ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 6, 1970 Математика

В. С. ЗАХАРЯН

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ ТИПА ДИРИХЛЕ

Введение

Рассмотрим класс D аналитических в единичном круге функций $f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n$, имеющих конечный интеграл Дирихле

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f'(z)|^2 \, dxdy = \sum_{1}^{\infty} n\, |a_n|^2 < \infty.$$

Если для класса аналитических и ограниченных в единичном круге функций можно утверждать только, что множество, где могут и не существовать радиальные предельные значения, имеет меру нуль, то для класса D можем утверждать больше. Действительно, используем следующую теорему: тригонометрический ряд $\Sigma\, a_n \cos nx + b_n \sin nx$, коэффициенты которого удовлетворяют условию $\Sigma\, (a_n^2 + b_n^2)\, n < \infty$, сходится всюду, кроме, быть может, некоторого множества E, логарифмическая емкость которого нуль.

Тогда получим, что функции класса D всюду на единичной окружности имеют радиальные предельные значения, кроме, быть может, некоторого множества E, логарифмическая емкость которого нуль.

Пусть $\{z_\nu\}$ $(0 < |z_\nu| < 1)$—некоторая последовательность точек в единичном круге. Для того чтобы существовала аналитическая и ограниченная функция в единичном круге, удовлетворяющая условиям $f(z_\nu) = 0$ и $f(0) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\Sigma\, (1 - |z_\nu|)$ сходился. Это условие только на последовательность $\{|z_\nu|\}$.

Для класса D ситуация меняется, необходимого и достаточного условия на $\{z_\nu\}$ не существует [1, 2]. Нас интересует следующий вопрос: когда последовательность $\{z_\nu\}$ точек единичного круга может стать множеством нулей некоторой функции $f \in D$ $(f \not\equiv 0)$?

Заметим прежде, что множество $\{z_\nu\}$ называется множеством единственности для класса D, если не существует функции $f \in D$ $(f \not\equiv 0)$, для которой $f(z_\nu) = 0$.

В 1952 г. Л. Карлесон показал [2], что если

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{-\log(1 - |z_\nu|)} \right)^{1-\varepsilon} < \infty$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, то существуют функции $f \in D$ $(f \not\equiv 0)$ и $f(z_\nu) = 0$.

Им было доказано также, что есть множество единственности $\{z_\nu\}$ для класса D, удовлетворяющее условию

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{-\log(1-|z_\nu|)}\right)^{1+\varepsilon} < \infty.$$

Было отмечено, что в том случае, когда все $\{z_\nu\}$ лежат на одном радиусе, для существования функций $f\in D\ (f\not\equiv 0)$ и $f(z_\nu)=0$ необходимо и достаточно условие $\Sigma(1-|z_\nu|)<\infty$.

В связи с этим замечанием интересен недавний результат Г. Каугран [3], который утверждает: существует последовательность $\{z_\nu\}$ $(0<|z_\nu|<1)$ со следующими свойствами: $\Sigma(1-|z_\nu|)<\infty$, $|z_\nu|\to 1$, не существует функции $f\in D\ (f\not\equiv 0)$, которая обращалась бы в нуль на этой последовательности.

Результаты Л. Карлесона, совершенно другим методом, а именно, существенно опираясь на то, что пространство D—гильбертовое, уточнили А. Шапиро и А. Шильдс в 1962 году [4]. Ими доказаны следующие теоремы.

Теорема А. Если $\{z_\nu\}$—последовательность точек в единичном круге, для которой

$$\sum \frac{1}{-\log(1-|z_\nu|)} < +\infty, \tag{1}$$

то существует функция $f\in D\ (f\not\equiv 0)$, которая становится нулем на точках этой последовательности.

