Н. У. АРАКЕЛЯН

ЦЕЛЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ДЕФЕКТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В настоящей статье приводится подробное изложение установленной автором в работе [1] теоремы о множестве дефектных значений целых функций конечного порядка. Попутно доказывается аналогичная теорема для функций, голоморфных в единичном круге.

Как показали Неванлинна [2] и Альфорс [3], каждое конечное множество комплексных чисел является множеством дефектных значений некоторой мероморфной функции. Долгое время оставался открытым вопрос о существовании мероморфных функций с бесконечным множеством дефектных значений. Полный ответ на этот вопрос дал А. А. Гольдберг [4], [5] (см. также [6]), построив мероморфные функции произвольного положительного порядка с наперед заданным конечным или счетным множеством дефектных значений. Аналогичный пример целых функций бесконечного порядка построили В. Фукс и Хейман [6].

Для целых функций *конечного* порядка ρ вопрос о количестве дефектных значений усложнялся тем обстоятельством, что число конечных асимптотических значений таких функций, в силу теоремы Данжуа-Карлемана-Альфорса, не превосходит $[2\rho]$. Неванлинна же считал, что дефектное значение, наподобие пикаровского исключительного значения, всегда является асимптотическим. Это было одной из причин для предположения [7], [8], что целая функция конечного порядка ρ имеет лишь конечное (и даже не более $[2\rho] + 1$) число дефектных значений. В дальнейшем выяснилось [9], что дефектное значение, вообще говоря, не обязано быть асимптотическим, но с другой стороны, для случая $\rho \leq \frac{1}{2}$ гипотеза Неванлинны подтвердилась. Из одного резуль-

тата Эдрея и В. Фукса следует [6], что целая функция порядка $\rho \leq \frac{1}{2}$ не может иметь конечных дефектных значений.

Оказалось, однако, что в случае $\rho > \frac{1}{2}$ гипотеза Неванлинны неверна [1]. Следующая теорема вместе с результатом Эдрея и В. Фукса решает, в частности, вопрос о количестве дефектных значений целых функций конечного порядка (параболический случай).

Теорема 1. Для любого $\rho > \frac{1}{2}$ и для произвольной последовательности комплексных чисел $(a_j)_j^{\infty}$ существует целая функция порядка ρ и нормального типа, для которой числа $a_j, j=1, 2, \dots$ являются дефектными.

В гиперболическом случае имеет место

Теорема 2. Для любого $\gamma > 0$ и для произвольной последовательности комплексных чисел $(a_j)_j^{\infty}$ существует аналитическая в единичном круге функция порядка γ и нормального типа, для которой числа $a_j, j=1, 2, \dots$ являются дефектными.

Несколько слов о методе доказательства теоремы 1. Основное отличие в построении целых функций конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений от случая мероморфных функций обусловлено тем обстоятельством, что в силу сказанного выше, числа a_j должны быть, вообще говоря, неасимптотическими дефектными значениями. Для преодоления этой трудности привлекаются методы теории приближений. Оказывается, что задачу построения требуемой целой функции можно свести к задаче касательного приближения целыми функциями на множествах, состоящих из бесконечного числа „островов“, сгущающихся к бесконечности, с оценкой роста аппроксимирующих функций. В наших построениях существенно используются результаты М. В. Келдыша о приближении целыми и рациональными функциями с ограниченным ростом (см. леммы 3 и 4 параграфа 1).

§ 1. Аппроксимационные леммы

Начнем с двух простых лемм. Ниже $d(A, B)$ означает расстояние между множествами A и B из конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е.

$$d(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} |a - b|.$$

Кроме того, для области $\Omega \subset \mathbb{C}$ и точки $\zeta \in \mathbb{C}$ обозначим

$$d_{\Omega}(\zeta) = d(\{\zeta\}, \partial\Omega).$$

Лемма 1. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, $\zeta_0 \in \Omega$, функция φ голоморфна в Ω , $\varphi(\zeta_0) = 0$ и $|\varphi(\zeta)| < 1$ для всех $\zeta \in \Omega$. Тогда справедлива оценка

$$\frac{1 + |\varphi(\zeta)|}{1 - |\varphi(\zeta)|} \leq \exp \left\{ 2 \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{|dt|}{d_{\Omega}(t)} \right\} \quad \text{для } \zeta \in \Omega, \quad (1)$$

где интегрирование можно произвести по любой спрямляемой кривой, лежащей в Ω и соединяющей точки ζ_0 и ζ .

Доказательство. Для фиксированной точки $t \in \Omega$ функция ψ_t , определяемая формулой

$$\psi_t(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(t)}{1 - \overline{\varphi(t)} \varphi(z)} \cdot \frac{d_{\Omega}(t)}{z - t},$$

аналитична в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z - t| < d_2(t)\}$ и в нем $|\psi_t(z)| \leq 1$.

Полагая, в частности, $z = t$, получим оценку

$$\frac{|\varphi'(t)|}{1 - |\varphi(t)|^2} < \frac{1}{d_2(t)} \quad \text{для } t \in \Omega. \quad (2)$$

Пусть теперь $\zeta \in \Omega$, $\varphi(\zeta) \neq 0$, $a = \frac{\varphi(\zeta)}{|\varphi(\zeta)|}$. С учетом (2) имеем

$$\begin{aligned} \log \frac{1 + |\varphi(\zeta)|}{1 - |\varphi(\zeta)|} &= \log \frac{a + \varphi(\zeta)}{a - \varphi(\zeta)} = 2 \left| \int_{\zeta}^{\zeta} \frac{\varphi'(t)}{a^2 - \varphi^2(t)} dt \right| \leq \\ &< 2 \int_{\zeta}^{\zeta} \frac{|\varphi'(t)|}{1 - |\varphi(t)|^2} |dt| < 2 \int_{\zeta}^{\zeta} \frac{|dt|}{d_2(t)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, имеющая более одной граничной точки, $\zeta_0 \in \Omega$, функция φ конформно и однолистно отображает Ω на единичный круг, причем $\varphi(\zeta_0) = 0$. Тогда имеют место оценки

$$|\varphi(t)| > (32)^{-1} \quad \text{при } |t - \zeta_0| = \frac{1}{2} d_2(\zeta_0), \quad (3)$$

$$d_2(t) > (32)^{-1} (1 - |\varphi(t)|)^2 d_2(\zeta_0) \quad \text{для } t \in \Omega. \quad (4)$$

Для доказательства рассмотрим следующий вариант известной теоремы Кебе о покрытии: если функция f регулярна и однолистна в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ и не принимает там значения c , то

$$|f'(z_0)| \leq \frac{4}{r} |f(z_0) - c|. \quad (5)$$

Докажем теперь оценку (3). На границе области Ω возьмем точку c так, что $|c - \zeta_0| = d_2(\zeta_0)$. Обратная к φ функция ψ , $\psi(0) = \zeta_0$ регулярна и однолистна в единичном круге и не принимает там значения c , поэтому в силу оценки (5) имеем

$$|\psi'(0)| \leq 4d_2(\zeta_0), \quad \text{т. е. } |\varphi'(\zeta_0)| \geq \frac{1}{4d_2(\zeta_0)}. \quad (6)$$

