ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 6, 1970 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

ФАКТОРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ В КОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ

1°. Основная теорема алгебры о разложении на линейные множители полиномов посредством их нулей была распространена на целые функции Вейерштрассом и Адамаром. Вместо конечных произведений основной теоремы алгебры, в случае целых функций, ими строились бесконечные произведения со специальными множителями, обеспечивающими их сходимость во всей конечной плоскости.

Эти ставшие классическими результаты для целых функций конечного роста имеют особенно простые и законченные формулировки (см., напр., [1], гл. VII).

Дальнейшее продвижение в этом направлении было достигнуто в работе Р. Неванлинны [2, 3], где была установлена теорема о факторизации для мероморфных на всей конечной плоскости функций с характеристикой конечного порядка роста.

Для любого натурального $q \geqslant 0$ определим первичные множители Вейерштрасса $E(z; q)$, положив

$$E(z; 0) = 1 - z, \quad E(z; q) = (1 - z) \exp\left\{\sum_{j=1}^{q} \frac{z^j}{j}\right\}. \tag{1}$$

Тогда указанная теорема заключается в следующем.

Теорема A*. *Пусть $F(z)$ мероморфна в конечной плоскости с отличными от $z=0$ нулями $\{a_\mu\}$ и полюсами $\{b_\nu\}$. Предположим, что при некотором натуральном $q \geqslant 0$ выполняется одно из следующих двух условий:*

$$\lim_{R\to+\infty} \sup \frac{T(R; F)}{R^{q+1}} = 0 \tag{2}$$

или

$$\lim_{R\to+\infty} \inf \frac{T(R; F)}{R^{q+1}} = 0. \tag{3}$$

Тогда функция $F(z)$ может быть представлена в виде

$$F(z) = z^\lambda e^{P_q(z)} \lim_{R\to+\infty} \frac{\prod\limits_{0<|a_\mu|<R} E\left(\frac{z}{a_\mu}; q\right)}{\prod\limits_{0<|b_\nu|<R} E\left(\frac{z}{b_\nu}; q\right)} \quad (|z|<\infty), \tag{4}$$

* См. также [4], теорему 1.9.

где $|\lambda|$ — *порядок нуля* (*при* $\lambda \geqslant 1$) *или полюса* (*при* $\lambda \leqslant -1$) *для* $F(z)$ *в точке* $z=0$, $P_q(z)$ — *некоторый полином степени* $\leqslant q$, *а предел в* (4) *берется по всем* $R \to +\infty$ *в случае* (2) *и по некоторой последовательности значений в случае* (3).

Эта теорема доказывается методом, восходящим к Р. Неванлинна [5], и заключается в том, что в условиях теоремы представляется возможным совершить предельный переход при $R \to +\infty$, а затем $q+1$-кратное интегрирование в формуле, которая получается путем $q+1$-кратного дифференцирования формулы Иенсена-Неванлинны, записанной для произвольного круга $|z| < R$.

Ввиду этого метод этот, очевидно, неприменим к мероморфным функциям бесконечного порядка роста, т. е. к функциям, для которых $T(R; F)$ ни при каком натуральном $q \geqslant 0$ не удовлетворяет условиям вида (2) или (3).

2°. Для функций, аналитических вне данного множества E ее особых точек, в частности, для функций, аналитических в круге конечного радиуса, некоторые аналоги построений Вейерштрасса и Адамара встречаются в работах Е. Пикара [6] и В. Голубева [7]. Но несколько позже в этом направлении наиболее глубокий и полный результат относительно факторизации мероморфных в круге $|z|<1$ функций был установлен Р. Неванлинной.

Как хорошо известно, определив с помощью характеристической функции $T(r; F)$ класс N как множество мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \{T(r; F)\} < +\infty, \tag{5}$$

Р. Неванлинна установил свою фундаментальную теорему факторизации класса N (см. [3], гл. VII).

3°. В давних работах автора [8, 9], по-видимому, была сделана первая попытка факторизации мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых характеристика $T(r; F)$ подчинена условию вида

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}\, T(r; F)\, dr < +\infty \quad (0 < \alpha < +\infty). \tag{6}$$

Значительно позже автор возвратился к этой проблеме в более общей постановке (см. [10], гл. IX) и, пользуясь аппаратом дробных интегро дифференциальных операторов в смысле Римана-Лиувилля $D^{-\alpha}$ $(-1 < \alpha < +\infty)$, построил теорию классов N_α $(-1 < \alpha < +\infty)$, мероморфных в круге $|z|<1$ функций и установил общую теорему их факторизации в духе теоремы Р. Неванлинны, содержащую в себе эту теорему в качестве специального случая, когда параметр $\alpha=0$.

Наконец, метод и идея, лежащие в основе теории классов N_α, получили дальнейшее развитие и завершение в недавнем исследовании автора [11], где удалось построить полную теорию факторизации функций, мероморфных в круге, путем систематического применения аппарата обобщенных операторов типа Римана-Лиувилля $L^{(\omega)}$, введенных и изученных им предварительно в работе [12].

4°. Настоящая работа посвящена проблеме факторизации функций, мероморфных во всей конечной плоскости, и, как по своей идее, так и по методу, она является дальнейшим приложением и расширением идеи и метода указанного выше исследования автора. По этой причине нам необходимо привести здесь беглый обзор и формулировки некоторых основных результатов работ [11, 12], на которые нам придется существенно опираться при изложении данной статьи.

Обобщенный оператор типа Римана-Лиувилля $L^{(\omega)}$ ассоциируется с произвольной функцией $\omega(x)$ класса Ω, определяемой условиями

1) $\omega(x)$ *положительна* и *непрерывна* на $[0, 1)$, причем $\omega(0)=1$,

2) $\varlimsup\limits_{x\to+0} \{|\omega(x)-1|\cdot x^{-1}\}<+\infty$,

3) $\displaystyle\int\limits_0^1 \omega(x)\,dx<+\infty.$

На соответствующих классах допустимых функций $\varphi(r)$, $r\in(0, 1)$ оператор $L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}$ определяется следующим образом:

$$L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}\equiv-\frac{d}{dr}\left\{r\int\limits_0^1\varphi(r\cdot\tau)\,dp(\tau)\right\},\quad r\in(0, 1), \tag{7}$$

где непрерывная на $[0, 1)$ функция $p(\tau)$ имеет вид

$$p(0)=1,\quad p(\tau)=\tau\int\limits_\tau^1\frac{\omega(x)}{x^2}\,dx,\quad \tau\in(0,1]. \tag{8}$$

В предположении, что $\omega'(x)\in L(0, 1)$ в классе кусочно непрерывных на $[0, 1)$ функций $\varphi(r)$, оператор $L^{(\omega)}$ допускает простое представление

$$L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}=\omega(1)\cdot\varphi(r)-\int\limits_0^1\varphi(r\cdot\tau)\,\omega'(\tau)\,d\tau,\quad r\in(0, 1). \tag{9}$$

Применение оператора $L^{(\omega)}$ к функции вида r^λ $(\lambda>0)$ приводит к формулам

$$L^{(\omega)}\{r^\lambda\}=\Delta(\lambda)\,r^\lambda\quad(\lambda>0), \tag{10}$$

где

$$\Delta(0)=1,\quad \Delta(\lambda)=\lambda\int\limits_0^1\omega(x)\,x^{\lambda-1}\,dx\quad(0<\lambda<+\infty). \tag{11}$$

Последовательность положительных чисел

$$\Delta_k=\Delta(k)\quad(k=0, 1, 2,\cdots) \tag{12}$$

позволяет определить аналитическую в круге $|z|<1$ функцию

$$S(z;\omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}. \tag{13}$$

Наряду с ней вводятся также функции

$$V_\omega(re^{i\varphi};\zeta)=L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right\}, \tag{14}$$

$$W_\omega(z;\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S(e^{-i\theta}z;\omega)\,V_\omega(e^{i\theta};\zeta)\,d\theta\equiv$$

$$\equiv\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx-\right.$$

$$\left.-\bar\zeta^k\int_{|\zeta|}^{1}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{z^k}{\Delta_k}\quad(|z|<1,\ 0<|\zeta|\leqslant 1), \tag{15}$$

$$A_\omega(z;\zeta)\equiv\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-W_\omega(z;\zeta)\}\quad(|z|<1,\ 0<|\zeta|\leqslant 1). \tag{16}$$

Эти функции позволяют установить целый класс формул типа Иенсена-Неванлинны, ассоциированных с произвольной функцией $\omega(x)\in\Omega$.

Справедлива следующая теорема, специальный случай которой, когда $\omega(x)\equiv 1$, приводит нас к классической формуле Иенсена-Неванлинны.

Теорема Б. *Пусть $F(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$, в окрестности $z=0$ имеет разложение вида*

$$F(z)=c_\lambda z^\lambda+c_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\cdots\quad(c_\lambda\neq 0)$$

и имеет нули $\{a_\mu\}$ и полюсы $\{b_\nu\}$, отличные от $z=0$.

Тогда для любой функции $\omega(x)\in\Omega$ и для любого $\rho\ (0<\rho<1)$ справедлива формула

$$\operatorname{Log}F(z)=i\operatorname{Arg}c_\lambda+\lambda k_\omega+\lambda\log\frac{z}{\rho}+$$

$$+\sum_{0<|a_\mu|<\rho}\log A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{a_\mu}{\rho}\right)-\sum_{0<|b_\nu|<\rho}\log A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{b_\nu}{\rho}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(e^{i\theta}\frac{z}{\rho};\omega\right)L^{(\omega)}\{\log|F(\rho e^{i\theta})|\}\,d\theta\quad(|z|<\rho), \tag{17}$$

где

$$k_\omega=\int_0^1\frac{1-\omega(x)}{x}\,dx. \tag{18}$$

Как в теории Р. Неванлинны, так и здесь общая формула (17) при $z=0$ естественным образом приводит к определению функции

$$T_\omega(r; F) \equiv m_\omega(r; F) + N_\omega(r; F), \tag{19}$$

названной нами ω-характеристикой, где

$$m_\omega(r; F) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)} \{\log |F(re^{i\vartheta})|\} \, d\vartheta, \quad L_{(+)}^{(\omega)} = \max\{L^{(\omega)}, 0\}, \tag{20}$$

$$N_\omega(r; F) = \int_0^r \frac{n(t; \infty) - n(0, \infty)}{t} \, \omega\left(\frac{t}{r}\right) dt + n(0; \infty)\{\log r - k_\omega\}, \tag{21}$$

а $n(t; \infty)$ — числовая функция полюсов $F(z)$.

