ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 1, 1971 Математика

Р. С. ДАВТЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПО ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ СХОДИМОСТИ

§ 1. Введение

Приведем некоторые обозначения и определения. $L_2(\Delta)$ будет означать класс функций, интегрируемых с квадратом на отрезке Δ. Далее положим

$$L_2 \equiv L_2([0, 1]),$$

$$a_k(f) \equiv \int_0^1 f(x)\,\varphi_k(x)\,dx,$$

$$S_n(f, x) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\,\varphi_k(x),$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — некоторая ортонормированная система, а $f(x)$ — некоторая функция из L_2.

Определение 1. Ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, заданная на отрезке [0,1], называется системой сходимости, если всякий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\varphi_n(x)$$

сходится почти всюду на [0,1] как только

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty.$$

Определение 2. Будем говорить, что полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством локализации в классе L_2, если ряд Фурье любой функции из L_2, равной нулю в некотором интервале отрезка [0,1], равномерно сходится к нулю на каждом отрезке, лежащем внутри этого интервала.

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с представимостью измеримых функций рядами по полным ортонормированным системам.

В 1939 г. Д. Е. Меньшовым была доказана следующая фундаментальная теорема о представлении измеримых функций тригонометрическими рядами (см. [1]).

Теорема I (Д. Е. Меньшов). *Для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[-\pi, \pi]$, существует тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1.1}$$

сходящийся к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

В наиболее общем случае, когда представимая функция $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, задача изображения измеримой функции почти всюду сходящимся тригонометрическим рядом остается открытой. Существенным продвижением в направлении решения этой задачи явилась доказанная в 1949 году (см. [2])

Теорема II (Д. Е. Меньшов). *Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, можно определить ряд (1.1), сходящийся по мере на $[-\pi, \pi]$ к функции $f(x)$ и, кроме того, удовлетворяющий условию*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

В дальнейшем А. А. Талаляном была доказана теорема (см. [3], теорему 3), являющаяся усилением теоремы II. Она формулируется следующим образом:

Теорема III. *Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, существует тригонометрический ряд (1.1), сходящийся к $f(x)$ почти всюду на том множестве, где $f(x)$ конечна и сходящийся к $f(x)$ по мере на том множестве, где $f(x)$ равна $+\infty$ или $-\infty$.*

Оказывается, что теорему III А. А. Талаляна можно распространить на некоторый класс полных ортонормированных систем, точнее справедлива

Теорема 1. *Пусть полная в L_2 ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ такова, что*

a) *$\{\varphi_n(x)\}$ является системой сходимости,*

b) *$\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством локализации в классе L_2 (см. определение 2).*

Тогда для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[0, 1]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, существует ряд по системе $\{\varphi_n(x)\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x),$$

сходящийся к $f(x)$ почти всюду на том множестве, где $f(x)$ конечна и сходящийся к $f(x)$ по мере на том множестве, где $f(x)$ равна $+\infty$ или $-\infty$.

Используя результат Л. Карлесона (см. [4], теорему (c)) о том, что тригонометрическая система является системой сходимости, из теоремы 1 можно получить теорему III (выполнение условия b) теоремы 1 для тригонометрической системы хорошо известно).

Заметим, что теорема I Меньшова была доказана задолго до доказательства теоремы Карлесона, и поэтому при ее доказательстве были использованы другие, очень глубокие свойства тригонометрической системы. При этом для доказательства теоремы I Д. Е. Меньшовым была использована доказанная им же очень сильная теорема о том, что если $f(x)$—произвольная измеримая функция и ε—произвольное положительное число, то существует непрерывная функция $\psi(x)$ такая, что

$$\mu\{x: f(x) \neq \psi(x)\} < \varepsilon,$$

и ряд Фурье функции $\psi(x)$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ (см. [5]*).

Методы, примененные Д. Е. Меньшовым [1] (и в дальнейшем А. А. Талаляном [3], [6]), существенно использованы также при доказательстве теоремы 1, несмотря на то, что в ее формулировке от системы $\{\varphi_n(x)\}$ требуется, чтобы она была системой сходимости.

Проверяя условия a) и b) для различных полных ортонормированных систем, из теоремы 1 можно получить аналогии теоремы III для этих систем. А именно: требованиям a) и b) теоремы 1 удовлетворяют, например, следующие системы $\{\varphi_n(x)\}$:

1) $\{\varphi_n(x)\}$ — система Уолша (опр. см. в [7]);

2) $\{\varphi_n(x)\}$ — любая полная ортонормированная система сходимости, удовлетворяющая условиям

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_n(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta_n \\ \mu\,\Delta_n \to 0 \end{array}\right\}, \tag{1.2}$$

где Δ_n — интервал, принадлежащий отрезку [0,1]. (В частности $\{\varphi_n(x)\}$ может совпадать с системой Хаара);

3) $\{\varphi_n(x)\}$ — любая система, обладающая свойством равносходимости относительно тригонометрической системы в следующем смысле:

если $f(x) \in L_2([-\pi, \pi])$ и $S(f)$ и $\sigma(f)$ ее ряды Фурье соответственно по системе $\{\varphi_n(x)\}$ и по тригонометрической системе, то из сходимости почти всюду ряда $\sigma(f)$ следует сходимость почти всюду ряда $S(f)$, а из равномерной на некотором отрезке сходимости ряда $\sigma(f)$ следует равномерная сходимость ряда $S(f)$ на том же отрезке. (В частности этим свойством обладают системы Штурма-Лиувилля (см., например, [8])).