Теорема В. Пусть $\varphi(t)$—непрерывная функция, для которой $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)>0$ $(t>0)$. Тогда существует множество единственности $\{z_\nu\}$ для класса D, удовлетворяющее условию

$$\sum \frac{1}{-\log(1-|z_\nu|)}\,\varphi(1-|z_\nu|) < +\infty.$$

В настоящей заметке изучаются классы аналитических в единичном круге функций $D_2(\omega)$, для которых исследуются граничные свойства и выше изложенные остальные вопросы аналогичными методами. Для функций этого класса вопросы, затронутые в теореме А, решаются другим образом: в условиях, аналогичных (1), функция Бляшке оказывается принадлежит классу $D_2(\omega)$.

§ 1. Определение класса $D_2(\omega)$ и граничное свойство функций этого класса

Обозначим через Ω множество функций $\omega(r)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(r)$ положительна, непрерывна и неубывающая на $[0,1)$,

2) $\omega(0)=1$, $\int\limits_0^1 \omega(r)\,dr<\infty$.

Мы скажем, что аналитическая в единичном круге функция $f(z)$, для которой $f(0)=0$, принадлежит классу $D_2(\omega)$, если

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} h(\rho)|f'(\rho e^{i\vartheta})|^2 \rho d\rho d\vartheta < +\infty, \tag{2}$$

где

$$h(x) = \int_x^1 \omega(t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{3}$$

Пусть $f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$, тогда условие (2) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} h(\rho)|f'(\rho e^{i\vartheta})|^2 \rho d\rho d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 h(\rho)\, d\rho \int_0^{2\pi} \sum_1^\infty |a_n|^2 n^2 \rho^{2n-1} d\vartheta =$$

$$= \sum_1^\infty |a_n|^2 W_\omega(n),$$

где

$$W_\omega(n) = n^2 \int_0^1 h(\rho) \rho^{2n-1} d\rho = \frac{n}{2}\int_0^1 \omega(x) x^{2n} dx.$$

Имеем ([5], лемма 2.1)

$$c_1 W_\omega(n) \leqslant n \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \omega(x)\, dx \leqslant c_2 W_\omega(n).$$

Следовательно, условие (2) равносильно следующему условию:

$$\sum |a_n|^2 nh\left(1-\frac{1}{n}\right) < \infty. \tag{2'}$$

Так как условие (2) равносильно условию (2′), то для функций класса $D_2(\omega)$ можно применить граничную теорему 1 работы [5]. Для этого приведем сначала следующие определения.

Последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}_0^\infty$ называется выпуклой, если она удовлетворяет условиям:

1) $\lambda_n \geqslant \lambda_{n+1}$, $\lambda_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$,

2) $\Delta^2\lambda_n = \lambda_n - 2\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} \geqslant 0$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$.

Если, кроме этого

$$\sum_0^\infty \lambda_n = +\infty,$$

то условимся говорить, что $\{\lambda_n\}_0^\infty \in R$.

Рассмотрим систему множеств $\{B\}$, измеримых по Борелю и лежащих на $[0,2\pi]$. Будем называть мерой μ всякую неотрицательную вполне аддитивную функцию множеств, определенную на $\{B\}$ и $\mu[0, 2\pi]=1$. Мы скажем, μ сосредоточена на B, если $\mu(B)=1$.

Пусть последовательность чисел $\{\lambda_n\}_0^\infty$ выпукла, тогда ряд

$$Q(x)=\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k \cos kx$$

сходится всюду на $[0, 2\pi]$ (кроме, быть может, точек $x=0$ и $x=2\pi$) к неотрицательной суммируемой функции $Q(x)$ ([6], гл. 1).

Положим

$$Q(r, x)=\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k r^k \cos kx \quad (0\leqslant r<1,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

тогда $Q(r, x)\geqslant 0$ как пуассоновская сумма от $Q(x)$. Полагая, наконец, что множество E измеримо по Борелю и что $\mu(E)=1$, рассмотрим функцию

$$V_\mu(x, r)=\int_0^{2\pi} Q(r, x-t)\, d\mu(t)$$

и, следуя К. В. Темко [7], введем следующее

Определение. Множество E, измеримое по Борелю, имеет положительную выпуклую емкость относительно последовательности $\{\lambda_n\}$, если при некоторой мере μ, сосредоточенной на E, имеем

$$V_\mu(E; \lambda_n)=\lim_{r\to 1-0}\sup\{\max_{0<x<2\pi} V_\mu(x, r)\}<+\infty.$$

Если же для любой меры μ, сосредоточенной на E

$$V_\mu(E; \lambda_n)=+\infty,$$

считаем, что выпуклая емкость E относительно $\{\lambda_n\}$ равна нулю.

