

Н. О. СИНАНЫАН

ПРЕДЕЛЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПО МЕРЕ T -СРЕДНИХ ДЛЯ РЯДОВ ПО ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

§ 1. Вспомогательные утверждения

Пусть

$$T = \|a_{mk}\| \quad (1.1)$$

— линейный регулярный метод суммирования, то есть матрица (1.1) удовлетворяет условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{mk}| < H, \quad \text{где } H \text{ не зависит от } m, \quad (1.2)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mk} = 0 \quad \text{для каждого } k = 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} = 1. \quad (1.4)$$

Пусть далее

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (1.5)$$

есть ряд почти везде конечных измеримых функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \quad (1.6)$$

— его частные суммы.

Определение 1. Измеримая функция $F(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$, называется верхним пределом по мере T -средних ряда (1.5), определяемых матрицей (1.1), если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} S_k(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

сходятся по мере на отрезке $[a, b]$ к почти всюду конечным функциям, и их суммы

$$A_m(x, T) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} S_k(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

удовлетворяют условиям:

$$\alpha^{\circ}. \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes} \{E[A_m(x, T) > \varphi(x)] \cap E[\varphi(x) > F(x)]\} = 0$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$;

$$\beta^{\circ}. \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \text{mes} |E[A_m(x, T) > x(x)] \cap E[F(x) > x(x)]| > 0$$

для любой измеримой функции $x(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\text{mes} E[F(x) > x(x)] > 0$.

Определение 2. Измеримая функция $G(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$, называется нижним пределом по мере T -средних ряда (1.5), определяемых матрицей (1.1), если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} S_k(x), \quad m=1, 2, \dots$$

сходятся по мере на отрезке $[a, b]$ к почти всюду конечным функциям и их суммы

$$A_m(x, T) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} S_k'(x), \quad m=1, 2, \dots$$

удовлетворяют условиям:

$$\alpha^{\circ}. \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes} \{E[A_m(x, T) < \varphi(x)] \cap E[\varphi(x) < G(x)]\} = 0$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$;

$$\beta^{\circ}. \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \text{mes} |E[A_m(x, T) < x(x)] \cap E[G(x) < x(x)]| > 0$$

для любой измеримой функции $x(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\text{mes} E[G(x) < x(x)] > 0$.

Д. Меньшовым в работах [1] и [3] была установлена

Теорема 1. Пусть задан произвольный регулярный метод суммирования T с конечными строчками*, определяемый матрицей (1.1). Тогда для любых двух измеримых функций $F(x)$ и $G(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$G(x) \leq F(x),$$

почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ можно определить тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1.9)$$

обладающий следующими свойствами:

* Метод суммирования T называется методом с конечными строчками, если матрица (1.1), определяющая этот метод, удовлетворяет условию

$$a_{mk} = 0 \quad (k > n(m), \quad m = 1, 2, \dots),$$

где $n(m)$ — натуральные числа, вообще зависящие от m .

1) Если

$$A_m(x, T) \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (1.10)$$

являются T -средними ряда (1.9), определяемыми матрицей (1.1), то верхний предел по мере на $[-\pi, \pi]$ последовательности (1.10) равен $F(x)$, а нижний предел по мере на $[-\pi, \pi]$ той же последовательности равен $G(x)$;

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (1.11)$$

В настоящей работе, применяя две леммы, доказанные А. А. Талаляном в работе [2] и метод, несколько отличный от метода Д. Меньшова, устанавливается следующая

Теорема 2. Пусть заданы произвольный регулярный метод суммирования T , определяемый матрицей (1.1) и полная ортонормированная система функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на $[a, b]$. Тогда для любых двух измеримых функций $F(x)$ и $G(x)$, удовлетворяющих условию

$$G(x) \leq F(x), \quad (1.12)$$

почти всюду на сегменте $[a, b]$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (1.13)$$

обладающий следующими свойствами:

1) Верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности $A_m(x, T)$, $m=1, 2, \dots$ T -средних ряда (1.13) равен $F(x)$, а нижний предел по мере на $[a, b]$ той же последовательности равен $G(x)$;

2) Какова бы ни была измеримая функция $f(x)$, определенная на $[a, b]$ и почти всюду на этом сегменте удовлетворяющая условию

$$G(x) \leq f(x) \leq F(x),$$

существует последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \dots$ такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} A_{m_l}(x, T) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$;

$$3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0.$$

В основе доказательства теоремы 2 лежат следующие леммы (см. [2]).