Наконец, с каждой функцией $\omega(x) \in \Omega$ ассоциируется класс $N\{\omega\}$ как множества мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \{T_\omega(r; F)\} < +\infty. \tag{22}$$

Важное семейство функций класса $N\{\omega\}$ дается в следующей теореме.

Теорема В. *Пусть $\omega(x) \in \Omega$ и $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k| \leqslant |z_{k+1}|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел.*

1°. *Для сходимости бесконечного произведения*

$$B_\omega(z; z_k) \equiv B_\omega(z) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\omega(z; z_k) \tag{23}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{1} \omega(x) \, dx < +\infty. \tag{24}$$

2°. *Для любого сходящегося произведения $B_\omega(z)$ имеем*

$$B_\omega(z) \in N\{\omega\} \quad \text{и} \quad B_\omega^{-1}(z) \in N\{\omega\}. \tag{25}$$

Наконец, наиболее важные утверждения теории факторизации функций, мероморфных в круге, можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема Г. 1°. *Класс $N\{\omega\}$ совпадает с множеством функций, допускающих в круге $|z|<1$ представление вида*

$$F(z) = e^{i\gamma + \lambda k_\omega} z^\lambda \frac{B_\omega(z; a_\mu)}{B_\omega(z; b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z; \omega) \, d\psi(\theta)\right\}, \tag{26}$$

где

$$\sum_{(\mu)} \int_{|a_\mu|}^{1} \omega(x) \, dx < +\infty, \quad \sum_{(\nu)} \int_{|b_\nu|}^{1} \omega(x) \, dx < +\infty, \tag{27}$$

$\psi(\theta)$ — *произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на* $[0, 2\pi]$, $\lambda \gtrless 0$ — *любое целое*, γ — *любое вещественное число.*

2°. *Для любой мероморфной в круге* $|z|<1$ *функции* $F(z)$ *существует некоторая* $\omega_F(x) \in \Omega$ *такая, что* $F(z) \in N\{\omega_F\}$.

Утверждение 1° этой теоремы в специальном случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, совпадает с основной теоремой Р. Неванлинны о факторизации класса N.

5°. Как указывалось уже выше, в настоящей работе путем дальнейшего расширения и обобщения метода нашего исследования [11] приводится принципиально новый способ решения проблемы факторизации функций, мероморфных во всей конечной плоскости, и, в частности, целых функций.

С этой целью в § 1 определяется класс Ω_∞, как множество функций $\omega(x)$, подчиненных условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и не возрастает на полуоси $[0, +\infty)$, причем $\omega(0)=1$,

2) $$\limsup_{x \to +0} \{|\omega(x)-1|\, x^{-1}\} < +\infty,$$

3) $$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < +\infty.$$

Далее, для любого R $(0<R<+\infty)$ с каждой функцией $\omega(x) \in \Omega_\infty$ ассоциируется оператор $L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}$ в классах допустимых функций, определенных на интервале $(0, R)$.

Посредством оператора $L_R^{(\omega)}$ устанавливаются аналоги формул Коши, Шварца и Пуассона для круга $|z|<R$ (теоремы 1 и 2) и приводится обобщение теоремы Б на случай функций, мероморфных в конечной плоскости (теорема 3). На этом пути вводятся функции $C_R(z; \omega)$, $S_R(z; \omega)$, $W_\infty^{(R)}(z; \zeta)$ и $A_\infty^{(R)}(z; \zeta)$, переходящие в соответствующие вышеупомянутые функции $C(z; \omega)$, $S(z; \omega)$ и $W_\infty(z; \zeta)$ и $A_\infty(z; \zeta)$ при $R=1$.

В § 2 для мероморфной в конечной плоскости функции $F(z)$ приводится определение функций $\tilde{m}_\infty(R; F)$, $\tilde{N}_\infty(R; F)$ и $\tilde{T}_\infty(R; F)$—аналогов тех же упомянутых выше функций, введенных для круга. Далее приводятся некоторые важные свойства и оценки для функции $\tilde{T}_\infty(R; F)$, которую мы вновь называем ω-характеристикой (теоремы 4, 5 и 6).

Наконец, в § 3 приводится определение класса $N_\infty\{\omega\}$ мероморфных в конечной плоскости функций, аналогичное определению класса $N\{\omega\}$. А именно: $F(z) \in N_\infty\{\omega\}$, если

$$\sup_{0<r<+\infty} \{\tilde{T}_\infty(r; F)\} < +\infty. \tag{28}$$

В лемме 1 указывается необходимое условие для нулей $\{a_\mu\}$ и полюсов $\{b_\nu\}$, если $F(z) \in N_\infty\{\omega\}$. Эти условия должны сыграть важную роль при исследовании бесконечных произведений вида

$$\prod_{0<|a_\mu|<\infty} A_\infty^{(\omega)}(z; a_\mu), \quad \prod_{0<|b_\nu|<\infty} A_\infty^{(\omega)}(z; b_\nu). \tag{29}$$

В настоящей статье этого вопроса мы касаться не будем.

В заключение параграфа доказывается основная теорема 7 о факторизации функций классов $N_\infty\{\omega\}$ и теорема 8 о факторизации произвольных мероморфных в конечной плоскости функций. Отметим, что теорема 7, будучи по своей формулировке близкой к теореме А. Р. Неванлинны, одновременно является хотя и не полным, но довольно близким аналогом общей теоремы Г о факторизации функций, мероморфных в круге.

§ 1. Формула типа Иенсена-Неванлинны

1.1. (а) Обозначим через Ω_∞ множество функций $\omega(x)$, непрерывных на полуоси $[0, +\infty)$ и подчиненных следующим условиям:

1) $\omega(x)$ *положительна и не возрастает на полуоси* $[0, +\infty)$, причем $\omega(0)=1$,

2) $$\lim_{r\to+0} \sup \{|\omega(x)-1|\, x^{-1}\} < +\infty, \tag{1.1}$$

3) $$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < +\infty. \tag{1.2}$$

Для любого R $(0<R<+\infty)$ определим последовательность положительных чисел $\{\Delta_n(R)\}_0^\infty$, положив

$$\Delta_0(R)=1, \quad \Delta_n(R)=n\int_0^R \omega(x)\cdot x^{n-1}\, dx \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{1.3}$$

Заметим, что поскольку $\omega(x)\leqslant\omega(0)=1$ $(0\leqslant x<+\infty)$, при $n\geqslant1$

$$\omega(R)\cdot R^n\leqslant\Delta_n(R)\leqslant R^n,$$

будем иметь

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\Delta_n(R)}=R. \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что степенной ряд

$$C_R(z; \omega)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Delta_n(R)}=1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\Delta_n(R)} \quad (|z|<R) \tag{1.5}$$

определяет функцию $C_R(z; \omega)$, аналитическую в круге $|z|<R$.

б) Пусть функция $\varphi(r)$ непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$ и обладает кусочно непрерывной производной $\varphi'(r)$, суммируемой на любом отрезке $[0, R]$ $(0<R<+\infty)$. Тогда для любой функции $\omega(x)\in\Omega_\infty$ и при любом R $(0<R<+\infty)$ на промежутке $0\leqslant r\leqslant1$ можно определить оператор

$$L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}\equiv\varphi_{(\omega)}(r;\ R)\equiv$$

$$\equiv\varphi(0)+r\int_0^R\varphi'(r\cdot\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau. \tag{1.6}$$

Функция $\varphi_{(\omega)}(r;\ R)$ непрерывна на промежутке $0\leqslant r\leqslant 1$ и поэтому ее значение при $r=1$

$$\varphi_\omega(R)\equiv\varphi_{(\omega)}(1;\ R)\equiv$$

$$\equiv\varphi(0)+\int_0^R\varphi'(\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau \tag{1.7}$$

непрерывна на полуоси $0\leqslant R<+\infty$.

Легко проверить, что справедливы формулы

$$L_R^{(\omega)}\{r^n\}=\Delta_n(R)\,r^n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{1.8}$$

Отметим далее, что как невозрастающая функция, $\omega(\tau)$ почти всюду на $[0,+\infty)$ обладает производной $\omega'(\tau)$, суммируемой на любом отрезке $[0,\ R]$ $(0<R<+\infty)$. Поэтому после интегрирования по частям формулы (1.6) и (1.7) могут быть записаны также в виде

$$L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}=\omega(R)\,\varphi(Rr)-$$

$$-\int_0^R\varphi(r\tau)\,\omega'(\tau)\,d\tau\quad(0\leqslant r\leqslant 1), \tag{1.6'}$$

$$\varphi_\omega(R)=L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}|_{r=1}=\omega(R)\,\varphi(R)-$$

$$-\int_0^R\varphi(\tau)\,\omega'(\tau)\,d\tau\quad(0\leqslant R<+\infty). \tag{1.7'}$$

Отметим, наконец, что еще одно представление оператора $L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}$ можно получить, вводя в рассмотрение функцию

$$p_R(0)=1,\ p_R(\tau)=\tau\int_\tau^R\frac{\omega(x)}{x^2}\,dx\quad(0<\tau\leqslant R). \tag{1.8'}$$

Заметив, с одной стороны, что справедливо тождество

$$p_R(\tau)-\tau p_R'(\tau)=\omega(\tau)\quad(0<\tau<R),$$

из (1.6) мы имеем при $0<r\leqslant 1$

$$L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}=\varphi(0)+\int_0^{Rr}\varphi'(t)\,\omega\left(\frac{t}{r}\right)dt=$$

$$=\varphi(0)+\int^{Rr}\varphi'(t)\left\{p_R\left(\frac{t}{r}\right)-\frac{t}{r}\,p_R'\left(\frac{t}{r}\right)\right\}dt=$$

$$=\frac{d}{dr}\left\{r\varphi(0)+r\int_0^{Rr}\varphi'(t)\,p_R\left(\frac{t}{r}\right)dt\right\}, \tag{1.9}$$

ввиду того, что $p_R(R)=0$.