В случае 1) условие a) выполняется согласно [9], а условие b) следует из теорем XXIII и XXX работы [10].

В случае 2) свойство a) системы $\{\varphi_n(x)\}$ уже предположено, а свойство b) следует из условия (1.2).

---

* Заметим также, что эта теорема Меньшова об „исправлении функции" не перекрывается с теоремой Карлесона.

В случае 3) система $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условиям a) и b), ибо тригонометрическая система обладает этим свойством.

Отметим, что результат теоремы 1, когда $\{\varphi_n(x)\}$ — система Хаара или Уолша, нельзя усилить, заменяя сходимость по мере (на том множестве, где представимая функция равна $+\infty$ или $-\infty$) сходимостью почти всюду (см. [11], теоремы 1 и 2).

§ 2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 (А. А. Талалян)*. Пусть $f(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots \varphi_N(x)$ — произвольные функции (N конечное), принадлежащие классу $L_2(\Delta)$, где Δ — некоторый отрезок. Тогда для любых наперед заданных чисел $1 > \varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно определить функцию $f^*(x)$ и множество e, обладающие следующими свойствами:

a) $f^*(x) = f(x)$ при $x \overline{\in} e$, где $e \subset \Delta$, $\mu e < \varepsilon_0 \mu \Delta$,

b) $\int\limits_{\Delta} |f^*(x)|^2 dx \leqslant \frac{2}{\varepsilon_0} \int\limits_{\Delta} f^2(x)\, dx$,

c) $\left| \int\limits_{\Delta} f^*(x)\, \varphi_k(x)\, dx \right| < \varepsilon \quad (1 \leqslant k \leqslant N).$

Лемма 2. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система сходимости. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda > 0$ такое, что если $f(x) \in L_2$ и $\|f\| < \lambda$, то существует множество E_f, для которого выполняются условия*

$$E_f \subset [0,1], \quad \mu E_f > 1 - \varepsilon; \tag{2.1}$$

$$|S_n(x, f)| < \varepsilon \quad (x \in E_f, \ n = 1, 2, \cdots). \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормированная система сходимости и для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ утверждение леммы 2 нарушается. Пусть, далее, N_{i-1} $(i \geqslant 2)$ — некоторое натуральное число.

Выберем $\lambda_i > 0$ настолько малым, чтобы для некоторого множества Q_i, $Q_i \subset [0,1]$ и

$$\mu Q_i > 1 - \frac{\varepsilon_0}{4} \tag{2.3}$$

выполнялось условие

$$|S_{N_{i-1}}(x, g)| < \frac{\varepsilon_0}{4} \quad (x \in Q_i) \tag{2.4}$$

для всех функций $g(x) \in L_2$, удовлетворяющих неравенству

$$\|g(x)\| < \lambda_i. \tag{2.5}$$

В силу обратного допущения можно найти функцию $f_i(x) \in L_2$ такую, что

---

* См. [6], стр. 86 или [12], стр. 167.

$$\|f_i\| < \lambda_i \tag{2.6}$$

и

$$\mu \{x: \sup_n |S_n(x, f_i)| > \varepsilon_0\} > \varepsilon_0.$$

Отсюда следует, что существуют измеримое множество A_i и натуральное число $N_i (N_i > N_{i-1})$, удовлетворяющие условиям

$$\mu A_i > \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{2.7}$$

и

$$\sup_{n < N_i} |S_n(x, f_i)| > \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad (x \in A_i). \tag{2.8}$$

Обозначим

$$B_i = A_i \cap Q_i. \tag{2.9}$$

Тогда в силу неравенств (2.3) и (2.7) будет

$$\mu B_i > \frac{\varepsilon_0}{4}, \tag{2.10}$$

а из (2.6), (2.4), (2.8) и (2.9) получим

$$\sup_{N_{i-1} < n < N_i} \left| \sum_{j=N_{i-1}+1}^{n} a_j(f_i)\, \varphi_j(x) \right| > \frac{\varepsilon_0}{4} \quad (x \in B_i). \tag{2.11}$$

Относительно числа N_i применимы те же рассуждения, которые были применены к числу N_{i-1} для определения чисел λ_i и N_i, функции $f_i(x)$ и множества B_i, удовлетворяющих условиям (2.6), (2.10) и (2.11); только в этих рассуждениях нужно заменить i на $i+1$.

Таким образом, можно считать, что построены последовательности натуральных чисел $\{N_i\}_1^\infty$ $(N_1 < N_2 < \cdots)$, положительных чисел $\{\lambda_i\}_2^\infty$, функций $\{f_i(x)\}_2^\infty$ и множеств $\{B_i\}_2^\infty$, для которых выполняются (2.6), (2.10) и (2.11) $(i=2, 3, \cdots)$. От последовательности $\{\lambda_i\}_2^\infty$, очевидно, можно потребовать также выполнение условия

$$\sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i^2 < +\infty. \tag{2.12}$$

Отсюда и из (2.6) $(i=2, 3, \cdots)$ получим

$$\sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} a_j^2(f_i) \leqslant \sum_{i=2}^{\infty} \|f_i\|^2 < \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i^2 < +\infty. \tag{2.13}$$

Обозначим

$$B = \lim_{i>1} \sup B_i, \tag{2.14}$$

и, учитывая (2.11), заметим, что ряд

$$\sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} a_j(f_i)\, \varphi_j(x)$$

расходится на множестве B, которое в силу (2.14) и (2.10) имеет положительную меру.