Лемма 1. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ — полная ортонормированная система функций, определенных на $[a, b]$ и $f(x)$ — произвольная почти везде конечная измеримая функция, определенная на том же отрезке.

Для любого $\varepsilon > 0$ и целого положительного n можно определить множество $e_0 \subset [a, b]$ и действительные числа $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_m$ такие, что выполняются следующие условия:

- 1) $\text{mes } e_0 < \varepsilon;$
- 2) $|a_k| < \varepsilon \quad n+1 \leq k \leq m;$
- 3) $\left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{e_0} < \varepsilon;$
- 4) $\left\| \sum_{k=n+1}^s a_k \varphi_k(x) \right\|_e \leq \varepsilon + 2 \|f'(x)\|_e, \quad n+1 \leq s \leq m,$

где e — произвольное измеримое подмножество множества $se_0 = [a, b] - e_0^*$.

Лемма 2. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две измеримые функции, определенные на некотором множестве E_0 положительной меры и удовлетворяющие неравенству

$$G(x) < F(x)$$

почти всюду на E_0 .

Тогда существует последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на множестве E_0 и обладающих следующими свойствами:

$$1^\circ. \quad G(x) < f_n(x) < F(x)$$

почти всюду на множестве E_0 ;

2°. Для любой измеримой функции $f(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$G(x) \leq f(x) \leq F(x)$$

почти всюду на E_0 существует последовательность $p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{p_k}(x) = f(x)$$

почти всюду на множестве E_0 ;

3°. Для любого $\sigma > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } E[|f_{n+1}(x) - f_n(x)| > \sigma] = 0.$$

§ 2. Доказательство теоремы 2

Обозначим

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x: G(x) < F(x)\}, \\ E_2 &= \{x: G(x) = F(x) \neq \pm \infty\}, \\ E_3 &= \{x: G(x) = F(x) = \pm \infty\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

* Обозначаем

$$\left(\int_e f^2(x) dx \right)^{1/2} = \|f(x)\|_e.$$

Очевидно, что множества E_1 , E_2 и E_3 не пересекаются и $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{x: x \in [a, b], G(x) \leq F(x)\}$.

Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на множестве E_1 , для которых выполняются все условия леммы 2.

На множестве E_3 определим последовательность функций $\{\bar{f}_n(x)\}$ следующим образом:

$$\bar{f}_n(x) = \operatorname{sign}(F(x)) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Положим

$$Q_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{при } x \in E_1 \\ F(x) & \text{при } x \in E_2 \\ \bar{f}_n(x) & \text{при } x \in E_3. \end{cases} \quad (2.2)$$

Пусть последовательность непрерывных функций $\{\psi_n(x)\}$, определенных на $[a, b]$, удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{mes} E[|Q_n(x) - \psi_n(x)| > \sigma] = 0, \quad (2.3)$$

где σ — произвольное положительное число.

Легко видеть, что последовательность непрерывных функций $\{\psi_n(x)\}$ обладает следующими свойствами.

Для любой измеримой функции $f(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$G(x) \leq f(x) \leq F(x)$$

почти всюду на $[a, b]$ существует последовательность $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{n_k}(x) = f(x) \quad (2.4)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Для любого $\sigma > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{mes} E[|\psi_{n_{m+1}}(x) - \psi_{n_m}(x)| > \sigma] = 0, \quad (2.5)$$

и верхний и нижний пределы по мере последовательности $\{\psi_n(x)\}$ на $[a, b]$ равны, соответственно, $F(x)$ и $G(x)$.