С другой стороны, интегрированием по частям получим

$$-r\int_0^R\varphi(\tau\cdot r)\,dp_R(\tau)=\varphi(0)\,r+r^2\int_0^R\varphi'(r\cdot\tau)\,p_R(\tau)\,d\tau=$$

$$=\varphi(0)\,r+r\int_0^{Rr}\varphi'(t)\,p_R\left(\frac{t}{r}\right)dt \quad (0<r\leqslant 1).$$

Отсюда и из (1.9) мы приходим к третьему представлению оператора $L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}$ и функции $\varphi_{(\infty)}(R)$, а именно

$$L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}=-\frac{d}{dr}\left\{r\int_0^R\varphi(r\tau)\,dp_R(\tau)\right\}_{r=1} \quad (0<r\leqslant 1), \tag{1.6''}$$

$$\varphi_{(\infty)}(R)=-\left\{r\int_0^R\varphi(r\tau)\,dp_R(\tau)\right\}'_{r=1}. \tag{1.7''}$$

1.2. (а) Одно из первых приложений оператора $L_R^{(\omega)}$ — это установление аналогов классических формул Коши, Шварца и Пуассона.

Теорема 1. *Пусть функция*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n \tag{1.10}$$

аналитична в круге $|z|<R_0$ $(0<R_0\leqslant+\infty)$. *Тогда для любого* R $(0<$ $<R<R_0)$ *имеем:*

1°. *Функция*

$$L_R^{(\omega)}\{f(re^{i\varphi})\}\equiv f_{(\omega)}(re^{i\varphi};\,R)=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\Delta_n(R)(re^{i\varphi})^n \tag{1.11}$$

аналитична в круге $|z|\leqslant 1$.

2°. *Справедливы интегральные формулы типа Коши и Шварца*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C_R(e^{-i\theta}z;\,\omega)\,f_\omega(e^{i\theta};\,R)\,d\theta \quad (|z|<R), \tag{1.12}$$

$$f(z)=i\,\mathrm{Im}\,f(0)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_R(e^{-i\theta}z;\,\omega)\,\mathrm{Re}\,\{f_\omega(e^{i\theta};\,R)\}\,d\theta \quad (|z|<R), \tag{1.13}$$

где функция $C_R(z;\,\omega)$ *определяется из* (1.5), *а функция*

$$S_R(z;\,\omega)=2\,C_R(z;\,\omega)-1\quad=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{\Delta_n(R)}. \tag{1.14}$$

Доказательство. 1°. Так как функция $f(z)$ аналитична в круге $|z|<R_0$, то, по теореме Коши-Адамара, при любом $R\in(0,\,R_0)$ имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\frac{1}{R_0}<\frac{1}{R}\cdot$$

Поэтому, в силу (1.4)

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\sqrt[n]{\Delta_n\,(R)\,|a_n|}<1,$$

откуда следует, что функция, определяемая степенным рядом (1.11), аналитична по крайней мере в замкнутом единичном круге $|z|\leqslant1$.

Наконец, ввиду определения (1.6) оператора $L_R^{(\omega)}$ и равномерной сходимости разложения

$$f'\,(re^{i\varphi})=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n\,r^{n-1}\,e^{in\varphi},\quad \varphi\in[0,\,2\pi]$$

на отрезке $0\leqslant r\leqslant R$, в силу (1.8), мы получим при $|re^{i\varphi}|\leqslant1$

$$L_R^{(\omega)}\,[f\,(re^{i\varphi})]=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\Delta_n\,(R)\,(re^{i\varphi})^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,\Delta_n\,(R)\,(re^{i\varphi})^n\equiv f_\omega(re^{i\varphi};\;R),$$

т. е. формулу (1.11).

2°. Отметим, что разложения

$$C_R\,(ze^{-i\vartheta};\;\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ze^{-i\vartheta})^n}{\Delta_n(R)}\quad(|z|<R), \tag{1.15}$$

$$f_\omega\,(e^{i\vartheta};\;R)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\Delta_k\,(R)\,e^{ik\vartheta}$$

равномерно сходятся относительно переменной ϑ $(0\leqslant\vartheta\leqslant2\pi)$, а также что

$$\delta\,(k;\;n)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\vartheta}e^{-in\vartheta}\,d\vartheta=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}\quad ck;\;n=0,\,1,\,2,\cdots).$$

Тогда при $|z|<R$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C_R\,(e^{-i\vartheta}\,z;\;\omega)\,f_\omega(e^{i\vartheta};\;R)\,d\vartheta=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{\Delta_k(R)}{\Delta_n(R)} \delta(k;\ n)\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z),$$

т. е. формулу (1.12).

Из тех же разложений (1.15) следует далее

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_R(e^{-i\vartheta} z;\ \omega)\,\overline{f_\infty(e^{i\vartheta};\ R)\, d\vartheta} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \bar{a}_k \frac{\Delta_n(R)}{\Delta_n(R)} \delta(k;\ -n)\, z^n = \bar{a}_0 = \overline{f(0)} \quad (|z|<R).$$

Итак, вместе с (1.12) справедлива также формула

$$\overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_R(e^{-i\vartheta} z;\ \omega)\,\overline{f_\infty(e^{i\vartheta};\ R)}\, d\vartheta \quad (|z|<R). \tag{1.12'}$$

Сложением (1.12) и (1.12′) получим

$$f(z) + \operatorname{Re} f(0) - i \operatorname{Im} f(0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_R(e^{-i\vartheta} z;\ \omega) \operatorname{Re}\{f_\infty(e^{i\vartheta};\ R\}\, d\vartheta, \tag{1.16}$$

откуда при $z=0$ следует также, что

$$\operatorname{Re} f(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\{f_{(\infty)}(e^{i\vartheta};\ R)\}\, d\vartheta. \tag{1.16'}$$

Наконец, из (1.16) и (1.16′) получим

$$f(z) - i \operatorname{Im} f(0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{2\, C_R(e^{-i\vartheta} z;\ \omega) - 1\} \operatorname{Re}\{f_\infty(e^{i\vartheta};\ R\}\, d\vartheta,$$

т. е. формулу (1.13) теоремы.

(б) Введем в рассмотрение функцию

$$P_R(\vartheta, r;\ \omega) = \operatorname{Re} S_R(re^{i\vartheta};\ \omega) =$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r^k}{\Delta_k(R)} \cos k\vartheta, \tag{1.17}$$

гармоническую в круге $|z|<R$.

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть $u(z)$ — гармоническая функция в круге $|z|<R_0$ $(0<R_0\leqslant+\infty)$. Тогда для любого $R\ (0<R<R_0)$ функция*

$$u_{(\omega)}(re^{i\varphi};\ R) = L_R^{(\omega)}\{u(re^{i\varphi})\} \tag{1.18}$$

гармонична в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ *и справедлива формула*

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(\varphi - \vartheta,\ r;\ \omega)\, u_{(\omega)}(e^{i\vartheta};\ R)\, d\vartheta \tag{1.19}$$

$$(0 \leqslant r < R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Доказательство. Пусть $v(z)$ — сопряженная с $u(z)$ гармоническая в круге $|z| < R_0$ функция. Тогда функция

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

аналитична в круге $|z| < R_0$, а при любом $R \in (0, R_0)$ функция

$$f_{(\omega)}(re^{i\varphi};\ R) = L_R^{(\omega)}\{f(re^{i\varphi})\} = L_R^{(\omega)}\{u(re^{i\varphi})\} +$$
$$+ iL_R^{(\omega)}\{v(re^{i\varphi})\} \equiv u_{(\omega)}(re^{i\varphi};\ R) + i\,v_{(\omega)}(re^{i\varphi};\ R)$$

аналитична в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$.

Следовательно, согласно формуле (1.13) теоремы 1, имеет место представление

$$f(z) = iv(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_R(e^{-i\vartheta} z;\ \omega)\, u_{(\omega)}(e^{i\vartheta};\ R)\, d\vartheta \quad (|z| < R).$$

Приравнивая вещественные части в этой формуле и имея в виду определение (1.17) функции $P_R(\vartheta, r;\ \omega)$, мы приходим к представлению (1.19) теоремы.

1.3. (a) Пусть $F(z)$ мероморфна на всей z плоскости, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ суть соответственно последовательности ее нулей и полюсов, отличных от $z=0$ и пронумерованных в порядке неубывания их модулей

$$0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \cdots \leqslant |a_\mu| \leqslant \cdots$$
$$0 < |b_1| \leqslant |b_2| \leqslant \cdots \leqslant |b_\nu| \leqslant \cdots \tag{1.20}$$

с условием, что *каждый нуль или полюс записывается столько раз, какова его кратность.*

Отметим при этом, что если множество $\{a_\mu\}$ или $\{b_\nu\}$ счетно, то, очевидно, соответственно будем иметь

$$\lim_{\mu \to +\infty} |a_\mu| = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n \to +\infty} |b_\nu| = +\infty. \tag{1.21}$$

Пусть, далее, в окрестности точки $z = 0$ функция $F(z)$ имеет разложение в ряд Лорана вида

$$F(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots \quad (c_\lambda \neq 0) \tag{1.22}$$

и, таким образом, при $\lambda \neq 0$ число $|\lambda|$ равно кратности нуля (если $\lambda \geqslant 1$) или полюса (если $\lambda \leqslant -1$) в точке $z = 0$.

Установим формулу, позволяющую представить функцию $F(z)$ в любом круге $|z| < R$ $(0 < R < +\infty)$.

С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$W_{\infty}^{(R)}(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{R}\frac{\omega(x)}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_{0}^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx-\right.$$

$$\left.-\bar{\zeta}^{k}\int_{|\zeta|}^{R}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{z^{k}}{\Delta_{k}(R)}\quad(|z|<R,\ 0<|\zeta|<R),\tag{1.23}$$

где, как и выше

$$\Delta_{k}(R)=k\int_{0}^{R}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\quad(k=1,2,\cdots).$$

Легко видеть, что при любом фиксированном ζ $(0<|\zeta|<R)$ степенной ряд (1.23) сходится в круге $|z|<R$, определяя функцию $W_{\infty}^{(R)}(z;\zeta)$, аналитическую в том же круге.

Определив функции

$$A_{\infty}^{(R)}(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-W_{\infty}^{(R)}(z;\zeta)\right\},\tag{1.24}$$

$$\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\theta})|\}\equiv L_{R}^{(\omega)}\{\log|F(re^{i\theta})|\}|_{r=1}=$$

$$=\omega(R)\log|F(Re^{i\theta})|-\int_{0}^{R}\log|F(e_{\tau}^{i\theta})|\,\omega'(\tau)\,d\tau\tag{1.25}$$

и постоянную

$$k_{R}(\omega)=\int_{0}^{R}\{1-\omega(x)\}\frac{dx}{x},\tag{1.26}$$

докажем теорему.

