}(x, t)}{\prod_{k=1}^n \Gamma \left(\frac{\alpha(s+1)}{p_k} \right)} f(t) dt, \quad x \in (0, 1). \quad (31)$$

Из (31), (10) и (11), очевидно, следует формула (12) теоремы.

Отметим, что для всех достаточно больших s :

$$s > \frac{1}{2} \max(1, p_n) \quad (32)$$

с помощью неравенства Буняковского легко получим, что

$$\left| \int_0^x G_{\alpha s; p_1, \dots, p_n}(x, t) f(t) dt \right|^2 \leq C_{\alpha; p_1, \dots, p_n} < +\infty, \quad x \in (0, 1),$$

где $C_\alpha; p_1, \dots, p_n$ — постоянная, зависящая лишь от параметров.

Следовательно, на характер функции $u(x)$ (31) оказывает влияние лишь конечное число первых членов ряда Неймана, которые согласно лемме 3 принадлежат либо классу $L_2(0, 1)$ (при $\alpha s > \frac{p_n}{2}$), либо классу $L_1(0, 1)$ (при $0 < \alpha s \leq \frac{p_n}{2}$). Отсюда следуют утверждения теоремы (13).

Ростовский-на-Дону

государственный университет

Поступило 17.IX.1970

Վ. Ս. ԱՌԱՄՈՎԻՉ. Խիլլեի և Տամարկինի թեորեմի ընդհանրացումը (ամփոփում):

Աշխատանքում ստացվել է Խիլլեի և Տամարկինի հայտերի թեորեմի [1] ընդհանրացումը Վոլտերրեի տիպի ինտեգրալ հավասարումների մի դասի համար:

V. S. ABRAMOVICH. *A generalisation of the Hille-Tamarkin theorem*
(summary)

In the present paper a generalization of Hille-Tamarkin theorem for a class of Volterre type integral equations is obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. E. Hille, J. Tamarkin. On the theory of linear integral equations I, Annals of Math. (2nd ser), 31, № 3, 1930, 479—528.
2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. „Наука“, 1966.
3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, Физматгиз, т. 4, М.—Л., 1958.
4. Ф. Трикоми. Интегральные уравнения, ИЛ, М., 1960.