Соответственно напишем $\operatorname{cap}\{E; \lambda_n\}>0$ и $\operatorname{cap}\{E; \lambda_n\}=0$.

Хорошо известные понятия логарифмической или α-емкости можно рассматривать как частные случаи выпуклой емкости, если последовательность $\{\lambda_n\}$ подобрать подходящим образом.

Теорема 1. *Пусть $f(z)\in D_2(\omega)$.*

а) *Если функция $h(t)$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^1\frac{dx}{h(x)}<+\infty,$$

то предел

$$\lim_{r\to 1-0} f(re^{i\theta})=f(e^{i\theta})$$

существует для всех $\theta\in[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества $E\subset[0, 2\pi]$, для которого

$$\operatorname{cap}\{E; \mu_n(\omega)\}=\operatorname{cap}\{E; \bar{\mu}_n(\omega)\}=0,$$

где

$$\mu_n(\omega)=\sum_{k=n}^{\infty}\left\{k^2\int_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\right\}^{-1}$$

$$(n=1, 2, \cdots)$$

$$\bar{\mu}_n(\omega)=\sum_{k=n}^{\infty}\left\{k^2\int_{1-\frac{1}{k}}^{1}\omega(x)\,dx\right\}^{-1}.$$

б) Если $\omega(x)\in\bar{\Omega}$, т. е. $\omega(x)\in\Omega$ и

$$0<\lim_{x\to 1-0}\inf\frac{(1-x)\,\omega'(x)}{\omega(x)}\leqslant\lim_{x\to 1-0}\sup\frac{(1-x)\,\omega'(x)}{\omega(x)}<1, \qquad (4)$$

то предел $f(e^{i\vartheta})$ существует для всех $\vartheta\in[0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества $E\subset[0,2\pi]$, для которого

$$\mathrm{cap}\,\{E;\lambda_n(\omega)\}=\mathrm{cap}\,\{E;\bar{\lambda}_n(\omega)\}=0,$$

где

$$\lambda_n(\omega)=\left\{n\int_0^1\omega(x)\,x^{n-1}dx\right\}^{-1}$$

$$(n=1, 2, \cdots)$$

$$\bar{\lambda}_n(\omega)=\left\{n\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\omega(x)\,dx\right\}^{-1}.$$

Последовательности $\mu_n(\omega)$, $\bar{\mu}_n(\omega)$, $\lambda_n(\omega)$ и $\bar{\lambda}_n(\omega)$ принадлежат классу R [5].

Приведем следующую общую теорему, которая доказана в книге [8].

Теорема С. Пусть $\Phi(t)\sim\Sigma\,\gamma_n\,e^{int}$ — некоторое ядро ($\gamma_n>0$), и E—замкнутое множество, емкость которого относительно ядра Φ равна нулю. При этих условиях существует ряд Фурье $\sum_1^{\infty} d_n\,e^{int}$ такой, что

$$\sum_1^{\infty}\frac{|d_n|^2}{\gamma_n}<\infty,$$

для которого сумма Пуассона-Абеля расходится к бесконечности для всех t, принадлежащих E.

Если применить эту теорему при $d_n=a_n$, и

$$\gamma_n=\left\{n\,.\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\omega(x)\,dx\right\}^{-1},$$

поскольку

$$\sum |a_n|^2 n \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} \omega(x)\, dx < \infty,$$

то $f(z) \in D_2(\omega)$.