Далее, при $r = \frac{1}{2} d_2(\zeta_0)$ функция φ регулярна и однолистна в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta_0| < r\}$ и не принимает там значения $c = \varphi(t)$, если $|t - \zeta_0| = r$. Согласно (5) и (6) имеем

$$|\varphi(t)| > \frac{r}{4} |\varphi'(\zeta_0)| > \frac{r}{16 d_2(\zeta_0)},$$

что доказывает оценку (3). Для доказательства оценки (4) для любой точки $t \in \Omega$ возьмем соответствующую точку $c \in \partial\Omega$ так, что $|t - c| =$

$= d_2(t)$. Полагая $z(t) = z_0$, заметим, что функция ψ , обратная к φ , регулярна и однолистка в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < 1 - |z_0|\}$, поэтому в силу (5) имеем

$$d_2(t) > \frac{1}{4} (1 - |z_0|) |\psi'(z_0)|. \quad (7)$$

Для оценки снизу величины $|\psi'(z_0)|$ заметим, что функция $\frac{\psi(z) - \zeta_0}{\psi'(0)}$ принадлежит известному классу S , поэтому, в силу теоремы искажения Бибербаха [10],

$$|\psi'(z_0)| > |\psi'(0)| \frac{1 - |z_0|}{(1 + |z_0|)^3} > \frac{1}{8} |\psi'(0)| (1 - |z_0|).$$

Отсюда и из (7) следует требуемая оценка (4), с учетом того, что, в силу (2)

$$|\psi'(0)| = \frac{1}{|\varphi'(\zeta_0)|} > d_2(\zeta_0).$$

Лемма доказана.

Мы приступаем к формулировке и доказательству леммы, наиболее важной при доказательстве наших теорем.

Эта лемма сходна с леммой М. В. Келдыша [11] об аппроксимации ядра Коши рациональными функциями (кстати, тоже вполне достаточной для наших целей). Лемма М. В. Келдыша доказывается методом Рунге последовательного вывода полюсов. Здесь, по существу, предлагается другой способ доказательства подобных лемм.

Лемма 3. Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, имеющая более одной граничной точки, $\zeta, \zeta_0 \in \Omega$, спрямляемая кривая Γ лежит в Ω и соединяет точки ζ и ζ_0 . Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует рациональная функция R_ε с единственным полюсом в точке ζ_0 такая, что

$$\left| R_\varepsilon(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < \varepsilon \text{ для } z \in \mathbb{C}/\Omega, \quad (8)$$

$$|R_\varepsilon(z)| < \exp \left\{ 40 \left[1 + \log^+ \frac{1}{\varepsilon d_2(\zeta_0)} \right] \exp \left[4 \int_\Gamma \frac{|dt|}{d_2(t)} \right] \right\},$$

когда

$$|z - \zeta_0| \geq d_2(\zeta_0). \quad (9)$$

Доказательство. Пусть функция φ конформно и однолистно отображает Ω на единичный круг, причем $\varphi(\zeta_0) = 0$. Возьмем пока произвольное натуральное число n , и искомую функцию R_ε определим формулой

$$R_\varepsilon(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|t-\zeta_0|=r} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad f(t) = \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(t)} \right]^n \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - \varphi(\zeta)},$$

где $0 < r < \min[|\zeta - \zeta_0|, |z - \zeta_0|, d_2(\zeta_0)]$. Здесь интеграл, в силу аналитичности f , не зависит от r при указанном выборе r и определяет

функцию, аналитическую в области $\bar{C} \setminus \{\zeta_0\}$. Кроме того, полагая $r_0 = \frac{1}{2} \min \{|\zeta - \zeta_0|, d_\Omega(\zeta_0)\}$, по формуле Коши имеем

$$R_\zeta(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-\zeta_0|=r_0} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad \text{при } |z - \zeta_0| < r_0,$$

откуда

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0} (z - \zeta_0)^n R_\zeta(z) = - \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi'(\zeta_0)} \right]^{n-1} \neq 0,$$

так что R_ζ — рациональная функция с единственным полюсом порядка n в точке ζ_0 .

Возьмем теперь число R , $|\varphi(\zeta)| < R < 1$, и обозначим через L_R линию уровня, на которой $|\varphi(t)| = R$. Замкнутая кривая L_R охватывает точку ζ , поэтому по теореме о вычетах для $z \in C/\Omega$ имеем

$$R_\zeta(z) = \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-\zeta_0|=r} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Отсюда, заметив, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_R} |\varphi'(t)| |dt| = R,$$

и учитывая оценку (4), получим

$$\left| R_\zeta(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < \frac{32R}{d_\Omega(\zeta_0) (1-R)^2 (R - |\varphi(\zeta)|)} \left(\frac{|\varphi(\zeta)|}{R} \right)^n \quad \text{для } z \in C/\Omega. \quad (10)$$

Положим в частности $R = \frac{1 + |\varphi(\zeta)|}{2}$ и пусть

$$I = 2 \int_r \frac{|dt|}{d_\Omega(t)}.$$

Тогда, с учетом оценки (1), имеем

$$\frac{|\varphi(\zeta)|}{R} = 1 - \frac{1 - |\varphi(\zeta)|}{1 + |\varphi(\zeta)|} \leq 1 - e^{-I} < \exp(-e^{-I}),$$

$$\frac{R}{(1-R)^2 (R - |\varphi(\zeta)|)} = 4 \frac{1 + |\varphi(\zeta)|}{(1 - |\varphi(\zeta)|)^2} < 4e^{2I}.$$

Из этих оценок и из (10) легко следует, что для выполнения (8) достаточно выбрать число n так, чтобы

$$n < \left\lceil 3I + 6 + \log^+ \frac{1}{\varepsilon d_\Omega(\zeta_0)} \right\rceil e^I \leq n + 1. \quad (11)$$

Оценим теперь рост функции R_ζ . С этой целью рассмотрим аналитическую в Ω функцию

$$\psi(t) = \left\{ 1 - \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(t)} \right]^n \right\} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - \varphi(\zeta)}.$$

С учетом (2) для всех $t \in \Omega$ имеем оценку

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &< \frac{|\varphi'(t)|}{|\varphi(t)|^n} (1 + |\varphi(t)| + \dots + |\varphi(t)|^{n-1}) \ll \\ &\ll |\varphi(t)|^{-n} \frac{|\varphi'(t)|}{1 - |\varphi(t)|} < \frac{2|\varphi(t)|^{-n}}{d_\Omega(t)}. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $\alpha = \frac{1}{2} d_\Omega(\zeta_0)$, согласно (3), имеем

$$|\psi(t)| < \frac{2}{\alpha} (32)^n, \text{ когда } |t - \zeta_0| = \alpha.$$

Однако легко видеть, что

$$R_\zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-\zeta_0|=\alpha} \frac{\psi(t)}{t-z} dt, \text{ когда } |z - \zeta_0| \geq 2\alpha,$$

так что

$$|R_\zeta(z)| \leq \max_{|t-\zeta_0|=\alpha} |\psi(t)| < \frac{2}{\alpha} (32)^n < \exp \left[4n + 2 + \log^+ \frac{1}{\varepsilon d_\Omega(\zeta_0)} \right].$$

Отсюда и из (11), учитывая оценку $\max(l, 1) \leq e^l$, имеем

$$\begin{aligned} |R_\zeta(z)| &< \exp \left\{ \left[12l + 26 + 5 \log^+ \frac{1}{\varepsilon d_\Omega(\zeta_0)} \right] e^l \right\} \ll \\ &\ll \exp \left\{ 40 \left[1 + \log^+ \frac{1}{\varepsilon d_\Omega(\zeta_0)} \right] e^{2l} \right\}. \end{aligned}$$

Оценка (9), а с ней и лемма доказаны.