Отсюда и из (2.13) следует, что $\{\varphi_n(x)\}$ не является системой сходимости, а это противоречит условию леммы.

Лемма 3. *Если полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством локализации в классе L_2, то для всякого $\varepsilon>0$ и любого отрезка $[a, b]\subset[0, 1]$ существуют $\delta>0$ и множество E,*

$$E\subset C[a, b],\ \mu E>\mu C[a, b]-\varepsilon \tag{2.15}$$

такие, что если $g(x)\in L_2$, $g(x)=0$ при $x\overline{\in}[a, b]$ и $\|g\|<\delta$, то выполняются неравенства

$$|S_n(x, g)|<\varepsilon\quad (x\in E,\ n=1, 2,\cdots). \tag{2.16}$$

Доказательство. Пусть

$$F\subset[0, 1],\ \mu F>1-\frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.17}$$

$$|\varphi_i(x)|<M_i\quad (x\in F,\ i=1, 2,\cdots), \tag{2.18}$$

где $\{M_i\}$ — некоторая последовательность положительных чисел. В силу (2.17) множество

$$E\equiv\left[F-\left(a-\frac{\varepsilon}{6},\ b+\frac{\varepsilon}{6}\right)\right]\cap\left[\frac{\varepsilon}{6},\ 1-\frac{\varepsilon}{6}\right] \tag{2.19}$$

удовлетворяет условию (2.15).

Допуская, что для этого множества ни при каком $\delta>0$ не выполняются требования леммы 3, установим существование функции $F(x)\in L_2$, $F(x)=0$ при $x\overline{\in}[a, b]$, для которой в одном из интервалов $(0, a)$ и $(b, 1)$ нарушается свойство локализации.

Итак, пусть для множества E, определенного равенством (2.19), нельзя определить $\delta>0$, обладающее указанными в лемме 3 свойствами.

Взяв произвольное число $\delta_1>0$, можно найти функцию $f_1(x)\in L_2$, натуральное число p_1 и точку $x_1\in E$, для которых справедливы следующие условия:

$$f_1(x)=0 \text{ при } x\overline{\in}[a, b],\quad \|f_1(x)\|<\delta_1, \tag{2.20}$$

$$|S_{p_1}(x_1, f_1)|>\varepsilon. \tag{2.21}$$

Учитывая (2.19) и первую часть (2.20) и применяя свойство локализации, можно определить натуральное число $q_1>p_1$ такое, что

$$|S_\nu(x, f_1)|<\frac{\varepsilon}{2^2}\quad (x\in E,\ \nu>q_1). \tag{2.22}$$

Предполагая, что натуральное число q_{i-1} определено $(i\geqslant 2)$, возьмем $\delta_i>0$ такое, что

$$\delta_i<\frac{\varepsilon}{2^{i+1}\sqrt{q_{i-1}}\max\limits_{k<q_{i-1}} M_k}. \tag{2.23}$$

Вследствие обратного допущения найдутся функция $f_i(x) \in L_2$, точка $x_i \in E$ и натуральное число p_i, удовлетворяющие условиям:

$$f_i(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in} [a, b], \ \|f_i\| < \delta_i, \tag{2.24}$$

$$|S_{p_i}(x_i, f_i)| > \varepsilon. \tag{2.25}$$

Из (2.18), (2.19), (2.23) и из неравенства в (2.24) получим

$$|S_\mu(x, f_i)| \leqslant \sum_{k=1}^{q_{i-1}} |a_k(f_i)| \, |\varphi_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{q_{i-1}} |a_k(f_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{q_{i-1}} |\varphi_k(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \|f_i(x)\| \cdot \sqrt{q_{i-1}} \cdot \max_{k \leqslant q_{i-1}} M_k \leqslant \delta_i \sqrt{q_{i-1}} \max_{k \leqslant q_{i-1}} M_k < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \tag{2.26}$$

$$(x \in E, \ \mu \leqslant q_{i-1}).$$

Из неравенств (2.25) и (2.26) следует, что $p_i > q_{i-1}$.

Далее, в силу свойства локализации, учитывая равенство в (2.24) и определение множества E, можно найти натуральное число $q_i > p_i$, обладающее следующим свойством:

$$|S_\nu(x, f_i)| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \tag{2.27}$$

$$(x \in E, \ \nu > q_i).$$

Относительно полученного числа q_i применимы те же рассуждения, которые были применены к числу q_{i-1}, для определения удовлетворяющей условиям (2.24), (2.25), (2.26) и (2.27) функции f_i, только в этих рассуждениях нужно заменить i на $i+1$.

С другой стороны, на первом шагу уже была определена функция $f_1(x)$, удовлетворяющая условиям (2.20), (2.21) и (2.22), которые аналогичны условиям (2.24), (2.25) и (2.27).

Таким образом, можно определить последовательности чисел $\{\delta_i\}$, $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$, функций $\{f_i\}$ и последовательность точек $\{x_i\}$

$$x_i \in E \quad (i = 1, 2, \cdots), \tag{2.28}$$

для которых справедливы (2.24), (2.25) и (2.27) ($i = 1, 2, \cdots$), (2.23) и (2.26) ($i = 2, 3, \cdots$), причем $p_i < q_i < p_{i+1}$ ($i = 1, 2, \cdots$).

