

В. П. ГРОМОВ

## К ТЕОРИИ КРАТНЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

## § 1. Введение

В последние десятилетия в различных областях комплексного анализа все чаще и чаще появляются кратные последовательности полиномов Дирихле, а также и кратные ряды Дирихле. Так, например, одним из основных достижений интенсивно развивающейся общей теории дифференциальных уравнений в частных производных является доказательство аппроксимационных теорем для однородных линейных уравнений как конечного так и бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Эти теоремы показывают, что решения таких уравнений могут быть представлены в виде предела последовательности полиномов Дирихле вида

$$\sum d(z) e^{(l, z)},$$

где  $(l)$  — нули характеристической функции уравнения, а  $d(z)$  — многочлены (см. [1], [2]).

В работах [3], [4] изучались кратные последовательности полиномов Дирихле. Там, в частности, устанавливается, что если такая последовательность равномерно сходится в „достаточно большой“ области, то предельной функции ставится в соответствие единственным образом кратный ряд Дирихле.

Наконец, в последние годы появились работы [5], [6], посвященные вопросам представления функций многих комплексных переменных, голоморфных в тех или иных областях, посредством кратных рядов Дирихле.

На фоне этих работ естественно появляется необходимость в построении общей теории кратных рядов Дирихле.

Настоящая работа посвящена исследованию кратных рядов Дирихле в случае положительных показателей  $\{\lambda_n^{(i)}\}$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ), удовлетворяющих условию

$$\lim_{n_1 + \dots + n_p \rightarrow \infty} \frac{\ln(n_1 + \dots + n_p)}{\lambda_{n_1}^{(1)} + \dots + \lambda_{n_p}^{(p)}} = 0.$$

Здесь, в частности, указывается естественный геометрический подход к определению понятия гиперповерхности сопряженных абсцисс сходимости и систем сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле. Устанавливается аналитическое соотношение, связывающее системы сопряженных абсцисс сходимости, коэффициентов и показателей ряда, и представляющее собой необходимое и достаточное условие того,

чтобы система вещественных чисел являлась системой сопряженных абсцисс сходимости. Дается полная геометрическая характеристика гиперповерхностей сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле.

## § 2. Кратные ряды Дирихле

Пусть

$$\{\lambda_n^{(i)}\}, \quad 0 < \lambda_1^{(i)} < \lambda_2^{(i)} < \dots \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

— последовательности положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |n|}{|\lambda_{\{n\}}|} = 0, \quad (1)$$

где  $|n| = n_1 + \dots + n_p$ ,  $|\lambda_{\{n\}}| = \lambda_{n_1}^{(1)} + \dots + \lambda_{n_p}^{(p)}$ .

Рассмотрим ряд (ряд Дирихле)

$$\sum_{(n)} d_{(n)} e^{i(\lambda_{(n)}, z)}. \quad (2)$$

Здесь  $d_{(n)}$  — комплексные числа,  $(n) = (n_1, \dots, n_p)$ ,  $n_i = 1, 2, \dots$ ;  $(i = 1, 2, \dots, p)$ ;  $(z) = (z_1, \dots, z_p) \in C^p$ ,  $(\lambda_{(n)}, z) = \lambda_{n_1}^{(1)} z_1 + \dots + \lambda_{n_p}^{(p)} z_p$ .

Лемма Абеля. Пусть

$$|d_{(n)} e^{i(\lambda_{(n)}, z^0)}| < M \quad (n_1, \dots, n_p = 1, 2, \dots),$$

где  $(z^0) = (z_1^0, \dots, z_p^0) \in C^p$ .

Тогда ряд (2) сходится абсолютно в области

$$Q: |\operatorname{Re}(z_i)| < \operatorname{Re}(z_i^0) \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

На любом компакте  $K \subset Q$  ряд сходится равномерно.

Доказательство. Пусть  $(z) \in Q$ , тогда

$$|d_{(n)} e^{i(\lambda_{(n)}, z)}| \leq M \exp \{i(\lambda_{(n)}, \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z^0))\} \leq M e^{-\delta |\lambda_{(n)}|},$$

где  $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_p)$ ,  $\delta_i = \operatorname{Re}(z_i^0) - \operatorname{Re}(z_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ).

Из этого неравенства в силу (1) вытекают все утверждения леммы.

Определение 1. Множество  $D \subset C^p$  называется областью сходимости ряда Дирихле (2), если ряд сходится абсолютно в окрестности каждой точки  $(z) \in D$ .

В  $p$ -мерном вещественном пространстве  $R^p$  определим множество  $B$  всех тех точек  $(x) = (x_1, \dots, x_p)$ , координаты которых являются абсциссами точек абсолютной сходимости ряда (2).