Следствие. Пусть в условиях леммы 3 дополнительно дано, что

$$d_\Omega(t) \geq d \text{ для } t \in \Gamma.$$

Тогда для функции R_ζ , удовлетворяющей условию (8), имеем оценку

$$|R_\zeta(z)| < \exp \left\{ 40 \left[1 + \log^+ \frac{1}{\varepsilon d} \right] \exp \frac{4 \text{ д.л. } \Gamma}{d} \right\}, \text{ когда } |z - \zeta_0| \geq d_\Omega(\zeta_0). \quad (12)$$

Лемма 4. Пусть $\rho > 0$, $0 < \alpha < \gamma < 2\pi$, функция Γ аналитична в угле $\left\{ z \in \mathbb{C}: |\arg z| < \frac{\gamma}{2} \right\}$ и $|F(z)| < \exp \{ \text{const} (|z|+1)^\rho \}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует целая функция G , удовлетворяющая неравенствам

$$|F(z) - G(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2},$$

$$|G(z)| < \exp \{ \text{const} (|z|+1)^\nu \} \text{ для } z \in \mathbb{C},$$

$$\text{где } \nu = \max \left\{ \frac{\pi}{2\pi - \gamma}, \rho \right\}.$$

Эта лемма является частным случаем теоремы 3.5 М. В. Келдыша [12] о приближении голоморфных функций целыми функциями с ограниченным ростом в случае угла.

Лемма 5. Пусть $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{\rho} \left(\rho - \frac{1}{2} \right)$, функция f аналитична в угле $\left\{ z \in \mathbb{C}: |\arg z| \leq \frac{\beta}{2} \right\}$ ($\beta > \alpha$) и $|f(z)| < \exp \{ \text{const} \times (|z|+1)^\rho \}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует целая функция G_ρ порядка ρ и нормального типа, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z) - G_\rho(z)| < \varepsilon \exp(-|z|^\rho) \text{ при } |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}. \quad (13)$$

Доказательство. Возьмем число γ так, что

$$\gamma \leq \beta, \quad \alpha < \gamma < \theta_0 = \frac{\pi}{\rho} \left(\rho - \frac{1}{2} \right).$$

Хорошо известно [13], что при $0 < \rho < 1$ бесконечное произведение Вейерштрасса

$$V_\rho(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\frac{n}{\rho}} \right)$$

представляет собой целую функцию порядка ρ и нормального типа такую, что при $z = re^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |V_\rho(re^{i\theta})|}{r^\rho} = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\theta - \pi), \quad (14)$$

причем стремление к пределу равномерно в любом интервале $\eta \leq \theta \leq 2\pi - \eta$, $\eta > 0$. Положим теперь

$$\omega_\rho(z) = \begin{cases} e^{-2z} & \text{при } \rho = 1, \\ \frac{1}{\rho} V_\rho^q \left(ze^{-\frac{\rho}{2}z} \right) & \text{при } \frac{1}{2} < \rho < 1, \end{cases}$$

где p и q — достаточно большие натуральные числа.

Из (14) при $\eta = \frac{\theta_0 - \gamma}{2}$ следует, что функция ω_ρ , имеющая порядок ρ и нормальный тип, удовлетворяет неравенству

$$\exp \{ -\text{const} (|z|+1)^\rho \} < |\omega_\rho(z)| < \exp(-|z|^\rho) \text{ при } |\arg z| \leq \frac{\gamma}{2}. \quad (15)$$

В силу (15) и условий леммы 5, для функции $F = \frac{f}{\omega_\rho}$ выполняются ус-

ловия леммы 4. Обозначив $G_\rho = G \cdot \omega_\rho$, получим функцию, удовлетворяющую, с учетом (15), неравенству (13). Рост функции G_ρ определяется числом $\nu = \max \left\{ \frac{\pi}{2\pi - \gamma}, \rho \right\}$. В данном случае $\nu = \rho$, так как

$$\frac{\pi}{2\pi - \gamma} < \frac{\pi}{2\pi - \theta_0} = \frac{2\rho}{2\rho + 1} < \rho.$$

Если порядок или тип функции G_ρ ниже требуемого, то вместо нее мы можем рассматривать функцию $G_\rho + \frac{\varepsilon}{2} \omega_\rho$.

§ 2. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теорем 1 и 2 состоит из нескольких пунктов. Ниже все построения мы проводим, нацеливаясь на теорему 1, а теорему 2 получаем попутно. Заметим с самого начала, что при доказательстве теоремы 1 достаточно ограничиться случаем, когда $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$.

В самом деле, если $\rho > 1$, то возьмем натуральное число N так, что $\rho \leq N \leq 2\rho$. Построив целую функцию $G_{\frac{\rho}{N}}$ порядка $\frac{\rho}{N}$, множество дефектных значений которой содержит множество $(a_j)_{j=1}^{\infty}$, мы затем можем рассматривать целую функцию $G_\rho: G_\rho(z) = G_{\frac{\rho}{N}}(z^N)$ порядка ρ с теми же дефектами.

1°—2°. *Предварительные построения.* 1°. Возьмем теперь произвольное число ε , $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{\rho} \left(\rho - \frac{1}{2} \right)$ и последовательность $(\theta_k)_{k=1}^{+\infty}$ такую, что $\theta_{-k} = -\theta_k$, $\theta_k \uparrow \frac{\alpha}{2}$ при $k \uparrow +\infty$. Далее пусть $0 < \varepsilon < 1$,

$$0 \leq \delta < \frac{1}{3}, \quad k - \text{произвольное целое число, } a_k = \min(\theta_{k+1} - \theta_k, \theta_k - \theta_{k-1}),$$

а n — произвольное натуральное число. Введем обозначения

$$\Delta_k(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}: |\arg z - \theta_k| \leq \varepsilon a_k\},$$

$$\sigma_n(\delta) = \{z \in \mathbb{C}: (1 - \delta) 2^n < |z| \leq (1 + \delta) 2^{n+1}\},$$

$$E_{k,n}(\varepsilon, \delta) = \Delta_k(\varepsilon) \cap \sigma_n(\delta).$$

Очевидно, что множества $E_{k,n}(\varepsilon, \delta)$ не пересекаются для разных пар (k, n) и монотонно расширяются при увеличении ε и δ .