Учитывая (2.23) и второе из условий (2.24), имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\| < +\infty. \tag{2.29}$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ сходится в пространстве L_2 к некоторой функции $F(x) \in L_2$. В силу этого будем иметь

$$a_k(F)=\sum_{l=1}^{\infty} a_k(f_l) \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{2.30}$$

Исходя из этих равенств, а также используя неравенства (2.25), (2.26) и (2.27), получим

$$|S_{p_i}(x_i, F)| > |S_{p_i}(x_i, f_i)| -$$

$$-\sum_{l=1}^{i-1} |S_{p_l}(x_i, f_l)| - \sum_{l=i+1}^{\infty} |S_{p_l}(x_i, f_l)| >$$

$$> \varepsilon - \sum_{l=1}^{i-1} \frac{\varepsilon}{2^{l+1}} - \sum_{l=i+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{l+i}} > \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.31}$$

$$(i=2, 3, \cdots).$$

Учитывая (2.19) и то обстоятельство, что согласно (2.24)

$$F(x)=0 \text{ при } x \bar{\in} [a, b],$$

мы видим, что неравенства (2.31) противоречат свойству локализации системы $\{\varphi_n(x)\}$. Тем самым лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *полная ортонормированная система сходимости, обладающая свойством локализации в классе* L_2. *Пусть, далее,* $\varepsilon < 1$ *и* λ — *произвольные положительные числа, а* $\delta > 0$ — *число, определенное равенством*

$$\delta^2 = \frac{\varepsilon\lambda^2}{64}. \tag{2.32}$$

Тогда каковы бы ни были отрезок $[a, b] \subset (0,1)$ *и измеримая функция* $f(x)$,

$$f(x)=0 \text{ при } x \bar{\in} [a, b] \text{ и } |f(x)| < \delta \text{ при } x \in [0, 1], \tag{2.33}$$

и каковы бы ни были натуральное число N *и положительное* η, *существуют измеримые множества* R *и* G *и полином вида* $\sum_{n=N+1}^{L} a_n\varphi_n(x)$ $(L > N)$, *для которых выполняются следующие условия:*

$$\sum_{j=N+1}^{L} a_j^2 < \frac{\lambda^2}{4}(b-a), \tag{2.34}$$

$$\left|\sum_{l=N+1}^{L} a_l\varphi_l(x) - f(x)\right| < \eta \quad (x \in R), \tag{2.35}$$

$$R \subset [a, b], \ \mu R > \mu[a, b] - \frac{\varepsilon}{4}\mu[a, b], \tag{2.36}$$

$$\left|\sum_{l=N+1}^{r} a_l\varphi_l(x)\right| < \eta \ (x \in G, \ N < r \leqslant L), \tag{2.37}$$

$$G \subset C[a, b], \ \mu G > \mu C[a, b] - \eta. \tag{2.38}$$

Доказательство. Пусть выполняются все условия леммы. Применяя лемму 3, когда в ее формулировке положено $\varepsilon = \frac{\eta}{4}$, определим множество E

$$E \subset C[a, b], \ \mu E > \mu C[a, b] - \frac{\eta}{4} \tag{2.39}$$

и число $\sigma > 0$ такие, что для всякой функции $g(x) \in L_2$, удовлетворяющей условиям

$$g(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in} [a, b] \text{ и } \|g\| < \sigma, \tag{2.40}$$

выполнялось неравенство

$$|S_r(x, g)| < \frac{\eta}{4} \ (x \in E, \ r = 1, 2, \cdots). \tag{2.41}$$

Разделим теперь отрезок $[a, b]$ на непересекающиеся равные отрезки $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s$ такие что

$$\mu \Delta_i < \frac{\varepsilon \sigma^2}{16 \delta^2} \quad (i = 1, 2, \cdots, s) \tag{2.42}$$

и рассмотрим функции

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Delta_i \\ 0, & x \overline{\in} \Delta_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, s). \tag{2.43}$$

Отметим, что в силу второго соотношения (2.33)

$$\|f_i\|^2 = \int\limits_{\Delta_i} f^2(x)\, dx < \delta^2 \mu \Delta_i. \tag{2.44}$$

Для удобства изложения сначала покажем следующее свойство функций $\{f_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$:

А) Для каждой функции $f_i(x)$ и для всякого натурального N_i существуют полином вида

$$\sum_{k = N_i + 1}^{L_i} a_k \varphi_k(x) \quad (L_i > N_i) \tag{2.45}$$

и множества A_i и B_i, обладающие свойствами

$$\left| \sum_{j = N_i + 1}^{L_i} a_j \varphi_j(x) - f_i(x) \right| < \frac{\eta}{2} \mu \Delta_i \ (x \in A_i), \tag{2.46}$$

$$A_i \subset [0,1], \ \mu A_i > 1 - \frac{\varepsilon}{4} \mu \Delta_i, \tag{2.47}$$

$$\left| \sum_{j = N_i + 1}^{r} a_j \varphi_j(x) \right| < \frac{\eta}{2} \ (x \in B_i, \ N_i < r \leqslant L_i), \tag{2.48}$$

$$B_l \subset E,\ \mu B_l > \mu E - \frac{\eta}{2}\,\mu\Delta_l. \tag{2.49}$$

$$\left|\sum_{l=N_l+1}^{L_l} a_l\varphi_l(x)\right| < \frac{\eta}{2}\,\mu\Delta_l \quad (x \in B_l), \tag{2.50}$$

$$\sum_{l=N_l+1}^{L_l} a_l^2 < \frac{\lambda^2}{4}\,\mu\Delta_l. \tag{2.51}$$

Пусть множество Q_1 и число M определены так, что

$$Q_1 \subset [0,\ 1],\ \mu Q_1 > 1 - \frac{\eta}{4}\,\mu\Delta_l, \tag{2.52}$$

$$|\varphi_k(x)| < M \quad (x \in Q_1\ 1 \leqslant k \leqslant N_l). \tag{2.53}$$