Соединяя теорему 1 и C в этом случае, получим следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы существовала функция $f(z)$ из класса $D_2(\omega)$, которая на некотором замкнутом множестве E на окружности не имела бы радиальных предельных значений, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\operatorname{cap}\{E;\ \mu_n(\omega)\} = \operatorname{cap}\{E;\ \bar{\mu}_n(\omega)\} = 0$

при условии

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{h(x)} < \infty.$$

2) $\operatorname{cap}\{E;\ \lambda_n(\omega)\} = \operatorname{cap}\{E;\ \tilde{\lambda}_n(\omega)\} = 0$

при условии, что $\omega(x) \in \overline{\Omega}$.

§ 2. Множество единственности для функций класса $D_2(\omega)$

Пусть множество $\{z_\nu\}$ такое, что удовлетворяется условие

$$\sum h(|z_\nu|) < \infty. \tag{5}$$

При условии (5) в работе [5] доказано, что функция Бляшке $B(z)$ принадлежит классу $D_2(\omega)$, следовательно ,существует функция класса $D_2(\omega)$ со множеством нулей $\{z_\nu\}$.

Если, в частности, возьмем

$$\omega(x) = \frac{x^{1+\gamma}}{(1-x)\log^{1+\gamma}(1-x)^{-1}} \quad (0 < \gamma \leqslant 1),$$

то

$$c_1 h(x) \leqslant \left[\frac{1}{-\log(1-x)}\right]^{\gamma} \leqslant c_2 h(x)$$

и условие (5) запишется в виде

$$\sum \frac{1}{\log^{\gamma}(1-|z_\nu|)^{-1}} < \infty,$$

а условие (2′)

$$\sum |a_n|^2 \frac{n}{\log^{\gamma} n} < \infty.$$

В дальнейшем, предполагая, что функция $\omega(x) \in \overline{\Omega}$, докажем, что если последовательность $\{z_\nu\}$ более „плотна“, чем допускается условием (5), то она уже может стать множеством единственности для класса $D_2(\omega)$.

Теорема 3. *Если $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная функция, для которой $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)>0$ $(t>0)$, то существует множество единственности $\{z'_\nu\}$ для класса $D_2(\omega)$, удовлетворяющее условию*

$$\sum_1^\infty h(|z_\nu|)\,\varphi(1-|z_\nu|)<\infty. \tag{6}$$

Для $h(t)=t^{1-\alpha}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ теорема отмечена в работе [4]. Доказательство мы проведем аналогично приведенному в [4].

Пусть

$$f(z)=\sum_1^\infty a_n z^n \text{ и } g(z)=\sum_1^\infty b_n z^n$$

принадлежат классу $D_2(\omega)$.

Внутреннее произведение определяется следующим образом:

$$(f,g)=\sum_1^\infty a_n\bar{b}_n W_\omega(n),$$

что можно записать и в следующем виде:

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} h(\rho)f'(\rho e^{i\theta})\overline{g'(\rho e^{i\theta})}\,\rho d\rho d\theta.$$

При $f\equiv g$ получим

$$\|f\|^2=\sum_1^\infty |a_n|^2 W_\omega(n)<\infty.$$

Если обозначим через $K_\xi(z)$ функцию

$$K_\xi(z)=\sum_1^\infty\frac{(z\bar{\xi})^n}{W_\omega(n)},$$

то будем иметь

$$(f,K_\xi)=f(\xi)$$

для всех $f\in D_2(\omega)$ и для всех $|\xi|<1$.

Имеем также

$$\|K_\xi\|^2=(K_\xi,K_\xi)=K_\xi(\xi)=\sum_1^\infty\frac{|\xi|^{2n}}{W_\omega(n)}.$$

Обозначим через $C(\rho)$ следующую функцию:

$$C(\rho)=\sum_1^\infty\frac{\rho^n}{W_\omega(n)}\quad(0\leqslant\rho<1). \tag{7}$$

При условиях, наложенных на $\omega(x)$, в работе [5] доказано, что справедливо следующее неравенство:

$$C(\rho) \leqslant \frac{c}{h(\rho)} \quad (0 \leqslant \rho < 1). \tag{8}$$

Здесь и в дальнейшем через c обозначим абсолютные константы, не обязательно равные между собой.