Пусть теперь $(n_k)_{k=1}^{+\infty}$ — некоторая последовательность четных натуральных чисел, $n_k \uparrow +\infty$ при $k \uparrow +\infty$. Полагая $n_{-k} = n_k + 1$, рассмотрим замкнутые в $\mathbb{C}$ множества

$$E(\varepsilon, \delta) = \bigcup_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \bigcup_{m=0}^{+\infty} E_{k, n_k + 2m}(\varepsilon, \delta).$$

Отметим следующее важное свойство множеств $E(z, \delta)$. Пусть $\lambda_{j,r}$ означает пересечение окружности $\{z \in \mathbb{C}: |z| = r\}$ с $\Delta_k(\varepsilon)$. Тогда для любого натурального j и любого $r > 2^{2j}$ пересечение множества $E(z, \delta)$ с окружностью $\{z \in \mathbb{C}: |z| = r\}$ содержит дугу $\gamma_{j,r}$ длины $(2^{2\alpha_j}) r$, совпадающую либо с $\lambda_{j,r}$, либо с $\lambda_{-j,r}$. Положим далее

$$E_{k,n}^p = E_{k,n}(\varepsilon_p, \delta_p), \quad E_p = E(\varepsilon_p, \delta_p),$$

где $\varepsilon_p = \frac{p+1}{4}$, $\delta_p = \frac{p}{8}$, а p принимает только три значения $p=0, 1, 2$.

Тогда имеем

$$E_{k,n}^0 \subset E_{k,n}^1 \subset E_{k,n}^2, \quad E_0 \subset E_1 \subset E_2.$$

Множества E_p зависят также от последовательности (n_k) . Для наложения нужных нам ограничений на последовательность (n_k) и для дальнейшего изложения полезно ввести две аналитические на множестве E_2 функции φ и ψ , полагая

$$\varphi(z) = a_{|k|}, \quad \psi(z) = \exp(-\mu_k z^k), \quad \text{когда } z \in \Delta_k(\varepsilon_2), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\mu_k = \exp\left(-\frac{2^{2k}}{a_k}\right)$, так что $\mu_{-k} = \mu_k$.

Так как равномерно на $\Delta_k(\varepsilon_2)$ $\zeta\psi(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$, а функция φ ограничена на $\Delta_k(\varepsilon_2)$, то мы можем взять последовательность (n_k) настолько быстро растущую, что выполняется условие

$$\max(|\zeta|, |\varphi(\zeta)|) < |\psi(\zeta)|^{-1} \quad \text{для } \zeta \in E_2. \quad (16)$$

При этом можно также считать, что $n_1 > 4$ и

$$\int_{\partial E_2} |\zeta^{-2} d\zeta| < 1. \quad (17)$$

2°. Обозначим теперь через $l_{k,n}^p$ ($p=1, 2$; $k = \pm 1, \pm 2, \dots$; $n = n_k + 2m$; $m=0, 1, 2, \dots$) дугу окружности $\{z \in \mathbb{C}: |z| = (1 + \delta_p) 2^{n+1}\}$, лежащую в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}: (-1)^{nk} \operatorname{Im} z > 0\}$ и соединяющую точку $(1 + \delta_p) 2^{n+1} e^{i\theta_k} \in E_{k,n}^p$ с точкой $-(1 + \delta_p) 2^{n+1}$. В силу определения множеств E_p имеем, что $l_{k,n}^p$ не пересекаются с E_{p-1} и, более того

$$\begin{aligned} d(\{\partial E_{k,n}^p \cup l_{k,n}^p\}, E_{p-1}) &= d(E_{k,n}^p, E_{p-1}) > (1 - \delta_p) 2^n \sin \alpha_k (\varepsilon_p - \varepsilon_{p-1}) > \\ &> \frac{3}{4} 2^n \sin \frac{\alpha_k}{4} > \alpha_k 2^{n-4}. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть теперь $\zeta \in \partial E_p$, $p=1, 2$. Определим кривую Γ_ζ^p и односвязную область Ω_ζ^p следующим образом: если $\zeta \in \partial E_{k,n}^p$, то через Γ_ζ^p обозначим объединение кривой $l_{k,n}^p$ с меньшей дугой границы $\partial E_{k,n}^p$, соединяющей точку ζ с точкой $(1 + \delta_p) 2^{n+1} e^{i\theta_k}$, и положим

$$\Omega_\zeta^p = \{z \in \mathbb{C}: d(z, \Gamma_\zeta) < \alpha_k 2^{n-4}\}.$$

Теперь к области Ω_ζ и кривой Γ_ζ^p применим лемму 3, полагая еще $\zeta_0 = -(1 + \delta_p) 2^{n+1}$, $\varepsilon = |\psi(\zeta)|^2$. Рассмотрим функцию Q_p : $Q_p(\zeta, z) =$

$= R_\zeta(z)$ для $(\zeta, z) \in \partial E_p \times \{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} w > -1\}$, удовлетворяющую, в силу (8), неравенству

$$\left| Q_p(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < |\psi(\zeta)|^7 \text{ для } \zeta \in \partial E_p, z \in \mathbb{C}/D_\zeta^p, \quad (19)$$

где

$$D_\zeta^p = D_{k,n}^p = \{z \in \mathbb{C}: d(z, \partial E_{k,n}^p \cup l_{k,n}^p) < a_k 2^{n-4}\}$$

при $\zeta \in \partial E_{k,n}^p$, так что $\Omega_\zeta^p \subset D_\zeta^p$. Рост функции Q_p ограничивается неравенством

$$|Q_p(\zeta, z)| < |\psi(\zeta)|^{-\frac{300}{\mu_k}} \quad (20)$$

для $(\zeta, z) \in [\partial E_p \cap \Delta_k(\varepsilon_p)] \times \{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} w \geq -1\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Это неравенство следует из (12), поскольку в нашем случае имеем

$$\exp \frac{4 \text{ д.л. } \Gamma_\zeta^p}{d} < \exp \frac{4 \cdot 2^{n+4}}{a_k \cdot 2^{n-4}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \text{ при } \zeta \in \partial E_{k,n}^p,$$

где

$$d = a_k \cdot 2^{n-4} > 2^{11} \exp\left(-\frac{2^{11}}{a_k}\right) 2^{n-4} = \mu_k 2^{n+7} > 4 \mu_k |\zeta|^p.$$

Отсюда и из оценки

$$\mu_k |\zeta|^p > \log |\psi(\zeta)|^{-1} > \log |\zeta| > \log 2^{n-1} > 1,$$

вытекающей из (16), в свою очередь следует

$$1 + \log^+ \frac{1}{\varepsilon d} < 1 + \log^+ e^{-1} |\psi(\zeta)|^{-7} = \log |\psi(\zeta)|^{-7}.$$

Замечание 1. Напомним, что $Q_p(\zeta, z)$ аналитична по z (и даже рациональна) при $\operatorname{Re} z \geq -1$ для любой фиксированной точки $\zeta \in \partial E_p$.

Замечание 2. Из определения областей D_ζ^p следует, что если ζ' и ζ'' принадлежат одной и той же компоненте границы ∂E_p , то $D_{\zeta'}^p = D_{\zeta''}^p$. Учитывая это, а также тот факт, что компоненты ∂E_p компактны и что правые части неравенств (19) и (20) не зависят от z и непрерывны по ζ , мы заключаем, что $Q_p(\zeta, z)$ можно считать кусочно постоянной по ζ , равномерно относительно z .