Исходя из определения  $B$  и леммы Абеля, получаем следующие свойства множества  $B$ .

1) Если имеется хотя бы одна точка  $(z) \in C^p$ , в которой члены ряда (2) по модулю ограничены, то множество  $B$  непусто.

2) Множество  $B$  — октантообразно, т. е., если  $(x') = (x'_1, \dots, x'_p) \in B$ , то  $B$  принадлежит весь гипероктант  $\{x_i < x'_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)\}$ .

3) Множество  $B^3$ , состоящее из всех внутренних точек множества  $B$ , также непусто.



4) Множество  $B$  является выпуклым множеством.

Свойства 1), 2) и 3) непосредственно следуют из определения множества  $B$ . Докажем свойство 4).

Если  $A > 0$ ,  $B \geq 0$  и  $0 \leq \theta \leq 1$ , то

$$A^\theta B^{1-\theta} \leq (A+B)^\theta (A+B)^{1-\theta} = A+B.$$

Пусть теперь  $(x')$  и  $(x'') \in B$ , тогда

$$\begin{aligned} |d_{(n)}| e^{O_{(n)} \cdot x''^\theta + x'^{1-\theta}} &= [|d_{(n)}| e^{O_{(n)} \cdot x'}]^\theta [|d_{(n)}| e^{O_{(n)} \cdot x''}]^{1-\theta} \leq \\ &\leq |d_{(n)}| e^{O_{(n)} \cdot x'} + |d_{(n)}| e^{O_{(n)} \cdot x''}. \end{aligned}$$

Следовательно, вместе с двумя точками  $(x')$  и  $(x'')$  множеству  $B$  принадлежит и весь отрезок, соединяющий эти точки.

Обозначим через  $G$  — множество точек  $(x) \in R^p$ , координаты  $(x_1, \dots, x_p)$  которых представляют собой абсциссы точек  $(z) \in C^p$ , в которых члены ряда (2) ограничены по модулю. Очевидно, что  $B^0 \subset G$ . Кроме этого из леммы Абеля следует, что  $B^0 = G^0$ , где  $G^0$  — множество внутренних точек множества  $G$ .

Итак  $B$  — выпуклая октантаобразная область. Совокупность граничных точек области  $B^0$  образует некоторую выпуклую гиперповерхность  $\theta$ , которая делит все пространство  $R^p$  на две части. Одной принадлежат точки  $(x_1, \dots, x_p) \in B^0$ , являющиеся совокупностью абсцисс координат точек  $(z) \in C^p$  абсолютной сходимости ряда (2). Другой принадлежат точки  $(x_1, \dots, x_p) \notin B$ , координаты которых являются абсциссами координат точек  $(z) \in C^p$ , в которых ряд (2) не сходится (абсолютно); в этих точках члены ряда (2) по модулю неограничены.

Поверхность  $\theta$  назовем гиперповерхностью сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле (2).

Координаты  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$  точек поверхности сопряженных абсцисс сходимости ряда обладают следующим свойством: если  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) \in \theta$ , то в области

$$Q_1: \{\operatorname{Re}(z_i) < \bar{x}_i \ (i=1, 2, \dots, p)\}$$

ряд (2) сходится абсолютно, и ни в одной точке области

$$Q_2: \{\operatorname{Re}(z_i) > \bar{x}_i \ (i=1, 2, \dots, p)\}$$

он не сходится (абсолютно).

Систему вещественных чисел  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$ , обладающую таким свойством, будем называть системой сопряженных абсцисс сходимости ряда (2). Таким образом, координаты каждой точки  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$  гиперповерхности  $\theta$  представляют собой систему сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле.

**Замечание 1.** Понятие гиперповерхности сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле в менее общей форме и на основании другого (негеометрического) подхода, вводилось нами ранее в работах [3], [4], [7].

Введенное выше понятие гиперповерхности сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле и ее свойства позволяют сформулировать

следующее предложение, характеризующее область сходимости ряда Дирихле.

**Теорема 1.** Областью сходимости ряда Дирихле (2) является выпуклая трубчатая область  $T_B = B^0 + iR^p$ , основание которой представляет собой выпуклое октантообразное множество, граница 0 (гиперповерхность сопряженных абсцисс сходимости ряда) которого обладает свойством: если  $(\bar{x}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) \in 0$ , то ряд (2) сходится абсолютно в области  $\{\operatorname{Re}(z_i) < \bar{x}_i \ (i = 1, 2, \dots, p)\}$  и расходится в области  $\{\operatorname{Re}(z_i) > \bar{x}_i \ (i = 1, 2, \dots, p)\}$ .