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty. \quad (2.6)$$

Применяя лемму 1, где положено $f(x) = \psi_1(x)$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $n=1$, определим множество e_1 и действительные числа $c_1, c_2, \dots, c_{n_1}$ так, что

$$1) \operatorname{mes} e_1 < \varepsilon_1;$$

$$2) |c_k| < \varepsilon_1, \quad 1 \leq k \leq n_1;$$

$$3) \left\| \sum_{k=1}^{n_1} c_k \varphi_k(x) - \psi_1(x) \right\|_{ce_1} < \varepsilon_1;$$

$$4) \left\| \sum_{k=1}^s c_k \varphi_k(x) \right\|_e < \varepsilon_1 + 2 \|\psi_1(x)\|_e, \quad 1 \leq s \leq n_1,$$

где e — произвольное измеримое подмножество множества $ce_1 = [a, b] - e_1$.

Пользуясь условиями (1.2), (1.3) и (1.4), натуральные числа i_1 и $n(i_1) > n_1$ выберем настолько большими, чтобы выполнялись неравенства

$$\left(\sum_{k=1}^{n_1} c_k^2 \right)^{1/2} \cdot \sum_{j=1}^{n_1} |a_{i,j}| < \varepsilon_1 \quad \text{при } i > i_1, \quad (2.7)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n_1} c_k^2 \right)^{1/2} \left| 1 - \sum_{j=n_1+1}^{\infty} a_{i,j} \right| < \varepsilon_1 \quad \text{при } i \geq i_1, \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n_1} c_k^2 \right)^{1/2} \sum_{j=n(i_1)}^{\infty} |a_{i,j}| &< \varepsilon_2 && \text{при } i \leq i_1 \\ \sum_{j=n(i_1)}^{\infty} |a_{i,j}| &< \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + 2 \|\psi_2(x) - \sum_{k=1}^{n_1} c_k \varphi_k(x)\|_{[a,b]}} && \text{при } i \leq i_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Полагая

$$c_k = 0 \quad \text{при } n_1 < k \leq n(i_1), \quad (2.10)$$

легко видеть, что полином

$$\sum_{k=1}^{n(i_1)} c_k \varphi_k(x),$$

удовлетворяет условиям 2), 3) и 4), где $1 \leq s \leq n(i_1)$.

Предположим, что определены множества e_τ , числа i_τ , $n(i_\tau)$ и коэффициенты $c_1, \dots, c_{n(i_1)}, \dots, c_{n(i_{\tau-1})+1}, \dots, c_{n_\tau}, \dots, c_{n(i_\tau)}$.

В формулировке леммы 1 положим $f(x) = \psi_{\tau+1}(x) - \sum_{k=1}^{n(i_\tau)} c_k \varphi_k(x)$,

$\varepsilon = \varepsilon_{\tau+1}$, $n = n(i_\tau) + 1$ и определим множество $e_{\tau+1}$ и действительные числа $c_{n(i_\tau)+1}, \dots, c_{n_{\tau+1}}$ так, чтобы выполнялись условия

$$1^\circ. \text{mes } e_{\tau+1} < \varepsilon_{\tau+1};$$

$$2^\circ. |c_k| < \varepsilon_{\tau+1}, \quad n(i_\tau) < k \leq n_{\tau+1};$$

$$3^\circ. \left\| \sum_{k=1}^{n_{\tau+1}} c_k \varphi_k(x) - \psi_{\tau+1}(x) \right\|_{ce_{\tau+1}} < \varepsilon_{\tau+1};$$

$$4^\circ. \left\| \sum_{k=n(i_\tau)+1}^s c_k \varphi_k(x) \right\|_e \leq \varepsilon_{\tau+1} + 2 \left\| \psi_{\tau+1}(x) - \sum_{k=1}^{n(i_\tau)} c_k \varphi_k(x) \right\|_e,$$

где $n(i_\tau) < s \leq n_{\tau+1}$, а ε — произвольное измеримое подмножество множества $se_{\tau+1}$.