Замечание 3. Неравенство (18) означает, что $E_{p-1} \subset \mathbb{C}/D_\zeta^p$, так что оценка (19) выполняется для всех $z \in E_{p-1}$. Кроме того, легко видеть, что $D_\zeta^p \subset \left\{ w \in \mathbb{C}: |w| > \frac{1}{4} |\zeta| \right\}$, так что при $\zeta \in \partial E_p$ неравенство

(19) выполняется также для всех z таких, что $\operatorname{Re} z > -1$ и $|z| \leq \frac{1}{4} |\zeta|$.

Замечание 4. Из определения областей $D_{k,n}^p$ легко получить, что $D_{k,n}^p \cap D_{k',n'}^p = \emptyset$ для допустимых пар (k, n) и (k', n') таких, что или $n \neq n'$ или $n = n'$, но $kk' < 0$.

3°. Две основные леммы. Настоящий пункт является центральным звеном в цепи доказательств теорем 1 и 2.

Лемма 6. Существует аналитическая в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > -1\}$ функция ω , $|\omega(z)| < 2 \exp(|z|^p)$ такая, что

$$1 < \left| \frac{\omega(z)}{\psi(z)} \right| < 2 \quad \text{для } z \in E_1. \quad (21)$$

Доказательство. Здесь и ниже при доказательстве леммы 7 мы предполагаем, что граница ∂E_p ($p = 1, 2$) стандартным образом ориентирована, так что при обходе каждой ее компоненты $\partial E_{k,n}^p$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots; n = n_k + 2m; m = 0, 1, 2, \dots$) внутренность соответствующей компоненты $E_{k,n}^p$ множества E_p остается слева.

Определим теперь аналитическую в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > -1\}$ функцию $\omega_{k,n}$ формулой (см. замечания 1 и 2)

$$\omega_{k,n}(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E_{k,n}^2} [\psi(\zeta) - 1] Q_2(\zeta, z) d\zeta. \quad (22)$$

Полагая еще

$$\psi_{k,n}(z) = \begin{cases} \psi(z) & \text{для } z \in E_{k,n}^2 / \partial E_{k,n}^2, \\ 1 & \text{для } z \in \mathbb{C} / E_{k,n}^2, \end{cases}$$

с учетом формулы Коши получим

$$\omega_{k,n}(z) - \psi_{k,n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E_{k,n}^2} [\psi(\zeta) - 1] \left[Q_2(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta$$

для $z \in \mathbb{C} / \partial E_{k,n}^2$.

Отсюда, поскольку $|\psi(\zeta) - 1| < \frac{1}{|\zeta|} + 1 < \frac{3}{2}$, с учетом (19), (16) и (17) имеем

$$\begin{aligned} |\omega_{k,n}(z) - \psi_{k,n}(z)| &< \frac{1}{4} \int_{\partial E_{k,n}^2} |\psi(\zeta)|^7 d|\zeta| \leq \frac{1}{4} \max_{\zeta \in \partial E_{k,n}^2} |\psi(\zeta)|^7 \int_{\partial E_{k,n}^2} |\zeta|^{-2} d|\zeta| < \\ &< \frac{1}{4} \max_{\zeta \in \partial E_{k,n}^2} |\psi(\zeta)|^8 \quad \text{для } z \in \mathbb{C} / D_{k,n}^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Но если $\zeta, z \in E_{k,n}^2$, то тогда

$$\cos(\rho \arg \zeta) > \cos \frac{1}{2} \varphi > \cos \frac{\pi}{2} \left(\rho - \frac{1}{2} \right) > \cos \frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{Re} \zeta^\rho > 2^{-\frac{1}{2}} |\zeta|^\rho > 2^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{z}{4} \right|^\rho > \frac{1}{5} |z|^\rho,$$

так что $|\psi(\zeta)|^8 < |\psi(z)|$. Это вместе с (23) дает нам оценку

$$\frac{3}{4} < \left| \frac{\omega_{k,n}(z)}{\psi(z)} \right| < \frac{5}{4} \text{ для } z \in E_{k,n}^1. \quad (24)$$

Кроме того, с учетом (16) имеем также

$$\frac{1}{4} |\psi(\zeta)|^2 < \frac{1}{4 |\zeta|^2} < 4^{-n} \text{ для } \zeta \in \partial E_{k,n}^2. \quad (25)$$

Сочетая эту оценку с (23), имеем

$$|\omega_{k,n}(z) - 1| < 4^{-n} \text{ для } z \in C / (D_{k,n}^2 \cup E_{k,n}^2). \quad (26)$$

Из этой оценки следует, что двойной ряд

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} [\omega_{k,n+2m}(z) - 1]$$

сходится равномерно и абсолютно на любом компакте из полуплоскости $|z| \in C: \operatorname{Re} z > -1$. Для этого достаточно заметить, что ряд

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} 4^{-n_k - 2m}$$

очевидно сходится и что любой круг пересекается лишь с конечным числом множеств вида $D_{k,n}^2 \cup E_{k,n}^2$, $n > n_k$.

Теперь искомым функцию ω определим формулой

$$\omega(z) = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \omega_{k,n+2m}(z). \quad (27)$$

В силу сказанного выше, формула (27) определяет функцию, аналитическую по крайней мере, в полуплоскости $\{z \in C: \operatorname{Re} z > -1\}$. В действительности ω является мероморфной в C функцией с полюсами, лежащими на отрицательной вещественной полуоси, однако в дальнейшем этот факт нам не понадобится.

Докажем сначала оценку (21). Пусть $z \in E_1$. Тогда существует целое число $k' \neq 0$ и натуральное число $n' = n_{k'} + 2m$, $m \geq 0$, такое, что $z \in E_{k',n}'$. Неравенство (26) будет выполняться для всех пар $(k, n) \neq (k', n')$, так как всегда $E_1 \subset C / D_{k,n}^2$ (см. замечание 3). Поэтому при $(k, n) \neq (k', n')$ имеем

$$\begin{aligned} \max (|\omega_{k,n}(z)|, |\omega_{k,n}(z)|^{-1}) &\leq 1 + \frac{|\omega_{k,n}(z) - 1|}{1 - |\omega_{k,n}(z) - 1|} < \\ &< 1 + \frac{27 \cdot 4^{-n}}{1 - 4^{-n}} < 1 + \frac{4}{3} 4^{-n}. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $\omega = \frac{2}{3} \omega(z) [\omega_{k',n'}(z)]^{-1}$, учитывая оценку

$$1 + x < e^x < 1 + 3x \text{ при } 0 < x < 1,$$

а также тот факт, что $n_{-k} = n_k + 1$ для $k > 0$, получим

$$\begin{aligned} \max (|w|, |w|^{-1}) &< \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 + \frac{4}{3} \cdot 4^{-n_k - m}\right) < \exp \left(\frac{4}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 4^{-n_k - m} \right) < \\ &< 1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 4^{-n_k - m} = 1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{-n_k}}{1 - 4^{-n_k}} < \\ &< 1 + \frac{4^2}{3} \sum_{j=n_1}^{\infty} 4^{-j} = 1 + \frac{1}{3^2} 4^{-n_1 + 3} < \frac{16}{15}, \end{aligned} \quad (28)$$

так как $n_1 > 4$. Оценка (21) следует теперь из (28) и (24), где $(k, n) = (k', n')$.