Теорема 3. *Для любой функции* $\omega(x)\in\Omega_{\infty}$ *и для любого* R $(0<R<+\infty)$ *справедлива формула*

$$\mathrm{Log}\ F(z)=i\,\mathrm{Arg}\,C_{\lambda}+\lambda k_{R}(\omega)+\lambda\log\frac{z}{R}+$$

$$+\sum_{0<|a_{\mu}|<R}\log A_{\infty}^{(R)}(z;a_{\mu})-\sum_{0<|b_{\nu}|<R}\log A_{\infty}^{(R)}(z;b_{\nu})+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}S_{R}(e^{-i\theta}z;\ \omega)\,\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\theta})|\}\,d\theta\quad(|z|<R),\tag{1.27}$$

где

$$S_{R}(z;\omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Delta_{k}(R)}.$$

Доказательство. Заметим, что для любого $R>0$ функция $F(Rz)$ мероморфна в круге $|z|\leqslant 1$ и имеет там лишь конечное число нулей $\left\{\frac{a_\mu}{R}\right\}$ $(|a_\mu|\leqslant R)$ и полюсов $\left\{\frac{b_\nu}{R}\right\}$ $(|b_\nu|\leqslant R)$. Поэтому, если записать формулу (17) теоремы Б для функции $F(Rz)$, ассоциируя ее с функцией $\omega_R(x)=\omega(Rx)$, то для любого ρ $(0<\rho<1)$ будем иметь

$$\operatorname{Log} F(Rz)=i\operatorname{Arg} C_\lambda+\lambda k(\omega_R)+\lambda\log\frac{z}{\rho}+$$

$$+\sum_{|a_\mu|<\rho R}\log A_{\omega_R}\left(\frac{z}{\rho};\frac{a_\mu}{\rho R}\right)-\sum_{|b_\nu|<\rho R}\log A_{\omega_R}\left(\frac{z}{\rho};\frac{b_\nu}{\rho R}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(e^{-i\vartheta}\frac{z}{\rho};\ \omega_R\right)L^{(\omega_R)}\{\log|F(R\rho e^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta\quad(|z|<\rho). \tag{1.28}$$

Отметим, во-первых, что здесь

$$k(\omega_R)=\int_0^1\frac{1-\omega(R\cdot x)}{x}\,dx=\int_0^R\frac{1-\omega(x)}{x}\,dx=k_R(\omega), \tag{1.29}$$

$$S(z;\omega_R)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k\int\limits_0^1\omega(Rx)\,x^{k-1}\,dx}=$$

$$=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(Rz)^k}{\Delta_k(R)}=S_R(Rz;\omega) \tag{1.30}$$

согласно определению (1.14) функции $S_R(z;\omega)$.

Во-вторых, согласно формулам (15) и (16) введения имеем также

$$A_{\omega_R}(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-W_{\omega_R}(z;\zeta)\},$$

где

$$W_{\omega_R}(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^1\frac{\omega(Rx)}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(Rx)\,x^{k-1}\,dx-\right.$$

$$\left.-\bar\zeta^k\int_{|\zeta|}^1\omega(Rx)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{z^k}{k\int\limits_0^1\omega(Rx)\,x^{k-1}\,dx}=$$

$$=\int_{R|\zeta|}^R\frac{\omega(x)}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(\zeta R)^{-k}\int_0^{R|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx-\right.$$

$$\left.-(\bar\zeta R)^k\int_{R|\zeta|}^R\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{(Rz)^k}{\Delta_k(R)}.$$

Следовательно, в силу определений (1.23) и (1.24) функций $W_{\omega}^{(R)}(z;\zeta)$ и $A_{\omega}^{(R)}(z;\zeta)$ справедливы тождества

$$W_{\omega_R}\left(\frac{z}{R};\frac{\zeta}{R}\right)\equiv W_{\omega}^{(R)}(z;\zeta),\tag{1.31}$$

$$A_{\omega_R}\left(\frac{z}{R};\frac{\zeta}{R}\right)\equiv A_{\omega}^{(R)}(z;\zeta),\tag{1.32}$$

при любых z ($|z|<R$) и ζ ($0<|\zeta|<R$).

Наконец, в-третьих, нам нужно найти явное выражение для оператора $L^{(\omega_R)}\{\log|F(R\rho e^{i\theta})|\}$, стоящего под интегральным членом тождества (1.28).

Как было отмечено во введении, оператор $L^{(\omega)}$ допускает представление (9). Поэтому будем иметь

$$L^{(\omega_R)}\{\varphi(\rho)\}=\omega_R(1)\varphi(\rho)-\int_0^1\varphi(\rho\tau)\,\omega_R'(\tau)\,d\tau,\quad \rho\in[0,1).$$

Но поскольку $\omega_R(x)=\omega(Rx)$, то отсюда мы получим

$$L^{(\omega_R)}\{\log|F(R\rho e^{i\theta})|\}=\omega(R)\log|F(R\rho e^{i\theta})|-$$

$$-\int_0^1\log|F(\rho Re^{i\theta}\tau)|\,R\omega'(R\tau)\,d\tau=$$

$$=\omega(R)\log|F(\rho Re^{i\theta})|-\int_0^R\log|F(\rho e^{i\theta}\tau)|\,\omega'(\tau)\,d\tau,\tag{1.33}$$

откуда следует, что

$$L^{(\omega_R)}\{\log|F(Re^{i\theta})|\}=L^{(\omega_R)}\{\log|F(\rho Re^{i\theta})|\}|_{\rho=1}=$$

$$=\omega(R)\log|F(Re^{i\theta})|-\int_0^R\log|F(e^{i\theta}\tau)|\,\omega'(\tau)\,d\tau\equiv$$

$$\equiv\operatorname{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\theta})|\},\tag{1.34}$$

в силу (1.25).

Нам остается заменить в формуле (1.28) Rz на z и воспользоваться тождествами (1.29), (1.30), (1.32) и (1.34), чтобы получить формулу (1.27) теоремы.

§ 2. Определение и основные свойства ω-характеристической функции $\widetilde{T}_{\omega}(R;F)$

2.1. (a) Приведем сначала одну важную формулу—аналог формулы Иенсена, вытекающую из теоремы 3.

Так как $\{r^{-\lambda}|F(re^{i\theta})|\}_{r=0}=|c_\lambda|\neq 0$ и $S_R(0;\omega)=1$, то из формулы (1.27) теоремы 3 при $z=0$ следует тождество

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\theta})|\}\,d\theta = \log|c_\lambda| + \lambda(\log R - k_R(\omega)) +$$

$$+\sum_{0<|a_\mu|<R} W_\omega^{(R)}(0;a_\mu) - \sum_{0<|b_\nu|<R} W_\omega^{(R)}(0;b_\nu), \tag{2.1}$$

где в силу (1.23) и (1.26)

$$W_\omega^{(R)}(0;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{R} \frac{\omega(x)}{x}\,dx,\quad k_R(\omega) = \int_0^R \frac{1-\omega(x)}{x}\,dx. \tag{2.2}$$

Теперь, следуя Р. Неванлинне, запишем формулу (2.1) в несколько ином виде. С этой целью, во-первых, для каждого t $(0<t<+\infty)$ через $n(t;0)$ и $n(t;\infty)$ обозначим соответственно количество нулей и полюсов функции $F(z)$, лежащих в круге $|z|\leqslant t$, с условием, что каждый нуль или полюс считается столько раз, какова его кратность. Одновременно через $n(0;0)$ и $n(0;\infty)$ мы обозначим соответственно кратность нуля и полюса функции $F(z)$ в точке $z=0$.

Если в окрестности $z=0$ функция $F(z)$ имеет разложение

$$F(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots \quad (c_\lambda \neq 0),$$

то очевидно, что

$$\lambda = n(0;0) - n(0;\infty). \tag{2.3}$$

С помощью введенных функций $n(t;0)$ и $n(t;\infty)$ суммы, стоящие в правой части тождества (2.1), могут быть записаны в интегральной форме. А именно, так как по (2.2)

$$\sum_{0<|a_\mu|<R} W_\omega^{(R)}(0;a_\mu) = \sum_{0<|a_\mu|<R} \int_{|a_\mu|}^{R} \frac{\omega(x)}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^R \left\{ \int_t^R \frac{\omega(x)}{x}\,dx \right\} d\{n(t;0)-n(0;0)\},$$

то интегрированием по частям мы получим

$$\sum_{0<|a_\mu|<R} W_\omega^{(R)}(0;a_\mu) = \int_0^R \frac{n(t;0)-n(0;0)}{t}\,\omega(t)\,dt. \tag{2.4}$$

Аналогично получим, что

$$\sum_{0<|b_\nu|<R} W_\omega^{(R)}(0;b_\nu) = \int_0^R \frac{n(t;\infty)-n(0;\infty)}{t}\,\omega(t)\,dt. \tag{2.5}$$

Далее, принимая во внимание формулы (2.4) и (2.5), введем в рассмотрение еще две функции

$$\tilde{N}_\infty(R;\ 0)\equiv\tilde{N}_\infty\left(R;\frac{1}{F}\right)=\sum_{0<|a_\mu|<R}W_\infty^{(R)}(0;\ a_\mu)+$$

$$+n(0;\ 0)\{\log R-k_R(\omega)\}=$$

$$=\int_0^R\frac{n(t;\ 0)-n(0;\ 0)}{t}\,\omega(t)\,dt+n(0;\ 0)\{\log R-k_R(\omega)\}, \tag{2.6}$$

$$\tilde{N}_\infty(R;\ \infty)\equiv\tilde{N}_\infty(R;\ F)=\sum_{0<|b_\nu|<R}W_\infty^{(R)}(0;\ b_\nu)+$$

$$+n(0;\ \infty)\{\log R-k_R(\omega)\}=$$

$$=\int_0^R\frac{n(t;\ \infty)-n(0;\ \infty)}{t}\,\omega(t)\,dt+n(0,\ \infty)\{\log R-k_R(\omega)\}. \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7), в силу (2.3) следует

$$\tilde{N}_\infty\left(R;\ \frac{1}{F}\right)-\tilde{N}_\infty(R;\ F)=\lambda\{\log R-k_R(\omega)\}+$$

$$+\sum_{0<|a_\mu|<R}W_\infty^{(R)}(0;\ a_\mu)-\sum_{0<|b_\nu|<R}W_\infty^{(R)}(0;\ b_\nu), \tag{2.8}$$