Учитывая условия (1.2), (1.3) и (1.4), выберем натуральные числа $i_{\tau+1} > i_\tau$ и $n(i_{\tau+1}) > n_{\tau+1}$ настолько большими, чтобы имели место неравенства

$$\left(\sum_{k=1}^{n_{\tau+1}} c_k^2 \right)^{1/2} \sum_{j=1}^{n_{\tau+1}} |a_{ij}| < \varepsilon_{\tau+1} \quad \text{при } i \geq i_{\tau+1}, \quad (2.11)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n_{\tau+1}} c_k^2 \right)^{1/2} \left| 1 - \sum_{j=n_{\tau+1}+1}^{\infty} a_{ij} \right| < \varepsilon_{\tau+1} \quad \text{при } i > i_{\tau+1}, \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{n_{\tau+1}} c_k^2 \right)^{1/2} \cdot \sum_{j=n(i_{\tau+1})}^{\infty} |a_{ij}| < \varepsilon_{\tau+2} \quad \text{при } i \leq i_{\tau+1} \\ & \sum_{j=n(i_{\tau+1})}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\varepsilon_{\tau+2}}{\varepsilon_{\tau+2} + 2 \left\| \psi_{\tau+2}(x) - \sum_{k=1}^{n_{\tau+1}} c_k \varphi_k(x) \right\|_{[a, b]}} \quad \text{при } i \leq i_{\tau+1} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Полагая

$$c_k = 0 \quad \text{при } n_{\tau+1} < k \leq n(i_{\tau+1}), \quad (2.14)$$

легко видеть, что полином

$$\sum_{k=n(i_{\tau+1})}^{n(i_{\tau+1})} c_k \varphi_k(x)$$

удовлетворяет условиям 2°, 3° и 4°, где $n(i_\tau) + 1 \leq s \leq n(i_{\tau+1})$.

Продолжая вышеуказанный процесс бесконечно, мы определим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (2.15)$$

и натуральные числа $i_1 < i_2 < \dots < i_\tau < \dots$; $n_1 < n_2 < \dots < n_\tau < \dots$; $n(i_1) < n(i_2) < \dots < n(i_\tau) < \dots$, удовлетворяющие условиям 1°, 2°, 3°, 4°, (2.11), (2.12), (2.13) и (2.14).

Докажем, что ряд (2.15) удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.

Сначала покажем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} S_j(x), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.16)$$

где $S_j(x) = \sum_{k=1}^j c_k \varphi_k(x)$ сходится по мере.

Пусть i — некоторое число. Выберем число τ так, чтобы $i_\tau \leq i < i_{\tau+1}$ (предполагаем $i_0 = 1$). Пусть далее $v > m > n(i_{\tau+1})$ — произвольные натуральные числа. Определим r и l следующими неравенствами:

$$n(i_r) \leq \nu < n(i_{r+1}), \quad n(i_l) \leq m < n(i_{l+1}). \quad (2.17)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=m+1}^{\nu} a_{lj} S_j(x) \right\|_{\bigcap_{q=l+1}^{r+1} ce_q} \leq \left\| \sum_{j=m+1}^{n(i_{l+1})} a_{lj} S_j(x) \right\|_{ce_{r+1}} + \\ & + \left\| \sum_{j=n(i_{l+1})+1}^{n(i_r)} a_{lj} S_j(x) \right\|_{\bigcap_{q=l+2}^r ce_q} + \left\| \sum_{j=n(i_r)+1}^{\nu} a_{lj} S_j(x) \right\|_{ce_{r+1}} = \\ & = \left\| \sum_{j=m+1}^{n(i_{l+1})} a_{lj} \left(S_{n(i_l)}(x) + \sum_{k=n(i_l)+1}^j c_k \varphi_k(x) \right) \right\|_{ce_{l+1}} + \\ & + \left\| \sum_{p=l}^{r-2} \sum_{j=n(i_{p+1})+1}^{n(i_{p+2})} a_{lj} \left(S_{n(i_{p+1})}(x) + \sum_{k=n(i_{p+1})+1}^j c_k \varphi_k(x) \right) \right\|_{\bigcap_{q=l+2}^r ce_q} + \\ & + \left\| \sum_{j=n(i_r)+1}^{\nu} a_{lj} \left(S_{n(i_r)}(x) + \sum_{k=n(i_r)+1}^j c_k \varphi_k(x) \right) \right\|_{ce_{r+1}}. \end{aligned}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=m+1}^{\nu} a_{lj} S_j(x) \right\|_{\bigcap_{q=l+1}^{r+1} ce_q} \leq \left\| S_{n(i_l)}(x) \right\|_{ce_{l+1}} \sum_{j=m+1}^{n(i_{l+1})} |a_{lj}| + \\ & + \sum_{j=m+1}^{n(i_{l+1})} |a_{lj}| \left\| \sum_{k=n(i_l)+1}^j c_k \varphi_k(x) \right\|_{ce_{l+1}} + \sum_{p=l}^{r-2} \left\| S_{n(i_{p+1})}(x) \right\|_{[a,b]} \sum_{j=n(i_{p+1})+1}^{n(i_{p+2})} |a_{lj}| + \\ & + \sum_{p=l}^{r-2} \sum_{j=n(i_{p+1})+1}^{n(i_{p+2})} |a_{lj}| \left\| \sum_{k=n(i_{p+1})+1}^j c_k \varphi_k(x) \right\|_{ce_{p+2}} + \\ & + \left\| S_{n(i_r)}(x) \right\|_{[a,b]} \sum_{j=n(i_r)+1}^{\nu} |a_{lj}| + \sum_{j=n(i_r)+1}^{\nu} |a_{lj}| \left\| \sum_{k=n(i_r)+1}^j c_k \varphi_k(x) \right\|_{ce_{r+1}}. \end{aligned}$$

Из соотношений $\nu > m \geq n(i_{r+1})$, $i_r \leq i < i_{r+1}$ и из (2.17) следует, что $i < i_l$.

Отсюда, в силу 4°, (2.13) и (2.14), получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=m+1}^{\nu} a_{lj} S_j(x) \right\|_{\bigcap_{q=l+1}^{r+1} ce_q} < \varepsilon_{l+1} + \left(\varepsilon_{l+1} + 2 \left\| \psi_{l+1}(x) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{k=1}^{n(i_l)} c_k \varphi_k(x) \right\|_{ce_{l+1}} \right) \frac{\varepsilon_{l+1}}{\left(\varepsilon_{l+1} + 2 \left\| \psi_{l+1}(x) - \sum_{k=1}^{n(i_l)} c_k \varphi_k(x) \right\|_{[a,b]} \right)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{p=l}^{r-2} \varepsilon_{p+2} + \sum_{p=l}^{r-2} \left[\left(\varepsilon_{p+2} + 2 \left\| \psi_{p+2}(x) - \sum_{k=1}^{n(l_{p+1})} c_k \varphi_k(x) \right\|_{ce_{p+2}} \right) \times \right. \\
& \times \frac{\varepsilon_{p+2}}{\left(\varepsilon_{p+2} + 2 \left\| \psi_{p+2}(x) - \sum_{k=1}^{n_{p+1}} c_k \varphi_k(x) \right\|_{[a, b]} \right)} \left. + \varepsilon_{r+1} + \left(\varepsilon_{r+1} + 2 \left\| \psi_{r+1}(x) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \sum_{k=1}^{n(l_r)} c_k \varphi_k(x) \right\|_{ce_{r+1}} \right) \frac{\varepsilon_{r+1}}{\left(\varepsilon_{r+1} + 2 \left\| \psi_{r+1}(x) - \sum_{k=1}^{n_r} c_k \varphi_k(x) \right\|_{[a, b]} \right)} \right] = \\
& = \varepsilon_{l+1} + \varepsilon_{l+1} + \sum_{p=l}^{r-2} \varepsilon_{p+2} + \sum_{p=l}^{r-2} \varepsilon_{p+2} + \varepsilon_{r+1} + \varepsilon_{r+1} = 2 \sum_{p=l}^r \varepsilon_{p+1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\left\| \sum_{j=m+1}^n a_{lj} S_j(x) \right\|_{\bigcap_{q=l+1}^{r+1} ce_q} < 2 \sum_{p=l}^r \varepsilon_{p+1}.$$