Для завершения доказательства леммы остается оценить рост функции ω . С этой целью заметим, что, в силу (23) и (25)

$$|\omega_{k, n}(z)| < 1 + 4^{-n} \quad \text{для } z \in \mathbb{C}/D_{k, n}^2, \quad (29)$$

так как $|\psi_{k, n}(z)| \leq 1$.

Возьмем теперь произвольную точку z , $\operatorname{Re} z > -1$. Если

$$z \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} D_{k, n_k + 2m}^2,$$

то тогда из (29), вполне аналогично неравенству (28), получим, что $|\omega(z)| < 2$. Если же

$$z \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} D_{k, n_k + 2m}^2,$$

то существует такая пара (k', n') , что $z \in D_{k', n'}^2$, причем $n' = n_{k'} + 2m$ и, скажем, $k' > 0$. Согласно замечанию 4, неравенство (29) будет выполняться, по крайней мере, для таких пар (k, n) , что или $k < 0$, или $n \neq n'$. Поэтому на этот раз мы имеем оценку

$$|\omega(z)| \leq 2 \prod_{k > 1}^{n_k < n'} |\omega_{k, n'}(z)|. \quad (30)$$

Оценка величины $|\omega_{k, n'}(z)|$ сверху следует из (22), (20), (16) и (17)

$$\begin{aligned} |\omega_{k, n'}(z)| &\leq 1 + \frac{1}{2} \max_{\zeta \in \partial E_{k, n'}^2} (|\psi(\zeta)|^{-2} |Q_2(\zeta, z)| \int_{\partial E_{k, n'}^2} |\zeta^{-2} d\zeta| < \\ &< 1 + \frac{1}{2} \max_{\zeta \in \partial E_{k, n'}^2} |\psi(\zeta)|^{-2} \frac{302}{\sqrt{\mu_k}} \leq \max_{\zeta \in \partial E_{k, n'}^2} \exp(302 \sqrt{\mu_k} |\zeta|^{-2}). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $|\zeta| < 4|z|$ при $\zeta \in D_{k, n'}^2$ и $z \in D_{k, n'}^2$, а также оценку $\sqrt{\mu_k} < 2^{-10} \alpha_k$, имеем

$$|\omega_{k, n'}(z)| < \exp\left(\frac{4}{3} \alpha_k |z|^{-2}\right).$$

Наконец, из этой оценки и из (30) окончательно получим

$$|\omega(z)| < 2 \exp\left(\frac{4}{3} |z|^{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\right) < 2 \exp(|z|^{\rho}),$$

так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\theta_{k+1} - \theta_k) = \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}.$$

Лемма 6 полностью доказана.

Лемма 7. Существует аналитическая в угле $\left\{z \in \mathbb{C}: |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ функция f , $|f(z)| < \exp(8|z|^{\rho})$ при $|z| \geq 2^n$, такая, что

$$|\varphi(z) - f(z)| < \frac{1}{2} |\psi(z)| \quad \text{для } z \in E_0.$$

Доказательство. Заметим сначала, что для построенной в пункте 2° функции Q_1 имеет место оценка

$$\left|Q_1(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z}\right| < \left|\frac{\psi(\zeta)}{\zeta}\right|^2 \quad \text{при } \zeta \in E_0, \quad (31)$$

справедливая для $z \in E_0$, а также при $|z| \leq \frac{1}{4} |\zeta|$, $\operatorname{Re} z > -1$. Это следует из (19), (16) и замечания 3. Рост функции Q_1 ограничивается, в силу (20), неравенством

$$|Q_1(\zeta, z)| < \exp\left(\frac{1}{3} |\zeta|^{\rho}\right) \quad \text{для } \zeta \in \partial E_1, \operatorname{Re} z > -1, \quad (32)$$

так как $\sqrt{\mu_k} < 2^{-10} \alpha_k < 2^{-10}$.

Обозначим теперь

$$\Gamma_n = \bigcup_{(b, m)}^{n_k + 2m < n} \partial E_{k, n_k + 2m} \quad \text{для } n > n_1,$$

так что Γ_n состоит из конечного числа замкнутых контуров и

$$\partial E_1 = \bigcup_{n=n_1}^{\infty} \Gamma_n.$$

Рассмотрим последовательность (H_n) аналитических в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > -1\}$ функций, определенных формулой

$$H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)} Q_1(\zeta, z) d\zeta, \quad (33)$$

где ω — построенная в лемме 6 функция (см. также замечания 1 и 2). Возьмем натуральное число $N > n_1$ и пусть $|z| \leq 2^N$, $m > n \geq N + 2$. Тогда z лежит вне тех компонент множества E_1 , которые ограничены контуром Γ_m/Γ_n . Поэтому по теореме Коши

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m/\Gamma_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

так как подынтегральная функция аналитична по ζ на E_1 . Отсюда, учитывая (33) и считая дополнительно, что $\operatorname{Re} z \geq -1$, имеем

$$H_m(z) - H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m/\Gamma_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)} \left[Q_1(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta.$$

Из этой формулы, учитывая оценку

$$|z| \leq 2^N \leq 2^{n-2} < \frac{1}{4} |\zeta| \quad \text{для } \zeta \in \Gamma_m/\Gamma_n,$$

в силу неравенств (31), (21), (16) и (17), получим

$$|H_m(z) - H_n(z)| < \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E_1/\Gamma_n} |\zeta^{-2} d\zeta| \rightarrow 0 \quad \text{при } \zeta \in \Gamma_m/\Gamma_n. \quad (34)$$

Отсюда следует, что последовательность (H_n) сходится (равномерно на любом компакте) к некоторой функции H , аналитической в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1\}$.

Вполне аналогично, учитывая формулу

$$\frac{\varphi(z)}{\omega(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{для } z \in E_0, |z| < 2^n,$$

для произвольной точки $z \in E_0$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \left| H(z) - \frac{\varphi(z)}{\omega(z)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| H_n(z) - \frac{\varphi(z)}{\omega(z)} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)} \left[Q_1(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E_1} |\zeta^{-2}| < \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (35)$$

Оценим теперь рост функции H . Возьмем произвольную точку z с условием, что $\operatorname{Re} z > -1$ и $|z| \geq 2^n$. Пусть $2^{N-1} \leq |z| < 2^N$. Полагая в (34) $n = N+2$ и устремляя m к бесконечности, имеем

$$\begin{aligned} |H(z)| &< |H_{N+2}(z)| + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E_1/\Gamma_{N+2}} |\zeta^{-2} d\zeta| \leq \\ &\leq \max_{\zeta \in \Gamma_{N+2}} \left\{ \frac{\zeta^2 \varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)} Q_1(\zeta, z) \right\} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{N+2}} |\zeta^{-2} d\zeta| + \int_{\partial E_1/\Gamma_{N+2}} |\zeta^{-2} d\zeta|. \end{aligned} \quad (35')$$

Однако в силу (21) и (16)

$$\left| \frac{\zeta^2 \varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)} \right| < |\psi(\zeta)|^{-1} \leq \exp(4\mu |\zeta|^\mu) \quad \text{для } \zeta \in E_1,$$

где $\mu = \max_{1 \leq k \leq \infty} (\mu_k)$.