ввиду чего тождество (2.1) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta=$$

$$=\log|c_\lambda|+\tilde{N}_\infty\left(R,\ \frac{1}{F}\right)-\tilde{N}_\infty(R;\ F). \tag{2.1'}$$

Введем, наконец, обозначение

$$\mathrm{Log}^+_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}=\max\{0,\ \mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\},$$

заметив, что ввиду определения (1.25) имеем

$$\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}=\mathrm{Log}^+_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}-\mathrm{Log}^+_{(\omega)}\left\{\frac{1}{|F(Re^{i\vartheta})|}\right\}. \tag{2.9}$$

Введем теперь в рассмотрение еще две функции — аналоги функций приближения Р. Неванлинны

$$\tilde{m}_\infty(R;\ \infty)\equiv\tilde{m}_\infty(R;\ F)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}^+_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta, \tag{2.10}$$

$$\tilde{m}_\infty(R;\ 0)\equiv\tilde{m}_\infty\left(R;\ \frac{1}{F}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}^+_{(\omega)}\left\{\frac{1}{|F(Re^{i\vartheta})|}\right\}d\vartheta, \tag{2.11}$$

заметив, что в силу (2.9) имеем

$$\tilde{m}_\infty(R;\ F)-\tilde{m}_\infty\left(R;\ \frac{1}{F}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta. \tag{2.12}$$

Формула (2.12) позволяет записать тождество (2.1') в другом виде и таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *Для любой мероморфной на всей плоскости z функции $F(z)$ и при произвольном $\omega(x) \in \Omega_\infty$ справедливо тождество*

$$\tilde{m}_\omega(R; F) + \tilde{N}_\omega(R; F) =$$

$$= \log |c_\lambda| + \tilde{m}_\omega\left(R; \frac{1}{F}\right) + \tilde{N}_\omega\left(R; \frac{1}{F}\right) \quad (0 < R < +\infty). \tag{2.13}$$

(б) Заметим, что, как следует из определения (1.25), при $\omega(x) \equiv 1$ $(0 \leqslant x < +\infty)$

$$\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\} \equiv \log |F(Re^{i\vartheta})|. \tag{2.14}$$

Поэтому в случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, определенные выше функции $\tilde{N}_\omega$ и $\tilde{m}_\omega$ переходят в известные функции, впервые введенные Р. Неванлинной. А именно, мы будем иметь

$$\tilde{N}_1\left(R; \frac{1}{F}\right) \equiv N\left(R; \frac{1}{F}\right) = \int_0^R \frac{n(t; 0) - n(0, 0)}{t}\, dt + n(0, 0) \log R, \tag{2.15}$$

$$\tilde{N}_1(R; F) \equiv N(R; F) = \int_0^R \frac{n(t; \infty) - n(0; \infty)}{t}\, dt + n(0, \infty) \log R,$$

а также

$$\tilde{m}_1(R; F) \equiv m(R; F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |F(Re^{i\vartheta})|\, d\vartheta,$$

$$\tilde{m}_1\left(R; \frac{1}{F}\right) \equiv m\left(R, \frac{1}{F}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|F(Re^{i\vartheta})|}\, d\vartheta. \tag{2.16}$$

Ввиду сказанного тождество (2.13) теоремы 4 в специальном случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, принимает вид

$$m(R; F) + N(R; F) =$$

$$= \log |c_\lambda| + m\left(R; \frac{1}{F}\right) + N\left(R; \frac{1}{F}\right) \quad (0 < R < +\infty), \tag{2.17}$$

что известно под названием *соотношения равновесия*.

Это соотношение привело Р. Неванлинна к определению характеристической функции

$$T(R; F) \equiv m(R; F) + N(R; F),$$

с помощью которой оно записывается в виде

$$T(R;\ F) = \log|c_\lambda| + T\left(R;\ \frac{1}{F}\right) \quad (0 < R < +\infty). \tag{2.18}$$

Поэтому тождество (2.13) теоремы 4, справедливое для произвольной функции $\omega(x) \in \Omega_\infty$, естественно назвать *соотношением* ω*-равновесия*. Далее функцию

$$\widetilde{T}_\omega(R;\ F) \equiv \widetilde{m}_\omega(R,\ F) + \widetilde{N}_\omega(R;\ F),$$

с помощью которой соотношение (2.13) запишется в виде

$$\widetilde{T}_\omega(R;\ F) = \log|c_\lambda| + \widetilde{T}_\omega\left(R;\frac{1}{F}\right), \tag{2.18'}$$

впредь будем называть ω*-характеристической функцией* или просто ω*-характеристикой*.

Поскольку в случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, функции $\widetilde{m}_\omega(R;\ F)$ и $\widetilde{N}_\omega(R;\ F)$ переходят в известные функции $m(R;\ F)$ и $N(R;\ F)$ Р. Неванлинны, то очевидно, что

$$\{\widetilde{T}_\omega(R;\ F)\}_{\omega\equiv 1} \equiv T(R,\ F) \quad (0 < R < +\infty). \tag{2.19}$$

Таким образом, ω-характеристическая функция $\widetilde{T}_\omega(R;\ F)$ ассоциируется с произвольной функцией $\omega(x) \in \Omega_\infty$ и совпадает с характеристической функцией Р. Неванлинны $T(R;\ F)$ лишь в случае, когда $\omega(x) \equiv 1$.

Как известно, характеристика Неванлинны $T(R;\ F)$ является неубывающей функцией на полуоси $0 < R < +\infty$. Аналогичным свойством обладает и ω-характеристика $\widetilde{T}_\omega(R;\ F)$. Справедлива

Теорема 5. *При любой порождающей функции* $\omega(x) \in \Omega_\infty$ ω*-характеристика* $\widetilde{T}_\omega(R;\ F)$ *является неубывающей функцией на полуоси* $(0,\ +\infty)$.

На доказательстве этой теоремы останавливаться не будем, поскольку оно не отличается от доказательства теоремы 3.3 работы [11] где устанавливается аналогичное утверждение для случая функций, мероморфных в единичном круге.

(в) Докажем теорему.

Теорема 6. *Пусть* $T(R;\ F)$ *и* $\widetilde{T}_\omega(R;F)$ *суть соответственно обычная* ω*-характеристика функции* $F(z)$, *мероморфной на всей плоскости* z. *Тогда имеет место неравенство*

$$\widetilde{T}_\omega(R;\ F) \leqslant L_R^{(\omega)}\{T(r;\ F)\}|_{r=1} \equiv$$

$$\equiv \omega(R)\,T(R;F) + \int_0^R T(\tau;\ F)\,|\omega'(\tau)|\,d\tau \quad (0 < R < +\infty). \tag{2.20}$$

Доказательство. Поскольку функция $\omega(x) \in \Omega_*$ — неубывающая, то, очевидно, будем иметь по (1.7')

$$L_R^{(\omega)}\{T(r; F)\}|_{r=1} = \omega(R)\,T(R; F) + $$
$$+\int_0^R T(\tau; F)\,|\omega'(\tau)|\,d\tau.$$

Поэтому нам достаточно лишь установить справедливость неравенства

$$\tilde{T}_\omega(R; F) \leqslant L_R^{(\omega)}\{T(r; F)\}|_{r=1} \equiv$$
$$\equiv L_R^{(\omega)}\{m(r; F)\}|_{r=1} + L_R^{(\omega)}\{N(r; F)\}|_{r=1}. \tag{2.20'}$$

С этой целью заметим сперва, что согласно (1.25) и в силу того, что $\omega'(\tau) \leqslant 0$, имеем

$$\operatorname{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\} \equiv L_R^{(\omega)}\{\log|F(re^{i\vartheta})|\}|_{r=1} =$$
$$= \omega(R)\log|F(Re^{i\vartheta})| - \int_0^R \log|F(\tau e^{i\vartheta})|\,\omega'(\tau)\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \omega(R)\log^+|F(Re^{i\vartheta})| - \int_0^R \log^+|F(\tau e^{i\vartheta})|\,\omega'(\tau)\,d\tau \equiv$$
$$\equiv L_R^{(\omega)}\{\log^+|F(re^{i\vartheta})|\}|_{r=1}.$$

Поскольку правая часть этого неравенства принимает лишь неотрицательные значения, то подавно имеем также

$$\operatorname{Log}^+_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\} \leqslant L_R^{(\omega)}\{\log^+|F(re^{i\vartheta})|\}|_{r=1}. \tag{2.21}$$

Умножим теперь неравенство (2.21) на $\dfrac{d\vartheta}{2\pi}$ и проинтегрируем по промежутку $[0,2\pi]$. Тогда, принимая во внимание определения (2.10) и (2.16) функций $\tilde{m}_\omega(R; F)$ и $m(R; F)$, мы приходим к неравенству

$$\tilde{m}_\omega(R; F) \leqslant L_R^{(\omega)}\{m(r; F)\}|_{r=1}. \tag{2.22}$$

Докажем, что справедлива также формула

$$\tilde{N}_\omega(R; F) = L_R^{(\omega)}\{N(r; F)\}|_{r=1}, \tag{2.23}$$

откуда и из неравенства (2.22) будет следовать неравенство (2.20'), т. е. утверждение (2.20) теоремы.