Отсюда, учитывая (2.17), получим

$$\left\| \sum_{j=m+1}^n a_{lj} S_j(x) \right\|_{\bigcap_{q=l+1}^{\infty} ce_q} < 2 \sum_{p=l}^{\infty} \varepsilon_{p+1}. \quad (2.18)$$

С другой стороны, согласно 1° имеем

$$\text{mes } \bigcap_{q=l+1}^{\infty} ce_q \geq b-a - \sum_{q=l+1}^{\infty} \varepsilon_q$$

и следовательно ряд (2.16) сходится по мере.

Теперь установим, что разность $A_l(x, T) - \psi_\tau(x)$ ($i_\tau \leq i < i_{\tau+1}$) сходится на $[a, b]$ к нулю по мере при $\tau \rightarrow \infty$.

Учитывая (2.14), представим ряд (2.16), где $i_\tau \leq i < i_{\tau+1}$, $\tau=1, 2, \dots$, в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_{lj} S_j(x) &= \sum_{j=1}^{n_\tau} a_{lj} S_j(x) + \sum_{j=n_\tau+1}^n a_{lj} \left(S_{n_\tau}(x) + \sum_{k=n_\tau+1}^j c_k \varphi_k(x) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n_\tau} a_{lj} S_j(x) + S_{n_\tau}(x) \sum_{j=n_\tau+1}^n a_{lj} + \sum_{j=n(l_\tau)+1}^n a_{lj} \left(\sum_{k=n(l_\tau)+1}^j c_k \varphi_k(x) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n_\tau} a_{lj} S_j(x) + S_{n_\tau}(x) \sum_{j=n_\tau+1}^n a_{lj} + \sum_{j=n(l_\tau)+1}^{n(l_{\tau+1})} a_{lj} \left(\sum_{k=n(l_\tau)+1}^j c_k \varphi_k(x) \right) + \\
&\quad + \sum_{j=n(l_{\tau+1})+1}^n a_{lj} \left(\sum_{k=n(l_\tau)+1}^j c_k \varphi_k(x) \right). \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Из (2.11) следует, что

$$\left\| \sum_{j=1}^{n_\tau} a_{ij} S_j(x) \right\|_{[a, b]} \leq \left(\sum_{k=1}^{n_\tau} c_k^2 \right)^{1/2} \cdot \sum_{j=1}^{n_\tau} |a_{ij}| < \varepsilon_i \text{ при } i \geq i_\tau, \quad (2.20)$$

а из (2.12) и 3° имеем

$$\begin{aligned} \left\| S_{n_\tau}(x) \sum_{j=n_\tau+1}^{\infty} a_{ij} - \psi_\tau(x) \right\|_{ce_\tau} &= \left\| S_{n_\tau}(x) \cdot \sum_{j=n_\tau+1}^{\infty} a_{ij} - \psi_\tau(x) + S_{n_\tau}(x) - \right. \\ &\quad \left. - S_{n_\tau}(x) \right\|_{ce_\tau} \leq \left\| S_{n_\tau}(x) \sum_{j=n_\tau+1}^{\infty} a_{ij} - S_{n_\tau}(x) \right\|_{ce_\tau} + \left\| S_{n_\tau}(x) - \psi_\tau(x) \right\|_{ce_\tau} \leq \\ &\leq \left\| S_{n_\tau}(x) \right\|_{ce_\tau} \cdot \left| 1 - \sum_{j=n_\tau+1}^{\infty} a_{ij} \right| + \left\| S_{n_\tau}(x) - \psi_\tau(x) \right\|_{ce_\tau} < 2\varepsilon_i \text{ при } i > i_\tau. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Учитывая (2.5), для любых двух чисел $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ определим τ_0 настолько большое, чтобы при $\tau > \tau_0$ выполнялось