Для доказательства теоремы 3 докажем сначала, как и в [4], следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть r — некоторое положительное число, меньшее единицы и пусть $z_1, z_2, \cdots, z_n$ — точки на окружности $|z| = r$, которые находятся на одинаковом расстоянии друг от друга. Если для любой $f \in D_2(\omega)$, $f(z_i) = 0$ $(i \leqslant n)$ и $f'(0) = 1$, то*

$$\|f\| \geqslant cnh(r^{2n}). \tag{9}$$

Доказательство. Возьмем $z_1 = r$ (норма не меняется при вращении). Пусть $H(z)$ определяется следующим образом:

$$H = \frac{1}{n}\left(\frac{K_1}{\bar{z}_1} + \cdots + \frac{K_n}{\bar{z}_n}\right),$$

где $K_n = K_{z_n}(z)$, и следовательно $(f, H) = 0$, и

$$1 = (f, z) = (f, z - H) \leqslant \|f\| \cdot \|z - H\|. \tag{10}$$

Имеем далее

$$H(z) - z = \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{nm+1}\, r^{nm+1}}{W_\infty(nm+1)}$$

и следовательно

$$\|H - z\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{2mn}}{m \int\limits_{1-\frac{1}{nm}}^{1} \omega(\rho)\, d\rho} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{2mn}}{m \int\limits_{1-\frac{1}{m}}^{1} \omega(\rho)\, d\rho} \leqslant \frac{c}{n} C(r^{2n}). \tag{11}$$

Согласно (8) получим из (11)

$$\|H - z\| \leqslant \frac{c}{nh(r^{2n})},$$

откуда, согласно (10), вытекает утверждение (9) леммы.

Лемма 2. *Пусть $n_k \to \infty$ — положительные целые числа, а $\delta_k \to 0$ — положительные числа, так что $n_k \delta_k \to 0$.*

Пусть $\psi(k)$ определяется так

$$\psi(k) = \frac{1}{n_k h(1 - \delta_k)}.$$

Тогда $\psi(k) \to 0$ в том случае, когда

$$\frac{1}{n_k\, h\left[(1 - \delta_k)^{n_k}\right]} \to 0.$$

Справедливость леммы очевидна, так как $1-\delta_k > (1-\delta_k)^{n_k}$ и следовательно $\frac{1}{h(1-\delta_k)} > \frac{1}{h[(1-\delta_k)^{n_k}]}$.

Теперь теорему 3 докажем так, как в работе [4]. Именно: возьмем две последовательности $\{r_k\}$ и $\{n_k\}$, где $n_k \to \infty$ — положительные целые числа и $0 < r_k < 1$, $r_k \to 1$. На окружности радиуса r_k возьмем n_k точек, равноудаленных друг от друга. Совокупность этих точек должна быть множеством единственности для класса $D_2(\omega)$.

Пусть $1-r_k = \delta_k$ и $\psi(k) = \frac{1}{n_k h(1-\delta_k)}$, где $\psi(k)$ и n_k удовлетворяют следующим условиям:

1) $\psi(k) \to 0$,

2) $n_k \delta_k \to 0$,

3) $\sum \frac{\varphi(\delta_k)}{\psi(k)} < +\infty$.

Это будет достаточно для доказательства теоремы, так как из 1) и 2) согласно леммам 1 и 2 следует, что $\{z_n\}$—множество единственности, а 3) эквивалентно условию (6).

Остается показать, что существуют $\psi(k)$ и n_k, удовлетворяющие условиям 1)—3).