С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$N_*(r; F) = \int_0^r \frac{n(t; \infty) - n(0; \infty)}{t}\,dt,$$

отметив, что по определению (2.15), функции $N(r, F)$

$$N(r, F) = N_*(r; F) + n(0; \infty)\log r$$

и поэтому при $0 < r \leqslant 1$

$$L_R^{(\omega)}\{N(r; F)\} = L_R^{(\omega)}\{N_*(r; F)\} + n(0, \infty)\, L_R^{(\omega)}\{\log r\}. \qquad (2.24)$$

Согласно определению (1.6) оператора $L_R^{(\omega)}$ при $0 < r \leqslant 1$ имеем

$$L_R^{(\omega)}\{N_*(r; F)\} = r\int_0^R \frac{n(r\tau; \infty) - n(0; \infty)}{\tau}\,\omega(\tau)\,d\tau$$

и, в частности

$$L_R^{(\omega)}\{N_*(r; F)\}|_{r=1} = \int_0^R \frac{n(\tau; \infty) - n(0; \infty)}{\tau}\,\omega(\tau)\,d\tau. \qquad (2.25)$$

Далее, легко видеть, что формулу (1.6) можно записать также в виде

$$L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\} = \varphi(rR) + r\int_0^R \varphi'(r\tau)\{\omega(\tau) - 1\}\,d\tau \quad (0 < r \leqslant 1).$$

Положив здесь $\varphi(r) = \log r$, мы получим

$$L_R^{(\omega)}\{\log r\} = \log(rR) + \int_0^R \frac{\omega(\tau) - 1}{\tau}\,d\tau \quad (0 < r \leqslant 1),$$

откуда, в частности, следует, что

$$\log_{(\omega)} R = L_R^{(\omega)}\{\log r\}|_{r=1} = \log R - k_\omega(R). \qquad (2.26)$$

Наконец, из (2.24), в силу (2.25) и (2.26), следует

$$L_R^{(\omega)}\{N(r; F)\}|_{r=1} = \int_0^R \frac{n(\tau; \infty) - n(0; \infty)}{\tau}\,\omega(\tau)\,d\tau +$$

$$+ n(0; \infty)\{\log R - k_R(\omega)\} \equiv \bar{N}_\omega(R; F),$$

ввиду определения (2.7) функции $\bar{N}_\omega(R; F)$.

Таким образом, формула (2.23) и, тем самым, неравенство (2.20) теоремы доказано.

Из теоремы 6 непосредственно вытекает

С л е д с т в и е. *Если*

$$\int_0^\infty T(\tau; F)|\omega'(\tau)|\,d\tau < +\infty, \qquad (2.27)$$

то имеет место неравенство

$$\tilde{T}_\omega(R; F) \leqslant \int_0^{+\infty} T(\tau; F)|\omega'(\tau)|\,d\tau \quad (0<R<+\infty). \tag{2.28}$$

В самом деле, отметим сначала, что поскольку функция $\omega(x) \in \Omega_\infty$ не возрастающая на $[0, +\infty)$ и

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\,dx < +\infty,$$

то, очевидно, $\omega(\tau) \downarrow +0$ при $\tau \uparrow +\infty$ и $\omega'(\tau) \leqslant 0 \quad (0<\tau<+\infty)$. Поэтому будем иметь

$$\omega(R)\,T(R; F) = -T(R; F)\int_R^{+\infty} \omega'(\tau)\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_R^{+\infty} T(\tau; F)\,|\omega'(\tau)|\,d\tau. \tag{2.29}$$

Из неравенства (2.20) теоремы 6, ввиду (2.29), приходим к (2.28).

В заключение отметим еще, что при условии (2.27) из (2.29) следует также, что

$$\lim_{R\to+\infty} \omega(R)\,T(R; F) = 0.$$

§ 3. Теорема факторизации

3.1. (a) В предположении, что $\omega(x) \in \Omega_\infty$, обозначим через $N_\infty\{\omega\}$ множество мероморфных на всей плоскости z функций $F(z)$, для которых ω-характеристика

$$\tilde{T}_\omega(R; F) \equiv \tilde{m}_\omega(R; F) + \tilde{N}_\omega(R; F) \quad (0<R<+\infty) \tag{3.1}$$

удовлетворяет условию

$$\tilde{T}_\omega(F) \equiv \sup_{0<R<+\infty} \{\tilde{T}_\omega(R; F)\} < +\infty. \tag{3.2}$$

Поскольку, как утверждалось в теореме 5, функция $\tilde{T}_\omega(R; F)$ не убывает на полуоси $0<R<+\infty$, то очевидно, что класс $N_\infty\{\omega\}$ может быть определен и таким образом:

$$F(z) \in N_\infty\{\omega\},$$

если

$$\tilde{T}_\omega(F) \equiv \lim_{R\to+\infty} \tilde{T}_\omega(R; F) < +\infty. \tag{3.2'}$$

Из следствия теоремы 6 непосредственно следует, что *условие*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} T(\tau;\ F)\,|\omega'(\tau)|\,d\tau < +\infty \tag{3.3}$$

достаточно для того, чтобы функция $F(z)$ *принадлежала классу* $N_\infty\{\omega\}$. Одним из простейших свойств класса $N_\infty(\omega)$ является следующее: *если*

$$F(z) \in N_\infty\{\omega\} \quad \text{и} \quad G(z) \in N_\infty\{\omega\}, \tag{3.4}$$

то имеем также

$$F(z)\,G(z) \in N_\infty\{\omega\} \quad \text{и} \quad \frac{F(z)}{G(z)} \in N_\infty\{\omega\}. \tag{3.5}$$

В самом деле, во-первых, легко видеть, что

$$\operatorname{Log}^+_{(\infty)}\{|F(Re^{i\theta})\,G(Re^{i\theta})|\} \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Log}^+_{(\infty)}\{|F(Re^{i\theta})|\} + \operatorname{Log}^+_{(\infty)}\{|G(Re^{i\theta})|\},$$

и поэтому

$$\tilde{m}_\infty(R;\ F\cdot G) \leqslant \tilde{m}_\infty(R;\ F) + \tilde{m}_\infty(R;\ G) \quad (0 < R < +\infty). \tag{3.6}$$

Далее, поскольку очевидно

$$n_{FG}(t;\ \infty) \leqslant n_F(t;\ \infty) + n_G(t;\ \infty) \quad (0 \leqslant t < +\infty),$$

то легко видеть, что справедливо неравенство

$$\tilde{N}_\infty(R;\ F) + \tilde{N}_\infty(R;\ G) - \tilde{N}_\infty(R;\ F\cdot G) \geqslant$$
$$\geqslant \{n_F(0;\ \infty) + n_G(0;\ \infty) - n_{FG}(0;\ \infty)\}\,\varkappa_R(\omega), \tag{3.7}$$

где

$$\varkappa_R(\omega) = \log R - k_R(\omega). \tag{3.8}$$

Но выражение

$$\varkappa_R(\omega) = \int\limits_{1}^{R} \frac{\omega(x)}{x}\,dx - \int\limits_{0}^{1} \frac{1-\omega(x)}{x}\,dx$$

при $R > 1$ монотонно возрастает и стремится к конечному пределу

$$\varkappa(\omega) = \lim_{R\to+\infty} \varkappa_R(\omega) =$$
$$= \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\,dx - \int\limits_{0}^{1} \frac{1-\omega(x)}{x}\,dx. \tag{3.9}$$

Поэтому из (3.7) и (3.9) имеем

$$\tilde{N}_\infty(R;\ FG) \leqslant \tilde{N}_\infty(R;\ F) + \tilde{N}_\infty(R;\ G) + O(1), \quad R \to \infty. \tag{3.10}$$

Наконец, из (3.6) и (3.10) следует

$$\tilde{T}_\infty(R;\ FG) \leqslant \tilde{T}(R;\ F) + \tilde{T}(R;\ G) + O(1), \ R \to \infty.$$

Следовательно, при условии (3.4) имеем также $F(z)\,G(z) \in N_\infty\{\omega\}$.

Остается отметить, что в силу соотношения равновесия (2.13')

$$\widetilde{T}_\infty\left(R; \frac{1}{G}\right) = \mathrm{const} + \widetilde{T}_\omega(R; G)$$

вместе с функцией $G(z)$ классу $N_\infty\{\omega\}$ принадлежит также функция $\widetilde{G}(z) = \dfrac{1}{G(z)}$. Тем самым имеем также

$$\frac{F(z)}{G(z)} = F(z)\cdot\widetilde{G}(z) \in N_\infty\{\omega\}.$$

(б) Простейшим примером функции, входящей в класс $N_\infty\{\omega\}$ при любой порождающей функции $\omega(x) \in \Omega_\infty$, является система степеней $F_\lambda(z) = z^\lambda$ $(\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

В самом деле, согласно формуле (2.26)

$$\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F_\lambda(Re^{i\theta})|\} \equiv L_R^{(\omega)}\{\log|F_\lambda(re^{i\theta})|\}|_{r=1} =$$

$$= \lambda L_R^{(\omega)}\{\log r\}|_{r=1} = \lambda[\log R - k_R(\omega)] = \lambda\varkappa_R(\omega).$$

Поэтому

$$\widetilde{m}_\infty(F; F_\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}_{(\omega)}^{(+)}\{|F_\lambda(Re^{i\theta})|\}\, d\theta =$$

$$= \max\{0, \lambda\varkappa_R(\omega)\}. \tag{3.11}$$

Далее, принимая во внимание определение (2.7) функции $\widetilde{N}_\omega(R; F)$, имеем

$$\widetilde{N}_\omega(R; F_\lambda) = \max\{0, -\lambda\}\, \varkappa_R(\omega). \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12), принимая во внимание (3.9), заключаем, что

$$\widetilde{T}_\omega(F_\lambda) = \lim_{R\to+\infty} \widetilde{T}_\infty(R; F_\lambda) < +\infty,$$

иначе говоря, $F_\lambda(z) \in N_\infty\{\omega\}$.

(в) Принадлежность функции классу $N_\infty\{\omega\}$ накладывает определенное ограничение на густоту расположения ее нулей и полюсов.