**Замечание 2.** Из определения систем сопряженных абсцисс сходимости ряда вытекает наличие функциональной зависимости  $\chi[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p] = 0$  между ними. Полагая в этом соотношении  $\operatorname{Re}(z_i) = \bar{x}_i \ (i = 1, 2, \dots, p)$ , мы получим уравнение  $\chi[\operatorname{Re}(z_1), \dots, \operatorname{Re}(z_p)] = 0$ , определяющее границу области сходимости  $T_B$  ряда (2).

**Определение 2.** Верхние грани значений  $\bar{x}_i$  — величины  $X_i \ (i = 1, 2, \dots, p)$ , назовем максимальными абсциссами сходимости ряда (2).

Очевидно гиперпризма  $\{\operatorname{Re}(z_i) < X_i \ (i = 1, 2, \dots, p)\}$  является наименьшей, содержащей область сходимости ряда (2).

Заметим, что гиперповерхность сопряженных абсцисс сходимости ряда (2) может содержать лучи, параллельные координатным осям. В этом случае среди сопряженных абсцисс сходимости в системе  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$  может быть число, например  $\bar{x}_1$ , обладающее свойством: при замене  $\bar{x}_1$  на большее рассматриваемая система перестает быть системой сопряженных абсцисс сходимости. Число  $\bar{x}_1$ , обладающее таким свойством, назовем крайнесопряженной абсциссой в данной системе  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$ .

**Определение 3.** Если в системе  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) \in 0$  каждое  $\bar{x}_i$  является крайнесопряженной абсциссой, то такую систему назовем системой крайнесопряженных абсцисс сходимости ряда (2).

**Замечание 3.** Здесь и ниже рассматривается только абсолютная сходимость рядов Дирихле. Понятие расходимости в точке эквивалентно тому, что в этой точке ряд абсолютно не сходится.

Имеется тесная связь между коэффициентами, показателями и системами сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле. Эта связь устанавливается следующим предложением, являющимся одним из основных в теории кратных рядов Дирихле.

**Теорема 2.** Для того чтобы система вещественных чисел  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$  являлась системой сопряженных абсцисс сходимости ряда (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}| + (\bar{x}, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} = 0. \quad (3)$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$  — система сопряженных абсцисс сходимости ряда (2), тогда для  $z_i < \bar{x}_i \ (i = 1, 2, \dots, p)$  ряд



$$\sum_{(n)} d_{(n)} e^{(z, \lambda_{(n)})}$$

сходится и, следовательно

$$|d_{(n)}| < \exp \{-(z, \lambda_{(n)}), n_1 + \dots + n_p > N_1(z)\}.$$

Поэтому

$$|d_{(n)}| e^{(\bar{x}, \lambda_{(n)})} < \exp \{(\bar{x} - z, \lambda_{(n)})\} < e^{\delta |\lambda_{(n)}|},$$

где  $(\bar{x} - z, \lambda_{(n)}) = (\bar{x}_1 - z_1) \lambda_{n_1}^{(1)} + \dots + (\bar{x}_p - z_p) \lambda_{n_p}^{(p)}$ ,

$$\delta = \max \{\delta_1, \dots, \delta_p\}, \delta_i = \bar{x}_i - z_i \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Отсюда

$$\frac{\ln |d_{(n)}| + (\bar{x}, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} < \delta, n_1 + \dots + n_p > N(\delta).$$

Так как числа  $z_i (i = 1, 2, \dots, p)$  можно выбирать как угодно близкими к числам  $\bar{x}_i (i = 1, 2, \dots, p)$ , то

$$A = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}| + (\bar{x}, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} \leq 0.$$

Покажем, что  $A$  меньше нуля быть не может. Действительно, пусть  $A < 0$ , тогда для достаточно малого  $q > 0$  такого, что  $A < -q < 0$ , имеем

$$\frac{\ln |d_{(n)}| + (\bar{x}, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} < -q, n_1 + \dots + n_p > N(q).$$

Отсюда

$$d_{(n)} e^{(\bar{x} + \varepsilon, \lambda_{(n)})} < e^{-\varepsilon |\lambda_{(n)}|},$$

$$\varepsilon = \frac{q}{2}, n_1 + \dots + n_p > N(\varepsilon).$$

Из этого неравенства в силу (1) следует, что ряд

$$\sum_{(n)} d_{(n)} \exp \{(\bar{x} + \varepsilon, \lambda_{(n)})\}$$

сходится. Но это невозможно, так как  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$  — система сопряженных абсцисс сходимости ряда (2). Значит наше предположение, что  $A < 0$ , неверно. Необходимость доказана.