Применим лемму 1 к набору функций $f_l(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots, \varphi_{N_l}(x)$ $x \in \Delta_l)$, полагая в ее формулировке

$$\Delta \equiv \Delta_l,\ N \equiv N_l,\ \varepsilon_0 \equiv \frac{\varepsilon}{8},\ \varepsilon \equiv \frac{\eta\mu\Delta_l}{4MN_l}.$$

Вследствие этого можно найти функцию $f_l^*(x)$ и множество Q_2, для которых, согласно условиям a), b) и c) (см. лемму 1), справедливы следующие соотношения:

$$f_l^*(x) = f_l(x) \quad (x \in Q_2 \cup C\Delta_l), \tag{2.54}$$

$$Q_2 \subset \Delta_l,\ \mu Q_2 > \mu\Delta_l\left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right), \tag{2.55}$$

$$\|f_l^*\|^2 \leqslant \frac{16}{\varepsilon}\|f_l\|^2, \tag{2.56}$$

$$|a_k(f_l^*)| < \frac{\eta\mu\Delta_l}{4MN_l} \quad (1 \leqslant k \leqslant N_l). \tag{2.57}$$

В силу (2.54), (2.56), (2.43), (2.44) и (2.42) получим

$$f_l^*(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in} [a,\ b],\ \|f_l^*\| < \sigma. \tag{2.58}$$

Так как эти условия вполне соответствуют условиям (2.40), то в силу (2.41) будем иметь

$$|S_r(x,\ f_l^*)| < \frac{\eta}{4} \quad (x \in E,\ r = 1,\ 2, \cdots). \tag{2.59}$$

С другой стороны, согласно (2.57) и (2.53) можно написать

$$|S_{N_l}(x,\ f_l^*)| \leqslant \sum_{k=1}^{N_l} |a_k(f_l^*)|\,|\varphi_k(x)| \leqslant \frac{\eta}{4}\,\mu\Delta_l \tag{2.60}$$
$$(x \in Q_1).$$

Определим теперь множество Q_3 и натуральное число L_l так, чтобы

$$|S_{L_i}(x, f_i^*) - f_i^*(x)| < \frac{\eta}{4}\mu\Delta_i \quad (x \in Q_3), \tag{2.61}$$

$$Q_3 \subset [0,1], \ \mu Q_3 > 1 - \frac{\eta}{4}\mu\Delta_i. \tag{2.62}$$

Обозначим

$$a_k = a_k(f_i^*) \quad (N_i < k < L_i), \tag{2.63}$$

$$B_i = E \cap Q_1 \cap Q_3. \tag{2.64}$$

$$A_i = Q_1 \cap Q_3 \cap [Q_2 \cup C\Delta_i]. \tag{2.65}$$

Тогда в силу (2.52), (2.55) и (2.62) и в силу того, что, не нарушающая общности, можно было считать $\eta < \frac{\varepsilon}{4}$, получим (2.47) и (2.49).

Из (2.65), (2.54), (2.63), (2.61) и (2.60) при $x \in A_i$ получим

$$\left|\sum_{j=N_i+1}^{L_i} a_j\varphi_j(x) - f_i(x)\right| = \left|\sum_{j=1}^{L_i} a_j(f_i^*)\varphi_j(x) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{N_i} a_j(f_i^*)\varphi_j(x) - f_i^*(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{j=1}^{L_i} a_j(f_i^*)\varphi_j(x) - f_i^*(x)\right| + \left|\sum_{j=1}^{N_i} a_j(f_i^*)\varphi_j(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{4}\mu\Delta_i + \frac{\eta}{4}\mu\Delta_i = \frac{\eta}{2}\mu\Delta_i.$$

Неравенство (2.46) выполнено.

Соотношение (2.48) является следствием (2.64), (2.59) и (2.60). Учитывая теперь (2.63), (2.56), (2.44) и определение числа δ, получим

$$\sum_{j=N_i+1}^{L_i} a_j^2 < \|f_i^*\|^2 \leqslant \frac{16}{\varepsilon}\|f_i\|^2 < \frac{16}{\varepsilon}\delta^2\mu\Delta_i = \frac{\lambda^2}{4}\mu\Delta_i.$$

Наконец, условие (2.50) получается из (2.64), (2.61) и (2.60), надо только заметить, что

$$f_i^*(x) = 0 \quad (x \in B_i, \ 1 \leqslant i \leqslant s).$$

Таким образом, свойство А) функций $\{f_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$ установлено.

Так как фигурирующие в формулировке свойства А) числа N_i произвольны, то полиномы (2.45) $(i=1, 2, \cdots, s)$, очевидно, можно определить таким образом, чтобы числа N_i, L_i удовлетворяли условию

$$N_1 = N, \ N_i = L_{i-1} \quad (i = 2, 3, \cdots, s). \tag{2.66}$$

Положим

$$L = L_s, \tag{2.67}$$

$$R=[a, b]\cap\bigcap_{i=1}^{s}A_i, \tag{2.68}$$

$$G=\bigcap_{i=1}^{s}B_i \tag{2.69}$$

и докажем, что множества R, G и полином

$$\sum_{j=N+1}^{L}a_j\varphi_j(x)\equiv\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=N_i+1}^{L_i}a_j\varphi_j(x) \tag{2.70}$$

удовлетворяют всем требованиям леммы 4. В самом деле, сложив неравенства (2.51) по i ($i=1, 2,\cdots, s$) и учитывая (2.66) и (2.67), получим (2.34). Условия (2.36) и (2.38) получаются при помощи (2.68), (2.69), (2.47), (2.49) и (2.39).