Лемма 1. *Пусть* $F(z) \in N_\infty\{\omega\}$; $\{a_\mu\}$ $(0 < |a_\mu| < \infty)$ *и* $\{b_\nu\}$ $(0 < |b_\nu| < +\infty)$ *суть соответственно последовательности ее нулей и полюсов, отличных от* $z = 0$ *и пронумерованных, как обычно. Тогда*

$$\sum_{(\mu)} \int_{|a_\mu|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < +\infty, \quad \sum_{(\nu)} \int_{|b_\nu|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < +\infty. \tag{3.13}$$

Доказательство. Поскольку $F(z) \in N_\infty\{\omega\}$ и $\widetilde{m}_\omega(R; F) > 0$, то из (2.7) и (2.3) будем иметь

$$\overline{N}_\infty(R; F) = \sum_{|b_\nu|<R} W_\infty^{(R)}(0; b_\nu) + n(0; \infty)\varkappa_R(\omega) =$$

$$= \sum_{|b_\nu|<R} \int\limits_{|b_\nu|}^{R} \frac{\omega(x)}{x}dx + n(0; \infty)\varkappa_R(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{T}_\infty(R, F) \leqslant \overline{T}_\infty(T) < +\infty \quad (0 < R < +\infty). \tag{3.14}$$

Далее, так как по (3.9) предел

$$\varkappa(\omega) = \lim_{R\to+\infty} \varkappa_R(\omega)$$

конечен, то из (3.14) следует также, что

$$\sup_{0<R<+\infty}\left\{\sum_{|b_\nu|<R}\int\limits_{|b_\nu|}^{R}\frac{\omega(x)}{x}dx\right\} = \Omega_0 < +\infty. \tag{3.15}$$

Но тогда для любой пары чисел $0 < R_0 < R < +\infty$ в силу (3.15) имеем

$$\sum_{|b_\nu|<R_0}\int\limits_{|b_\nu|}^{R}\frac{\omega(x)}{x}dx \leqslant \sum_{|b_\nu|<R}\int\limits_{|b_\nu|}^{R}\frac{\omega(x)}{x}dx < \Omega_0.$$

Отсюда после предельного перехода при $R\to+\infty$ приходим к неравенству

$$\sum_{|b_\nu|<R_0}\int\limits_{|b_\nu|}^{\infty}\frac{\omega(x)}{x}dx \leqslant \Omega_0 \quad (0 < R_0 < +\infty).$$

Наконец, ввиду произвольности R_0 из последнего неравенства следует конечность второй из сумм (3.13). Ввиду тождества (2.13′) аналогично заключаем о конечности первой из сумм (3.13).

(г) Для любой функции $\omega(x) \in \Omega_\infty$ наряду с последовательностью

$$\Delta_0(R) = 1,\ \Delta_k(R) = k\int\limits_0^R \omega(x)x^{k-1}dx \quad (k=1, 2, \cdots) \tag{3.16}$$

введем в рассмотрение и последовательность чисел

$$\Delta_0(\infty) = 1,\ \Delta_k(\infty) = k\int\limits_0^{+\infty}\omega(x)x^{k-1}dx \ (k=1, 2, \cdots), \tag{3.17}$$

заметив, что

$$\Delta_k(\infty) = \lim_{R\to+\infty}\Delta_k(R) \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{3.18}$$

Отметим прежде всего, что если при данном $k \geqslant 1$ $\Delta_k(\infty) < +\infty$, то числа $\Delta_k(\infty)$ допускают также представление вида

$$\Delta_k(\infty) = \int_0^{+\infty} x^k\, d\{-\omega(x)\}. \tag{3.19}$$

В самом деле, если $\Delta_k(\infty) < +\infty$, то очевидно, что существует такая последовательность $R_n \uparrow +\infty$, $n \uparrow +\infty$, что

$$\lim_{n\to+\infty} \{R_n^k\, \omega(R_n)\} = 0. \tag{3.20}$$

Но для любого R

$$k\int_0^R \omega(x)\, x^{k-1}\, dx = R^k\, \omega(R) + \int_0^R x^k\, d\{-\omega(x)\}, \tag{3.21}$$

причем интегралы как слева, так и справа — неубывающие функции от $R \in (0, +\infty)$.

Поэтому, положив в (3.21) $R = R_n$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, в силу (3.20), мы приходим к формуле (3.11).

Условимся теперь отнести функцию $\omega(x) \in \Omega_\infty$ к классу $\Omega_\infty(\infty)$, если

$$\Delta_k(\infty) < +\infty \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.22}$$

и к классу $\Omega_\infty(p)$ $(p \geqslant 0)$, если

$$\Delta_k(\infty) < +\infty \;\; (k = 0, 1, 2, \cdots, p) \;\text{ и }\; \Delta_k(\infty) = +\infty \;\; (k \geqslant p+1). \tag{3.23}$$

Выше, в § 1, посредством формул (1.5) и (1.14) для произвольной функции $\omega(x) \in \Omega_\infty$ и при любом $R > 0$ были определены функции

$$C_R(z; \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(R)},$$

$$S_R(z; \omega) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(R)},$$

аналитические в круге $|z| < R$.

Наряду с этими функциями введем в рассмотрение также функции

$$C_\infty(z; \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(\infty)}, \tag{3.24}$$

$$S_\infty(z; \omega) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(\infty)}. \tag{3.25}$$

Если $\omega(x) \in \Omega_\infty(p)$, то очевидно, что функции $C_\infty(z; \omega)$ и $S_\infty(z; \omega)$ являются полиномами степени p.

Предположим теперь, что $\omega(x) \in \Omega_\infty(\infty)$. Тогда, пользуясь представлением (3.19) последовательности $\{\Delta_k(\infty)\}_0^\infty$ и заметив, что $d\{-\omega(x)\} \geqslant 0$, для любого $z \neq 0$ и $k \geqslant 1$ имеем

$$\Delta_k(\infty) \geqslant \int_{2|z|}^{\infty} x^k\, d\{-\omega(x)\} \geqslant (2|z|)^k\, \omega(2|z|). \tag{3.25'}$$

Отсюда, ввиду произвольности z, следует

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\Delta_k(\infty)} = +\infty,$$

и, следовательно, радиус сходимости рядов (3.24) и (3.25) равен бесконечности.

Таким образом, если $\omega(x) \in \Omega_\infty(\infty)$, то $C_\infty(z;\omega)$ и $S_\infty(z;\omega)$ являются целыми трансцендентными функциями.

Лемма 2. *В любой точке* $z \neq \infty$

$$\lim_{R\to+\infty} C_R(z;\omega) = C_\infty(z;\omega), \tag{3.26}$$

$$\lim_{R\to+\infty} S_R(z;\omega) = S_\infty(z;\omega), \tag{3.27}$$

притом равномерно относительно z в любом замкнутом круге.

Доказательство. Поскольку

$$S_R(z;\omega) = 2C_R(z;\omega) - 1 \text{ и } S_\infty(z;\omega) = 2C_\infty(z;\omega) - 1,$$

то достаточно установить лишь справедливость (3.27).

Положив теперь, что $|z| \leq r$ $(0 < r < +\infty)$ и $R_0 \geq 2r$, при любом $k \geq 1$ и $R \geq R_0$ получим оценку

$$\Delta_k(R) = k\int_0^R \omega(x)\, x^{k-1}\, dx \geq k\int_r^{2r} \omega(x)\, x^{k-1}\, dx \geq$$
$$\geq (2^k - 1)\, r^k\, \omega(2r) \geq 2^{k-1} r^k\, \omega(2r),$$

откуда после предельного перехода при $R \to \infty$ получим также

$$\Delta_k(\infty) \geq 2^{k-1} r^k\, \omega(2r).$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon; r)$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(R)}\right| \leq \frac{1}{\omega(2r)} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} =$$
$$= \frac{1}{2^{N-1}\,\omega(2r)} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (|z| \leq r,\ R \geq R_0), \tag{3.28}$$

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(\infty)}\right| \leq \frac{1}{\omega(2r)} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} =$$
$$= \frac{1}{2^{N-1}\,\omega(2r)} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (|z| \leq r). \tag{3.29}$$

Наконец, из (3.28) и (3.29) вытекает неравенство

$$|C_\infty(z;\omega) - C_R(z;\omega)| < \frac{2\varepsilon}{3} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{\Delta_k(\infty)} - \frac{1}{\Delta_k(R)}\right| r^k \quad (|z| \leq r,\ R \geq R_0).$$

Отсюда, в силу (3.18), следует

$$|C_\infty(z;\ \omega)-C_R(z;\ \omega)|<\varepsilon\quad(|z|\leqslant r,\quad R\geqslant R_1>R_0)$$

и, таким образом, лемма доказана.

(д) Приведем класс примеров функций $\omega(x)\in\Omega_\infty(\infty)$, когда $C_\infty(z;\ \omega)$ и $S_\infty(z;\ \omega)$ могут быть выражены через известные специальные функции.

Для произвольных значений параметров $\rho\ (0<\rho<+\infty)$, $\mu\ (0<\mu<+\infty)$ и $\sigma\ (0<\sigma<+\infty)$ обозначим

$$\omega(x)=\frac{\rho\sigma^{\mu}}{\Gamma(\mu)}\int_x^{+\infty}e^{-\sigma t^{\rho}}\,t^{\mu\rho-1}\,dt,\quad x\in(0,+\infty).\tag{3.30}$$

Легко видеть, что $\omega(x)\in\Omega_\infty(\infty)$, причем

$$\Delta_k(\infty)=\int_0^{\infty}x^k\,d\{-\omega(x)\}=$$

$$=\frac{\rho\sigma^{\mu}}{\Gamma(\mu)}\int_0^{+\infty}e^{-\sigma x^{\rho}}\,x^{k+\mu\rho-1}\,dx=\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}{\sigma^{\frac{k}{\rho}}\,\Gamma(\mu)}\quad(k\geqslant0).$$

Отсюда следует, что

$$C_\infty(z;\ \omega)=\Gamma(\mu)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z\right)^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}=$$

$$=\Gamma(\mu)\cdot E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\ \mu\right),$$

где

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\tag{3.31}$$

— целая функция типа Миттаг-Леффлера порядка ρ и типа 1.

Итак, для семейства функций $\omega(x)\in\Omega_\infty(\infty)$ вида (3.30) имеем

$$C_\infty(z;\ \omega)=\Gamma(\mu)\,E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\ \mu\right),\tag{3.32}$$

$$S_\infty(z;\ \omega)=2\Gamma(\mu)\,E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\ \mu\right)-1.\tag{3.33}$$

3.2. (а) *Докажем теперь первую основную теорему о факторизации функций класса* $N_\infty\{\omega\}$. При этом мы воспользуемся обозначениями, уже введенными нами ранее посредством формул (3.9), (1.23) и (1.24)

$$\varkappa(\omega) = \int_0^1 \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

$$W_\infty^{(R)}(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{R} \frac{\omega(x)}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx -$$

$$-\bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{R} \omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\Bigr\}\frac{z^k}{\Delta_k(R)},$$

$$A_\infty^{(R)}(z;\zeta) = \left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-W_\infty^{(R)}(z;\zeta)\}.$$

Теорема 7. *Пусть $F(z)\in N_\infty\{\omega\}$, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ суть соответственно нули и полюсы нашей функции, отличные от нуля, пронумерованные как обычно.*

Тогда функция $F(z)$ может быть представлена в виде

$$F(z) = e^{i\alpha + \lambda\varkappa(\omega)}\,z^\lambda \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\infty(e^{-i\theta}z;\omega)\,d\sigma(\theta)\right\}\times$$

$$\times\lim \frac{\prod\limits_{0<|a_\mu|<R} A_\infty^{(R)}(z;a_\mu)}{\prod\limits_{0<|b_\nu|<R} A_\infty^{(R)}(z;b_\nu)},\quad |z|<\infty, \tag{3.34}$$

$$\sigma(\theta) = \lim \int_0^{\theta} \mathrm{Log}_{(\infty)}\{|F(Re^{i\theta})|\}\,d\theta, \tag{3.35}$$

где пределы (3.34) и (3.35) берутся при $R\to+\infty$ по некоторой последовательности значений.