С учетом этого неравенства и (32) из (35') следует

$$|H(z)| < \max_{\zeta \in \Gamma_{N+2}} \left\{ \exp \left[\left(4\mu + \frac{1}{3} \right) |\zeta|^p \right] \right\} \frac{1}{\pi} \int_{\partial E_1} |\zeta|^{-2} d\zeta.$$

Отсюда, учитывая (17) и заметив, что

$$|\zeta| \leq \frac{9}{8} 2^{N+3} < 18|z| \quad \text{для } \zeta \in \Gamma_{N+2},$$

окончательно получаем (поскольку $\mu < 2^{-11}$)

$$|H(z)| < \frac{1}{2} \exp [(4 \cdot 18 \mu + 6) |z|^p] \leq \frac{1}{2} \exp (7 |z|^p). \quad (36)$$

Полагая наконец

$$f(z) = H(z) \omega(z), \quad \text{если } \operatorname{Re} z > -1,$$

мы видим, что, согласно лемме 6 и неравенствам (35), (21) и (36), функция f удовлетворяет всем условиям леммы 7.

4°. Завершение доказательства теоремы 1 и замечания. Применим лемму 5 к построенной в лемме 7 функции f , полагая при этом $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\beta = \pi$. Мы получаем целую функцию G_p порядка p и нормального типа, удовлетворяющую неравенству

$$|G_p(z) - \varphi(z)| < |\psi(z)| \quad \text{для } z \in E_0. \quad (37)$$

Функция G_p является искомой целой функцией, множество дефектных значений которой содержит последовательность $(a_j)_{j=1}^{\infty}$. В самом деле, в силу определения множества E_0 и функции φ для любого $f = 1, 2, \dots$ при $r > 2^{2^j}$ существует дуга $\gamma_{j,r} \subset E_0 \cap \{z \in \mathbb{C}: |z| = r\}$ (см. пункт 1°) такая, что дл. $\gamma_{j,r} = \frac{\alpha_j}{2} r$ и $\varphi(z) = a_j$ при $z \in \gamma_{j,r}$. Кроме того, так как $|\arg z| < \frac{\alpha}{2}$ при $z \in E_0$, то имеем

$$\operatorname{Re} z^p > |z|^p \cos(p \arg z) > |z|^p \cos \frac{1}{2} p\alpha > \frac{1}{2} |z|^p \quad \text{для } z \in E_0.$$

Таким образом, из (37) получим

$$|G_p(z) - a_j| < \exp(-\mu_j \operatorname{Re} z^p) < \exp\left(-\frac{1}{2} \mu_j r^p\right) \quad \text{для } z \in \gamma_{j,r}, r > 2^{2^j}. \quad (38)$$

Отсюда в общепринятых неваляниновских обозначениях имеем

$$\begin{aligned} m(r, a_j) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|G_p(re^{i\theta}) - a_j|} d\theta > \frac{\alpha_j}{4\pi} \inf_{z \in \gamma_{j,r}} \log \frac{1}{|G_p(z) - a_j|} > \\ &> \frac{\alpha_j \mu_j}{8\pi} r^p > \mu_j^2 r^p \quad \text{при } r > 2^{2^j}. \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь заметим, что существует такое число σ , $0 < \sigma < +\infty$, что характеристика $T(r)$ функции G_p удовлетворяет неравенству

$$T(r) < \sigma r^\rho \quad \text{при } r > 1.$$

Учитывая это, в силу (39), для величины дефекта $\delta(a_j)$ получим оценку

$$\delta(a_j) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a_j)}{T(r)} > \frac{1}{\sigma} \mu_j^2 > 0.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Замечание 5. Анализ построенного выше примера дает некоторые основания предполагать, что величины дефекта $\delta(a) = \delta(a, G)$ для произвольной целой функции G конечного порядка удовлетворяют условию

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \left[\log \frac{e}{\delta(a, G)} \right]^{-1} < +\infty.$$

Это условие дальше усилить нельзя, поскольку в нашем примере

$$\left[\log \frac{e}{\delta(a, G)} \right]^{-1} > \text{const} \cdot a_j > 0,$$

где от чисел a_j фактически требуется лишь, чтобы ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ сходилась.

Замечание 6. Для того чтобы получить целую функцию G бесконечного порядка, множество дефектных значений которой содержит последовательность $(a_j)_1^{\infty}$, достаточно положить

$$G(z) = G_p(e^z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где G_p — построенная нами в теореме 1 целая функция порядка $\rho > \frac{1}{2}$.

Замечание 7. Известно [6], что для произвольной трансцендентной целой функции G имеет место „обобщенное“ соотношение дефектов

$$\sum_a \delta(a, G) \leq 1,$$

где сумма берется по всем различным многочленам a . В связи с этим интересно отметить, что теорема 1 остается в силе и в том случае, когда числа a_j заменены произвольными многочленами. Доказательство сохраняет силу без всяких изменений.

5°. Доказательство теоремы 2. Пусть натуральное число N удовлетворяет неравенствам

$$\gamma + 1 \leq N < 2(\gamma + 1).$$

Полагая $\rho = \frac{\gamma + 1}{N}$, имеем что $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$. Пусть G_p — целая функция,

построенная в пункте 4° для числа ρ и последовательности $(a_j)_{j=1}^{\infty}$. Мы докажем, что условиям теоремы 2 удовлетворяет функция

$$F_{\tau} = G_{\rho} \circ \lambda, \tag{40}$$

где

$$\lambda(z) = \frac{1}{(1-z)^N} \text{ при } |z| < 1.$$

В дальнейшем мы воспользуемся обозначениями пунктов 1° и 2° (в особенности — определением множества E_0 и функций φ и ψ). Кроме того, аналогично введенным там обозначениям, положим

$$\Delta_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg(1-z) + \frac{\theta_k}{N} \right| \leq \frac{\alpha_k}{4N} \right\},$$

$$\sigma_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : 2^{-\frac{n+1}{N}} \leq |z-1| \leq 2^{-\frac{n}{N}} \right\},$$

$$E_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} E_{k, n_k+2m}, \text{ где } E_{k, n} = \Delta_k \cap \sigma_n.$$

Множество E_0 лежит в единичном круге. Легко видеть также, что $\lambda(E_0) = E_{\rho}$. Пользуясь этим, на множестве E_0 определим функции $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$, полагая $\bar{\varphi} = \varphi \circ \lambda$, $\bar{\psi} = \psi \circ \lambda$. Тогда из (37) и (40) имеем

$$|F_{\tau}(z) - \bar{\varphi}_j^{\tau}(z)| < |\bar{\psi}(z)| \text{ для } z \in E_0. \tag{41}$$

Возьмем теперь произвольное натуральное число j и пусть $r \in (0, 1)$. Положим

$$e_{j,r} = E_0 \cap (\Delta_j \cup \Delta_{-j}) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\},$$

$$l_{j,r} = \Delta_j \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}.$$

Нам сначала надо оценить снизу длину $e_{j,r}$ при $r \rightarrow 1$. Заметим, что множество $e_{j,r}$ состоит из конечного числа круговых дуг, число которых может быть больше единицы даже при r сколь угодно близких к 1. Тем не менее выполняется условие

$$\text{дл. } e_{j,r} = \text{дл. } l_{j,r} \text{ при } r \in (r_j, 1), \tag{42}$$

где число $r_j \in (0, 1)$ определяется из условия, что при $r_j \leq |z| < 1$ и $z \in \Delta_j$ выполняется неравенство $|z-1| \leq 2^{-\frac{n_j+1}{N}}$.