Учитывая теперь, что в силу (2.43)

$$f(x)=\sum_{i=1}^{s}f_i(x), \tag{2.71}$$

из (2.70), (2.68) и (2.46) получим

$$\left|\sum_{j=N+1}^{L}a_j\varphi_j(x)-f(x)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{s}\left|\sum_{j=N_i+1}^{L_i}a_j\varphi_j(x)-f_i(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{s}\frac{\eta}{2}\mu\Delta_i<\eta\quad(x\in R).$$

Таким образом, условие (2.35) доказано. Остается проверить выполнение (2.37). Пусть r — некоторое натуральное число, причем $N<r\leqslant L$. Тогда для некоторого k, $1\leqslant k\leqslant s$ будем иметь $N_k<r\leqslant L_k$. Поскольку

$$\left|\sum_{j=N+1}^{r}a_j\varphi_j(x)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\left|\sum_{j=N_i+1}^{L_i}a_j\varphi_j(x)\right|+$$

$$+\left|\sum_{j=N_k+1}^{r}a_j\varphi_j(x)\right|\quad(x\in[0, 1]), \tag{2.72}$$

то в силу (2.69), (2.50) и (2.48) имеем

$$\left|\sum_{j=N+1}^{r}a_j\varphi_j(x)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{\eta}{2}\mu\Delta_i+\frac{\eta}{2}<\eta\quad(x\in G).$$

Лемма 4 доказана.

Замечание к лемме 4. При доказательстве леммы 4 неравенство $|f(x)|<\delta$, где δ определяется равенством (2.32), используется только для установления условия (2.34). Для доказательства остальных условий леммы 4 условие $|f(x)|<\delta$ можно заменить более слабым $|f(x)|<M$, где на M уже не налагаются никакие ограничения вида (2.32). Таким

образом, по схеме доказательства леммы 4 можно доказать такую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *полная ортонормированная система, обладающая свойством локализации в классе* L_2, *а* $f(x)$ — *измеримая функция, равная нулю вне некоторого отрезка* $[a, b] \subset [0, 1]$ *и удовлетворяющая неравенству* $|f(x)| < M$, *где* $M > 0$ — *некоторое число. Тогда для любого натурального* N *и любого положительного* δ *существуют полином вида* $\sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x)$ *и множества* A *и* B *такие, что выполняются следующие условия:*

$$\left| \sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x) - f(x) \right| < \delta \quad (x \in A), \tag{2.73}$$

$$A \subset [a, b], \ \mu A > b - a - \delta, \tag{2.74}$$

$$\left| \sum_{j=N+1}^{r} a_j \varphi_j(x) \right| < \delta \quad (x \in B, \ N < r \leqslant L), \tag{2.75}$$

$$B \subset C[a, b], \ \mu B > \mu C[a, b] - \delta. \tag{2.76}$$

Лемма 6. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *полная ортонормированная система сходимости, обладающая свойством локализации в классе* L_2. *Тогда для любого положительного числа* $\varepsilon < 1$ *можно определить* $\delta > 0$ *такое, что каковы бы ни были измеримое множество* $E \subset [0, 1]$ *и измеримая функция* $f(x)$, *где*

$$f(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in} E \text{ и } |f(x)| < \delta \text{ при } x \in [0, 1], \tag{2.77}$$

и каковы бы ни были натуральное число N *и положительное число* η, *существуют измеримые множества* R *и* G *и полином вида*

$$\sum_{n=N+1}^{L} a_n \varphi_n(x) \quad (L > N), \tag{2.78}$$

для которых выполняются следующие условия:

$$\left| \sum_{j=N+1}^{r} a_j \varphi_j(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in R, \ N < r \leqslant L), \tag{2.79}$$

$$\left| \sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x) - f(x) \right| \leqslant \eta \ (x \in R), \tag{2.80}$$

$$R \subset E, \ \mu R > \mu E - \varepsilon, \tag{2.81}$$

$$\left| \sum_{j=N+1}^{r} a_j \varphi_j(x) \right| < \eta \quad (x \in G, \ N < r \leqslant L), \tag{2.82}$$

$$G \subset CE, \ \mu G > \mu CE - \eta. \tag{2.83}$$

Доказательство. Пусть число $\lambda>0$ определено в зависимости от $\frac{\varepsilon}{4}$, согласно лемме 2. Докажем, что

$$\delta=\frac{\sqrt{\varepsilon}\,\lambda}{8} \tag{2.84}$$

удовлетворяет всем требованиям леммы 6.

Итак, пусть измеримая функция $f(x)$ и измеримое множество E удовлетворяют условиям

$$f(x)=0 \quad (x\in CE); \tag{2.85}$$

$$|f(x)|<\delta \quad (x\in[0,1]), \tag{2.86}$$

а N и η — числа, фигурирующие в формулировке леммы.