При этом $\sigma(\theta)$ — функция конечного полного изменения на $[0,2\pi]$, λ — кратность нуля (при $\lambda\geq 1$) или полюса (при $\lambda\leq -1$) в точке $z=0$ и, наконец, $\alpha = \arg\{z^{-\lambda}F(z)\}_{z=0}$.

Доказательство. Согласно формуле (1.27) теоремы 3, для любого R $(0<R<+\infty)$ имеет место представление

$$F(z) = \exp\{i\arg c_\lambda + \lambda\varkappa_R(\omega)\}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_R(e^{-i\theta}z;\omega)\,d\sigma_R(\theta)\right\}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{0<|a_\mu|<R} A_\infty^{(R)}(z;a_\mu)}{\prod\limits_{0<|b_\nu|<R} A_\infty^{(R)}(z;b_\nu)}\quad (|z|<R), \tag{3.36}$$

где

$$\sigma_R(\vartheta)=\int_0^{\vartheta}\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta. \tag{3.37}$$

Но легко видеть, что для любого $R>0$

$$|\sigma_R(\vartheta)|\leqslant\int_0^{2\pi}|\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}|\,d\vartheta=$$

$$=2\pi\left\{\tilde{m}_\omega(R;\ F)+\tilde{m}_\omega\left(R;\ \frac{1}{F}\right)\right\},\ \vartheta\in[0,\ 2\pi],$$

а также, что

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(\sigma_R(\vartheta))\leqslant 2\pi\left\{\tilde{m}_\omega(R;\ F)+\tilde{m}_\omega\left(R;\ \frac{1}{F}\right)\right\}.$$

Заметим, что

$$\tilde{m}_\omega(R;\ F)\leqslant\tilde{T}_\omega(R;\ F)+|\lambda|\,\varkappa_R(\omega),$$

$$\tilde{m}_\omega\left(R;\ \frac{1}{F}\right)\leqslant\tilde{T}_\omega\left(R;\ \frac{1}{F}\right)+|\lambda|\,\varkappa_R(\omega),$$

причем

$$\tilde{T}_\omega\left(R;\ \frac{1}{F}\right)=\mathrm{const}+\tilde{T}_\omega(R;\ F).$$

Поэтому и в силу того, что $F(z)\in N_\omega\{\omega\}$, будем иметь

$$\sup_{0<R<+\infty}\left\{2\pi\left[\tilde{m}_\omega(R;\ F)+\tilde{m}_\omega\left(R;\ \frac{1}{F}\right)\right]\right\}=M_\omega(F)<+\infty.$$

Таким образом, для семейства функций $\{\sigma_R(\vartheta)\}$ $(0<R<+\infty)$ выполняются условия первой теоремы Хелли, а именно, для всех $R>0$

$$|\sigma_R(\vartheta)|\leqslant M_\omega(F)\quad(0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi),\ \overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(\sigma_R)\leqslant M_\omega(F),$$

где $M_\omega(F)$ не зависит от R.

Следовательно, существует вещественная функция $\sigma(\vartheta)$ на $[0,2\pi]$ с конечным полным изменением и последовательность $\{R_k\}_1^\infty$ $R_k\uparrow+\infty$ такие, что в каждой точке $\vartheta\in[0,\ 2\pi]$

$$\sigma(\vartheta)=\lim_{k\to+\infty}\sigma_{R_k}(\vartheta)=\lim_{k\to+\infty}\int_0^{\vartheta}\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(R_k e^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta. \tag{3.38}$$

Отсюда и ввиду леммы 2, по второй теореме Хелли следует, что

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_{R_k}(e^{-i\vartheta}z;\ \omega)\,d\sigma_{R_k}(\vartheta)=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\infty (e^{-i\theta} z; \omega)\, d\sigma(\theta) \quad (|z| < \infty). \tag{3.39}$$

Положив, наконец, в тождестве (3.36) $R = R_k$, ввиду предельных соотношений (3.9), (3.38) и (3.39) мы приходим к утверждению теоремы.

(б) Приведем теперь теорему, дающую полное решение проблемы факторизации всего семейства функций, мероморфных на плоскости.

Пусть $F(z)$ — произвольная функция, мероморфная во всей конечной плоскости z. Тогда $\lim\limits_{r \to +\infty} T(r; F) = +\infty$ и, очевидно, существует хотя бы одна непрерывная, положительная и интегрируемая на $[0, +\infty)$ функция $h(r, F)$ такая, что

$$\int_0^{+\infty} T(r; F)\, h(r; F)\, dr < +\infty. \tag{3.40}$$

В качестве такого рода функции можно брать, например, функцию

$$h(r; F) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ \{(1+r) \log^2 (1+r)\, T(r; F)\}^{-1}, & 1 \leqslant r < +\infty. \end{cases}$$

Введем, далее, в рассмотрение функцию

$$\omega_F(x) = \frac{1}{C_0} \int_x^{+\infty} h(r; F)\, dr, \tag{3.41}$$

где $C_0 = \int\limits_0^\infty h(r, F)\, dr$, и докажем следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть функция $F(z)$ мероморфна во всей конечной плоскости z.*

Тогда $F(z) \in N_\infty\{\omega_F\}$ и, таким образом, допускает представление (3.34) теоремы 7 с порождающей функцией $\omega_F(x)$.

Доказательство. Легко видеть, во-первых, что $\omega_F(x) \in \Omega_\infty$. Во-первых, согласно неравенству (2.28), отмеченному в следствии теоремы 6,

$$\tilde{T}_{\omega_F}(R; F) \leqslant \int_0^{+\infty} T(r; F)\, |\omega_F'(r)|\, dr \quad (0 < R < +\infty),$$

откуда и из (3.40) получим

$$\sup_{0 < R < +\infty} \{\tilde{T}_{\omega_F}(R; F)\} < +\infty,$$

т. е. $F(z) \in N_\infty\{\omega\}$, и теорема доказана.

(в) В связи с теоремой 7 естественно возникает вопрос о ее обращении, т. е. вопрос о том, каждая ли функция вида (3.34) при условии

$$\sum_{(\mu)} \int_{|a_\mu|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{(\nu)} \int_{|b_\nu|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < +\infty \tag{3.42}$$

входит в класс $N_\infty\{\omega\}$?

Отметим, кроме того, что если ввести в рассмотрение функцию

$$W_\infty^{(-)}(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x)\, x^{k-1}\, dx - \right.$$

$$\left. - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{\infty} \omega(x)\, x^{-k-1}\, dx \right\} \frac{z^k}{\Delta_k(\infty)} \quad (|z| < +\infty,\ 0 < |\zeta| < +\infty), \tag{3.43}$$

то, как и в лемме 2, нетрудно установить, что

$$\lim_{R \to +\infty} W_\infty^{(R)}(z;\zeta) = W_\infty^{(-)}(z;\zeta) \quad (|z| < +\infty,\ 0 < |\zeta| < +\infty). \tag{3.44}$$

Поэтому другой вопрос, который возникает в связи с теоремой 7, это вопрос о том, сходятся ли во всей плоскости z при условии (3.42) бесконечные произведения

$$\pi_\infty(z; a_\mu) = \prod_{\mu=1}^{\infty} A_\infty^{(-)}(z; a_\mu), \quad \pi_\infty(z; b_\nu) = \prod_{\nu=1}^{\infty} A_\infty^{(-)}(z; b_\nu), \tag{3.45}$$

где

$$A_\infty^{(-)}(z;\zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\left\{-W_\infty^{(-)}(z;\zeta)\right\}, \tag{3.46}$$

и если да, то входят ли функции $\pi_\infty(z; a_\mu)$ и $\pi_\infty(z; b_\nu)$ в класс $N_\infty\{\omega\}$?

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 20.XI.1970

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Վերջավոր հարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացիան. (ամփոփում)

Հոդվածում, հեղինակի [11] հետազոտությունում զարգացված մեթոդի հետագա ընդլայնման և ընդհանրացման ճանապարհով, բերվում է սկզբունքորեն նոր և ընդհանուր եղանակ ամբողջ վերջավոր հարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացման պրոբլեմի համար։ Հիմնական 7 թեորեման ընդգրկում է մերոմորֆ ֆունկցիաներ, որոնց խարակտերիստիկներն ունեն կամայական աճ։

M. M. DŽRBAŠIAN. *Factorisation of functions, meromorphic in the finite plane* (summary)

By improving and generalizing the method, developed in (11), a new general solution for the problem of factorisation of functions, meromorphic in the finite plane is obtained. The main theorem 7 covers meromorphic functions with characteristics of arbitrary growth.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, т. II, М., „Наука", 1968.
2. *R. Nevanlinna.* Zur Theorie ober meromorphen Funktionen, Acta Math., 46, 1925.
3. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М., Огиз, 1941, 226.
4. *У. Хейман.* Мероморфные функции, М., „Мир", 1966.
5. *R. Nevanlinna.* Bemerkungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung, Soc. Sci. Fenn., Comment. Phys. Math., 2, Nr. 2, 1923.
6. *E. Picard.* Traitè d'Analyse, т. II, Paris, 1893, 145—148.
7. *В. В. Голубев.* Исследования по теории особых точек однозначных функций, Ученые записки государственного саратовского университета, т. I, вып. 3, 1924; а также в собрании трудов того же автора, „Однозначные аналитические функции", М., Физматгиз, 1961, 200—260.
8. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН АрмССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
9. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Инст. матем. и мех. АН АрмССР, вып. 2, 1948, 3—40.
10. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
11. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб., т. 79 (121), № 4 (8), 1969, 517—615.
12. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, серия матем., 32, 1968, 1075—1111.