$$\|\psi_{\tau+1}(x) - \psi_\tau(x)\|_{E_\tau} < \varepsilon, \text{ где } E_\tau \subset [a, b], \text{ mes } E_\tau > b - a - \delta. \quad (2.22)$$

Обозначая $ce_\tau \cap E_\tau \cap ce_{\tau+1} = F_\tau$, из 1° и (2.22) имеем

$$\text{mes } F_\tau > b - a - \varepsilon_\tau - \varepsilon_{\tau+1} - \delta. \quad (2.23)$$

Из 4°, (2.14), 3°, (1.2) и (2.22) получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=n(l_\tau)+1}^{n(l_{\tau+1})} a_{ij} \left(\sum_{k=n(l_\tau)+1}^j c_k \varphi_k(x) \right) \right\|_{F_\tau} &\leq (\varepsilon_{\tau+1} + 2 \|\psi_{\tau+1}(x) - \sum_{k=1}^{n(l_\tau)} c_k \varphi_k(x) + \\ &\quad + \psi_\tau(x) - \psi_\tau(x)\|_{F_\tau}) \cdot \sum_{j=n(l_\tau)+1}^{n(l_{\tau+1})} |a_{ij}| \leq (\varepsilon_{\tau+1} + 2 \|\psi_\tau(x) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n_\tau} c_k \varphi_k(x)\|_{F_\tau}) \sum_{j=n(l_\tau)+1}^{n(l_{\tau+1})} |a_{ij}| + 2 \|\psi_{\tau+1}(x) - \psi_\tau(x)\|_{F_\tau} \cdot \sum_{j=n(l_\tau)+1}^{n(l_{\tau+1})} |a_{ij}| < \\ &< (\varepsilon_{\tau+1} + 2\varepsilon_\tau) H + 2\varepsilon H < 2H(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{\tau+1} + \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.24)$$

при $\tau > \tau_0$ и $i_\tau \leq i < i_{\tau+1}$.

Учитывая (2.14), можем написать

$$\begin{aligned} \sum_{j=n(l_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} S_j(x) &= \sum_{j=n(l_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} \left(S_{n_\tau}(x) + \sum_{k=n_\tau+1}^j c_k \varphi_k(x) \right) = \\ &= S_{n_\tau}(x) \cdot \sum_{j=n(l_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} + \sum_{j=n(l_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} \left(\sum_{k=n_\tau+1}^j c_k \varphi_k(x) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (2.13) и (2.18), где положено $l = \tau + 1$ и $m = n(i_{\tau+1}) + 1$, имеем

$$\left\| \sum_{j=n(l_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{lj} \left(\sum_{k=n(l_{\tau})+1}^j c_k \varphi_k(x) \right) \right\|_{F_{\tau} \cdot \bigcap_{q=\tau+1}^{\infty} c e_q} \leq \left\| \sum_{j=n(l_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{lj} S_j(x) \right\|_{\bigcap_{q=\tau+2}^{\infty} c e_q} +$$

$$+ \left\| S_{n_{\tau}}(x) \cdot \sum_{j=n(l_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{lj} \right\|_{[a, b]} < 2 \sum_{p=\tau}^{\infty} \varepsilon_{p+2} + \varepsilon_{\tau+1} < 2 \sum_{p=\tau}^{\infty} \varepsilon_{p+1}, \quad (2.25)$$

где $i_{\tau} \leq i < i_{\tau+1}$.