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\eta<\lambda<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.87}$$

Определим конечное число непересекающихся замкнутых интервалов $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \cdots, [a_s, b_s]$, лежащих внутри $[0, 1]$ так, чтобы выполнялись условия

$$\mu\left\{\bigcup_{i=1}^{s}[a_i, b_i]-E\right\}<\frac{\eta}{2}, \tag{2.88}$$

$$\mu\left\{E-\bigcup_{i=1}^{s}[a_i, b_i]\right\}<\frac{\eta}{2}. \tag{2.89}$$

Возьмем положительные числа $\eta_i\,(i=1, 2,\cdots, s)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{s}\eta_i<\frac{\eta}{2s}. \tag{2.90}$$

Обозначим

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a_i, b_i]\\ 0, & x\,\overline{\in}\,[a_i, b_i]\end{cases} \quad (i=1, 2,\cdots, s). \tag{2.91}$$

Последовательным применением леммы 4*, предварительно полагая в ее формулировке $[a, b]\equiv[a_i, b_i]$, $\eta\equiv\eta_i$ и $f(x)\equiv f_i(x)$ $(i=1, 2,\cdots, s)$, можно определить полиномы

$$\sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k\varphi_k(x) \quad (i=1, 2,\cdots, s) \tag{2.92}$$

и множества R_i и G_i $(i=1, 2,\cdots, s)$ так, чтобы

$$N_0=N,\ N_0<N_1<\cdots<N_s, \tag{2.93}$$

$$\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} a_j^2<\frac{\lambda^2}{4}(b_i-a_i), \tag{2.94}$$

---

* Лемму 4 можно применять, так как число δ определено равенством (2.84), совпадающим с (2.32).

$$\left| \sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} a_j \varphi_j(x) - f_l(x) \right| < \eta_l \quad (x \in R_l), \tag{2.95}$$

$$R_l \subset [a_l,\ b_l],\ \mu R_l > \mu [a_l,\ b_l] \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right), \tag{2.96}$$

$$\left| \sum_{j=N_{l-1}+1}^{r} a_j \varphi_j(x) \right| < \eta_l \quad (x \in G_l,\ N_{l-1} < r \leqslant N_l), \tag{2.97}$$

$$G_l \subset C [a_l,\ b_l],\ \mu G_l > \mu C [a_l,\ b_l] - \eta_l. \tag{2.98}$$

Обозначим

$$L = N_s \tag{2.99}$$

и рассмотрим полином

$$\sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x) \equiv \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} a_j \varphi_j(x). \tag{2.100}$$

Учитывая условие (2.94), получим

$$\left\| \sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x) \right\| = \left(\sum_{l=1}^{s} \sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\lambda}{2}. \tag{2.101}$$

ПА-13623

Так как $\frac{\varepsilon}{4}$ и λ удовлетворяют условиям леммы 2, то неравенство (2.101) позволяет применить эту лемму к функции (2.100). Следовательно существует множество F такое, что

$$F \subset [0,\ 1],\ \mu F > 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \tag{2.102}$$

$$\left| \sum_{j=N+1}^{r} a_j \varphi_j(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (x \in F,\ N < r \leqslant L). \tag{2.103}$$

Докажем, что множества

$$R \equiv E \cap F \cap \bigcup_{l=1}^{s} \left(R_l \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{s} G_j \right), \tag{2.104}$$

$$G \equiv \bigcap_{l=1}^{s} G_l - E \tag{2.105}$$

и полином (2.100) удовлетворяют требованиям леммы 6.

В силу условий (2.96), (2.98) и (2.90) получим

$$\mu \left(R_l \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{s} G_j \right) > \mu [a_l,\ b_l] - \frac{\eta}{2s} - \frac{\varepsilon}{4} \mu [a_l,\ b_l]$$

$$(l = 1,\ 2, \cdots, s).$$

Отсюда следует, что

$$\mu \bigcup_{l=1}^{s}\Big(R_l \cap \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{s} G_j\Big) > \mu \bigcup_{l=1}^{s} [a_l,\ b_l] - \frac{\eta}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Так как множество в левой части последнего неравенства входит во множество в правой части, то

$$\mu\left\{E \cap \bigcup_{l=1}^{s}\Big(R_l \cap \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{s} G_j\Big)\right\} > \mu\left\{E \cap \bigcup_{l=1}^{s} [a_l, b_l]\right\} - \frac{\eta}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Отсюда, в силу (2.89), (2.87), (2.104) и (2.102), заключаем, что

$$\mu R > \mu E - \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} > \mu E - \varepsilon.$$

Этим условие (2.81) получено.

Из (2.105), (2.98), (2.90) и (2.88) получим (2.83). Условие (2.79) следует из (2.103) и (2.104). С помощью (2.97), (2.105) и (2.90) получим (2.82).