Равенство (42) является следствием следующего „зеркального“ свойства множества E_0 : при зеркальном (относительно вещественной оси) отображении внутренность образа множества $E^- = E_0 \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\}$ лежит в дополнении к множеству $E^+ = E_0 \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$. При этом объединение зеркального образа множества $E^- \cap \Delta_{-j}$ с множеством $E^+ \cap \Delta_j$ заполняет круговой сектор $\Delta_j \cap \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 2^{-\frac{n_j+1}{2}}\}$. Таким образом, вопрос сводится к оценке длины круговой дуги $l_{j,r}$. С этой

целью возьмем $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и пусть $\sin \theta < r < 1$. Определим число $\beta = \beta_0(r) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ из условия

$$re^{i\beta} \in \{z \in \mathbb{C}: \arg(1-z) = -\theta\}.$$

Из треугольника с вершинами 0, 1, $re^{i\beta}$ можно усмотреть, что

$$\sin \theta = r \sin(\beta + \theta),$$

или

$$\frac{1-r}{r} \sin \theta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right),$$

откуда

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\beta_0(r)}{1-r} = \operatorname{tg} \theta.$$

Если стороны Δ_j образуют с полуосью $(-\infty, 1)$ острые углы θ_1 и θ_2 , $\theta_1 < \theta_2$, то тогда, с учетом (42), имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\Delta \lambda_{j,r}}{1-r} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{r}{1-r} [\beta_0(r) - \beta_1(r)] = \operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1 = c_j > 0. \quad (43)$$

Далее, легко доказать оценку

$$|\lambda(z)|^{\mu} = |1-z|^{-\tau-1} > 2^{-\tau-1} (1-|z|)^{-\tau-1}$$

при $|z-1| < \frac{1}{4}$ и $|\arg(1-z)| \leq \frac{\pi}{4}$ (в частности, при $z \in E_0$). С учетом

этой оценки, согласно определению функций φ и ψ из неравенства (41), аналогично (38) имеем

$$|F_{\tau}(z) - a_j| < \exp[-\mu_j 2^{-\tau-2} (1-r)^{-\tau-1}] \quad \text{для } z \in e_{j,r}.$$

Отсюда и из (43) для неваняниновской функции приближения m получаем оценку

$$\begin{aligned} m(r, a_j, F_{\tau}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|F_{\tau}(re^{i\theta}) - a_j|} d\theta > \frac{\Delta \lambda_{j,r}}{2\pi r} \mu_j 2^{-\tau-2} (1-r)^{-\tau-1} > \\ &> \frac{\tau_j}{(1-r)^{\tau}} \quad \text{для } r \in [R_j, 1), \end{aligned} \quad (44)$$

где τ_j и R_j не зависят от r , $\tau_j > 0$, $R_j \in (r_j, 1)$.

Нам надо еще оценить характеристику $T(r, F_{\tau})$. Поскольку $F_{\tau} = G_{\rho} \circ \lambda$, где G_{ρ} — целая функция порядка ρ и нормального типа, существует константа $\sigma > 0$ такая, что

$$|F_{\tau}(z)| < \exp\{\sigma[|1-z|^{-\tau-1} + 1]\} \quad \text{при } |z| < 1.$$

Отсюда для $r \in [0, 1)$ имеем

$$T(r, F_{\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |F_{\tau}(re^{i\theta})| d\theta < \sigma + \frac{\sigma}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{|1 - re^{i\theta}|^{\tau+1}}.$$

Однако при $\theta \in [0, \pi]$ и $r \in \left[\frac{1}{4}, 1\right)$

$$|1 - re^{i\theta}|^2 = (1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2} > (1-r)^2 + r \left(\frac{2\theta}{\pi}\right)^2 > \frac{1}{2} \left(1 - r + \frac{\theta}{\pi}\right)^2,$$

так что

$$T(r, F_\gamma) < \sigma + (2^{\gamma+1}\sigma) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1-r+\pi^{-1}\theta)^{\gamma+1}} < \sigma + \frac{\sigma}{\gamma} 2^{\gamma+1} \frac{1}{(1-r)^\gamma}.$$

Отсюда и из (44) окончательно получаем

$$\delta(a_j, F_\gamma) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{m(r, a_j, F_\gamma)}{T(r, F_\gamma)} > \frac{\gamma}{2^{\gamma+1}\sigma} \tau_j > 0.$$

Теорема 2 полностью доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 15.VII.1970.

Ն. Ն. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ. Սահմանափակ ան ունեցող ամբողջ և անալիտիկ ֆունկցիաներ, որոնց դեֆեկտային արժեքների բազմությունը անվերջ է (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում բերվում է մանրամասն շարադրանքը [1] աշխատանքում հեղինակի ստացած այն թեորեմայի, որ ցանկացած $\rho > \frac{1}{2}$ թվի համար գոյություն ունի ըկարգի և նորմալ տիպի ամբողջ ֆունկցիա, որի դեֆեկտային արժեքների բազմությունը պարունակում է կամայական նախորդ տված հաշվելիից ոչ ավելի բազմություն: Զուգընթաց ապացուցվում է նման թեորեմա շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների համար:

N. U. ARAKELIAN. Entire and analytical functions of limited growth with infinite number of defective values (summary)

Complete proof of the theorem announced earlier in [1] is presented. The theorem states that for each $\rho > 1/2$ there exists an entire function of order ρ and of normal type the set of defective values of which contains any given countable set of complex numbers. An analogous theorem for functions holomorphic in the unit circle is also proved

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. У. Аракелян. Целые функции конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений, ДАН СССР, 170, № 5, 1966, 999—1002.
2. R. Nevanlinna. Über Riemansche Flächen mit endlich vielen Vindungspunkten, Acta Math., 58, 1932, 295—373.
3. L. Ahlfors. Über eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzendenter Functionen, Acta Math., 58, 1932, 375—406.
4. А. А. Гольдберг. О дефектах мероморфных функций, ДАН СССР, [98, 1954, 893—895.
5. А. А. Гольдберг. О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка, Укр. матем. ж. 11, 1959, 438—443.
6. У. Хейман. Мероморфные функции, Изд. „Мир“, М., 1966.
7. R. Nevanlinna. La théoreme Picard—Borel et la theorie des fonctions meromorphes, Paris, 1929.

8. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
9. *Г. Виттих*. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, Физматгиз, М., 1960.
10. *Г. М. Голузин*. Геометрическая теория функций комплексного переменного, Изд. „Наука“, М., 1966.
11. *С. Н. Мерелян*. О полноте систем аналитических функций, УМН, VIII, вып. 4 (56), 1953, 3—63.
12. *С. Н. Мерелян*. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.
13. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1966.