Из (2.19), (2.20), (2.21), (2.24) и (2.25) получим

$$\left\| A_i(x, T) - \psi_{\tau}(x) \right\|_{F_{\tau} \cdot \bigcap_{q=\tau}^{\infty} c e_q} \leq \left\| \sum_{j=1}^{n_{\tau}} a_{lj} S_j(x) \right\|_{[a, b]} +$$

$$+ \left\| S_{n_{\tau}}(x) \cdot \sum_{j=n_{\tau}+1}^{\infty} a_{lj} - \psi_{\tau}(x) \right\|_{F_{\tau}} + \left\| \sum_{j=n(l_{\tau})+1}^{n(l_{\tau+1})} a_{lj} \left(\sum_{k=n(l_{\tau})+1}^j c_k \varphi_k(x) \right) \right\|_{F_{\tau}} +$$

$$+ \left\| \sum_{j=n(l_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{lj} \left(\sum_{k=n(l_{\tau})+1}^j c_k \varphi_k(x) \right) \right\|_{\bigcap_{q=\tau+1}^{\infty} c e_q} < \varepsilon_{\tau} + 2\varepsilon_{\tau} + 2H(\varepsilon_{\tau} +$$

$$+ \varepsilon_{\tau+1} + \varepsilon) + 2 \sum_{p=\tau}^{\infty} \varepsilon_{p+1}, \text{ где } \tau > \tau_0 \text{ и } i_{\tau} \leq i < i_{\tau+1}. \quad (2.26)$$

С другой стороны, согласно 1° имеем

$$\text{mes} \left(F_{\tau} \cdot \bigcap_{q=\tau}^{\infty} c e_q \right) > b - a - \delta - \varepsilon_{\tau} - \varepsilon_{\tau+1} - \sum_{q=\tau}^{\infty} \varepsilon_q; \tau \geq \tau_0 \quad (2.27)$$

и следовательно, согласно (2.6) и произвольности δ и ε , разность $A_i(x, T) - \psi_{\tau}(x)$ ($i_{\tau} \leq i < i_{\tau+1}$) сходится на $[a, b]$ к нулю по мере при $\tau \rightarrow \infty$.

Справедливость требований 1) и 2) теоремы 2 вытекает из (2.4) и из того, что верхний и нижний пределы по мере на $[a, b]$ последовательности $\{\psi_n(x)\}$ равны соответственно $F(x)$ и $G(x)$ и последовательность $A_i(x, T) - \psi_{\tau}(x)$, где $i_{\tau} \leq i < i_{\tau+1}$, сходится по мере к нулю на $[a, b]$.

Требование 3) теоремы 2 вытекает из 2° и (2.6). Тем самым теорема 2 доказана.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и за оказанную помощь при ее решении.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 25.V.1970

Լ. Հ. ՍԻՆՅԱՆ. 7-միջինների ըստ շափի անորոշության սահմանների լրիվ օրգանոցավ սխեմներով շարժերի համար (ամփոփում)

Ամեն մի անգույյար գումարման մեթոդի համար, ըստ կամայական լրիվ օրթոնորմալ սխեմի կառուցվում է շարք, որի միջինների վերին և ստորին սահմանները ըստ շափի հանդիսանում են նախորդ տրված ֆունկցիաները:

N. H. SYNANIAN. *The uncertainty bounds for mean values of series by complete orthonormal systems* (summary)

For any regular method of summation and any complete orthonormal system a series is constructed, such that the upper and lower limits of mean values of the series coincide with prescribed functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Д. Е. Меньшов. Пределы неопределенности по мере T -средних для тригонометрических рядов, ДАН СССР, 176, № 3, 1967, 518—521.
2. А. А. Талалян. Об универсальных ортогональных рядах, Известия АН АрмССР, серия физико-математических наук, XII, № 1, 1959.
3. Д. Е. Меньшов. Пределы неопределенности по мере T -средних тригонометрических рядов, Мат. сб., 81 (123):4, 1970, 485—524.