Пусть теперь $x \in R$, тогда для некоторого i_0 $(1 \leqslant i_0 \leqslant s)$ будет: $x \in R_{i_0}$ и $x \in G_i$ $(i \neq i_0,\ 1 \leqslant i \leqslant s)$, так что в силу (2.95), (2.97), (2.90) и (2.91)

$$\left|\sum_{j=N+1}^{L} a_j\varphi_j(x) - f(x)\right| \leqslant \left|\sum_{j=N_{l_0-1}+1}^{N_{l_0}} a_j\varphi_j(x) - f_l(x)\right| +$$

$$+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq l_0}}^{s}\left|\sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} a_j\varphi_j(x)\right| < \eta_{l_0} + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq l_0}}^{s}\eta_l \leqslant \eta.$$

Таким образом, лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *полная ортонормированная система, обладающая свойством локализации в классе* L_2, *а* $f(x)$ — *почти везде конечная измеримая функция, равная нулю вне некоторого измеримого множества* E. *Тогда для любого натурального* N_0 *и положительного* δ *существуют полином по системе* $\{\varphi_n(x)\}$ *вида*

$$\sum_{j=N_0+1}^{L} a_j\varphi_j(x)$$

и множества A *и* B *такие, что выполняются следующие условия:*

$$A \subset E,\ \mu A > \mu E - \delta, \tag{2.106}$$

$$B \subset CE,\ \mu B > \mu CE - \delta, \tag{2.107}$$

$$\left|\sum_{j=N_0+1}^{L} a_j\varphi_j(x) - f(x)\right| < \delta \quad (x \in A), \tag{2.108}$$

$$\left|\sum_{j=N_0+1}^{r} a_j\varphi_j(x)\right| < \delta \quad (x \in B,\ N_0 < r \leqslant L). \tag{2.109}$$

Доказательство. Определим конечное число непересекающихся замкнутых интервалов $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_s, b_s]$, лежащих внутри $(0,1)$, так, чтобы выполнялись условия:

$$\mu\left\{\bigcup_{i=1}^{s}[a_i, b_i]-E\right\}<\frac{\delta}{2},\quad \mu\left\{E-\bigcup_{i=1}^{s}[a_i, b_i]\right\}<\frac{\delta}{2}. \tag{2.110}$$

Из формулировки леммы следует, что, не нарушая общности, функцию $f(x)$ можно считать ограниченной.

Возьмем положительные числа δ_i $(i=1, 2,\cdots, s)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{s}\delta_i<\frac{\delta}{2s}$$

и положим

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a_i, b_i]\\ 0, & x\overline{\in}[a_i, b_i]\end{cases}\quad (i=1, 2,\cdots, s).$$

Применяя лемму 5, полагая в ее формулировке $[a, b]\equiv[a_i, b_i]$, $\delta=\delta_i$, $f(x)=f_i(x)$ $(i=1, 2,\cdots, s)$, мы можем определить полиномы $\sum\limits_{-N_{i-1}+1}^{N_i} a_j\varphi_j(x)$ и множества A_i и B_i $(i=1, 2,\cdots, s)$ так, чтобы выполнялись условия вида (2.73)—(2.76) леммы 5.

Нетрудно убедится, что полином

$$\sum_{j=N_0+1}^{L} a_j\varphi_j(x)\equiv\sum_{i=1}^{s}\ \sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} a_j\varphi_j(x)$$

и множества

$$A=E\cap\bigcup_{i=1}^{s}\left(A_i\cap\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}B_j\right),\quad B=\bigcap_{i=1}^{s}B_i-E$$

удовлетворяют требованиям леммы 7.

Теорема 1 легко следует из лемм 6 и 7 и ее доказательство можно провести, повторяя рассуждения, приведенные в [3] (стр. 648—659). При этом следует заменить в этих рассуждениях леммы 4 и 5 работы [3] (см. стр. 631 и 633) аналогичными им леммами 7 и 6 настоящей работы.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и оказанную помощь при ее решении.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 20.VII.1970

Ռ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ. Լրիվ օրթոնորմալ զուգամիտության սիստեմների շարքերով չափելի ֆունկցիաների ներկայացման մասին (*ամփոփում*)։

Ներկա աշխատանքում չափելի ֆունկցիաները եռանկյունաչափական շարքերով ներկայացման մասին Դ. Ե. Մենշովի թեորեմը տարածված է որոշակի լոկալիզացիայի հատկությամբ օժտված օրթոնորմալ սիստեմների մի դասի վրա։

R. S. DAVTIAN. *On representation of measurable functions by the series by complete orthonormal systems of convergence* (summary)

The theorem of D. E. Menshow on representation of measurable functions by trigonometric series is extended to a class of orthonormal systems, pocessing certain localisation properties.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Е. Меньшов*. Sur la representation des fonctions mesurables par des series trigonometriques, Матем. сб., 9 (51), 1941, 667—692.
2. *Д. Е. Меньшов*. О сходимости по мере тригонометрических рядов, Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, т. 32, 1950.
3. *А. А. Талалян*. Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, 1963, 621—660.
4. *Л. Карлесон*. О сходимости рядов Фурье и о росте их частных сумм, Математика, сб. пер., 11: 4, 1967, 111—132.
5. *Д. Е. Меньшов*. Sur la convergence uniforme des series de Fourier, Матем. сб., II (53), 1942, 67—96.
6. *А. А. Талалян*. Представление измеримых функций рядами, УМН, XV, вып. 5 (95), 1960, 77—141.
7. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз*. Теория ортогональных рядов, М., 1958, стр. 155.
8. *Дж. Сансоне*. Обыкновенные дифференциальные уравнения, том I, ИЛ, 1953, стр. 219.
9. *P. Billard*. Sur la convergence presque partout des series de Fourier—Walsh des fonctions de l'espasc $L^2(0, 1)$, Studia Mathematica, XXVIII, № 3, 1967, 363—388.
10. *N. J. Fine*. On the Walsh functions, Trans Amer. Math. Soc., 65, 1949, 372—414.
11. *А. А. Талалян* и *Ф. Г. Арутюнян*. О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$, Мат. сб., 66 (108): 2, 1965, 240—247.
12. *Г. Алексич*. Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., ИЛ, 1963, стр. 167