Заметим, что из условия (4) имеем, что существует такое ε $(0 < \varepsilon < 1)$, что $h(x) > c(1-x)^{1-\varepsilon}$. Пусть $g(y) = \varphi\left(\frac{1}{y}\right)$, тогда $g \to 0$ при $y \to \infty$. Пусть $y_1 < y_2 < \cdots$ — целые числа такие, что $y_k > k$ и $g(y) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$ при $y > y_k$. Пусть также $n_k = E\left(k^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right) y_k$, где $E(t)$—целая часть t и $\psi(k) = \frac{1}{k^{1-\varepsilon}}$. Имеем $\delta_k \leqslant \frac{c}{[n_k\psi(k)]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}$, откуда получим $n_k\delta_k \leqslant$

$$\leqslant \frac{cn_k}{[n_k\psi(k)]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} \leqslant \frac{c\cdot k}{n_k^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}} \leqslant \frac{c}{y_k} \to 0.$$

Имеем также

$$\sum \frac{\varphi(\delta_k)}{\psi(k)} \leqslant \sum \frac{g\left(\frac{1}{\delta_k}\right)}{\psi(k)} \leqslant \sum \frac{g\left[(n_k\psi(k))^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\right]}{\psi(k)} \leqslant \sum \left(\frac{1}{2}\right)^k k^{1-\varepsilon} < \infty,$$

так что условие 3) также удовлетворяется. Этим завершается доказательство теоремы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР,
Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступило 13.XI.1970

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ. Դիրիխլեի տիպի սահմանափակ ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների եզրային հատկությունները և միակությունը (ամփոփում)

Դիտարկվում է միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների $D_2(\omega)$ *դասը, որոնց համար* $f(0)=0$ *և*

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} h(\rho)\,|f'(\rho e^{i\vartheta})|^2\rho\, d\rho\, d\vartheta < \infty,$$

որտեղ $h(x)=\int_x^1 \omega(t)\,dt$, *իսկ* $\omega(r)$ *ֆունկցիան չի նվազում* $[0,1]$ *հատվածում և բավարարում է որոշակի պայմանների։*

§ 1-ում բերվում է անհրաժեշտ և բավարար պայման $E\subset[0,2\pi]$ *փակ բազմության համար, որպեսզի գոյություն ունենա* $D_2(\omega)$ *դասին պատկանող ֆունկցիա, որը այդ բազմության կետերում չունենա շառավղային եզրային արժեքներ։*

§ 2-ում բերվում է թեորեմ $D_2(\omega)$ *դասի միակության բազմության մասին։*

V. S. ZAKARIAN. *Boundary properties and unique of functions with finite Dirichlet type integral* (summary)

Define $D_2(\omega)$ as the class of analytical in the unite circle functions $f(z)$, for which $f(0)=0$ and

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} h(\rho)\,|f'(\rho e^{i\vartheta})|^2\rho\, d\rho\, d\vartheta < \infty,$$

where $h(x)=\int_x^1 \omega(t)\,dt$, and $\omega(r)$ is nondecreasing function on $[0, 1]$, satisfying certain conditions.

In § 1 of closed sets $E\subset[0, 2\pi]$ described, such that for each E from the class there exists a function from $D_2(\omega)$ having no radial boundary values in the points of E.

A uniqueness theorem is proved in § 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *O. Lokki.* Über analytische Funktionen, deren Dirichlet integral endlich ist, und die in gegebenen Punkten Vorgeschriebene Werte annehmen, Ann. Acad. Sci. Fennicae, 39, 1—57, 1947.
2. *L. Carleson.* On the zeros of functions with bounded Dirichlet integral, Math. Z., 56, 1952, 289—295.
3. *A. Caughran.* Two results concerning the zeros of functions with finite Dirichlet integral, Canad. J. Math., 21, 1969, 312—316.
4. *H. Shapiro* and *A. Shields.* On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces, Math. Z., 80, 1962, 217—229.
5. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, 34, 1970, 1260—1336.
6. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961.
7. *К. В. Темко.* а) Выпуклая емкость и ряды Фурье, ДАН СССР, 110, № 6, 1956, б) О выпуклой емкости, Мат. сборник, 51 (93), № 2, 1960, 217—226.
8. *K. Pierre* and *R. Salem.* Emsembles parfaits et series trigonometriques, Paris, 1963.