Достаточность. Покажем, что если система чисел  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$  удовлетворяет условию (3), то ряд (2) сходится абсолютно в области

$$Q_1: \{\operatorname{Re}(z_i) < \bar{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)\}$$

и расходится в каждой точке области

$$Q_2: \{\operatorname{Re}(z_i) > \bar{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)\}.$$

Пусть  $(z) \in Q_1$ , положим

$$\bar{x}_i - \operatorname{Re}(z_i) = 2\delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, p), \\ \delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_p).$$

Согласно (3) имеем

$$|d_{(n)}| e^{(\bar{x}, \lambda_{(n)})} < e^{\delta | \lambda_{(n)} |}, \quad n_1 + \dots + n_p > N(\delta).$$

Отсюда, принимая во внимание (1), получаем что

$$|d_{(n)} e^{(\bar{x}, \lambda_{(n)})}| < \exp \{ -(\lambda_{(n)}, \bar{x} - \operatorname{Re}(z) + \delta) \} < \\ < e^{-\delta | \lambda_{(n)} |} < e^{-\frac{\delta}{p+1} \ln |n|} = \frac{1}{|n|^{p+1}}, \\ |n| = n_1 + \dots + n_p > N_0,$$

где

$$\varepsilon = \frac{\delta}{p+1} (\lambda_{(n)}, \bar{x} - \operatorname{Re}(z) + \delta) = \sum_{i=1}^p \lambda_{n_i}^{(i)} [\bar{x}_i - \operatorname{Re}(z_i) + \delta].$$

Следовательно, ряд (2) сходится абсолютно в области  $Q_1$ .

Пусть теперь  $(z) \in Q_2$ , положим

$$\delta_i = \operatorname{Re}(z_i) - \bar{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad \delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_p).$$

В силу условий теоремы существует подпоследовательность  $(\tilde{n}) = (\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_p)$  такая, что

$$d_{(\tilde{n})} e^{(\bar{x}, \lambda_{(\tilde{n})})} > e^{-\delta | \lambda_{(\tilde{n})} |}.$$

Отсюда

$$|d_{(\tilde{n})} e^{(\bar{x}, \lambda_{(\tilde{n})})}| > \exp \{ (\lambda_{(\tilde{n})}, \operatorname{Re}(z) - \bar{x} - \delta) \} \geq 1.$$

Из этого неравенства заключаем, что ряд (2) в области  $Q_2$  не сходится. Теорема доказана полностью.

Приведем некоторые примеры.

1° Областью сходимости ряда

$$\sum_{(n)} \exp(n, z)$$

является трубчатая область  $\{\operatorname{Re}(z_i) < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p)\}$ . Граница гипероктанта  $\{x_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p)\}$  представляет собой гиперповерхность сопряженных абсцисс сходимости ряда.

Формула (3) очевидна для каждой системы  $\{\bar{x}_i \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p)\}$ , в которой хотя бы одно из чисел  $\bar{x}_i$  равно нулю. Система  $(0, 0, \dots, 0)$  — единственная система крайнесопряженных абсцисс сходимости ряда.

2° Область сходимости ряда

$$\sum_{(n)} e^{-n_1} e^{-n_2^2} \cdots e^{-n_p^2} (n, z)$$

определяется условием:  $\operatorname{Re}(z_i) < 1$ .

Уравнение  $x_1 = 1$  ( $z_1 = x_1 + iy_1$ ) определяет гиперповерхность сопряженных абсцисс сходимости. Формула (3)

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{n_1(\bar{x}_1 - 1) + n_2(\bar{x}_2 - n_2) + \cdots + n_p(\bar{x}_p - n_p)}{n_1 + \cdots + n_p} = 0$$

очевидно, справедлива для каждой системы вида  $(1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p)$ ,  $-\infty < \bar{x}_i < +\infty$  ( $i = 2, 3, \dots, p$ ).

Отметим, что рассматриваемый ряд не имеет систем крайнесопряженных абсцисс сходимости.

3°. Рассмотрим последовательность точек  $\{\lambda_n^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(p)}\} \in R^p$ ,  $n = 1, 2, \dots$  с положительными координатами  $\lambda_n^{(i)}$ , удовлетворяющими условиями

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n^{(1)} + \cdots + \lambda_n^{(p)}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(i)}}{\lambda_n^{(k)}} = \tau_i \leq 1 \quad (4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p).$$

Положим

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\lambda_n^{(1)} z_1} \cdots e^{\lambda_n^{(p)} z_p}.$$

Системы сопряженных абсцисс сходимости этого ряда, согласно теореме 2, определяются формулой

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_n| + \bar{x}_1 \lambda_n^{(1)} + \cdots + \bar{x}_p \lambda_n^{(p)}}{\lambda_n^{(1)} + \cdots + \lambda_n^{(p)}} = 0.$$

Это соотношение, в силу условий (4), представляет собой гиперплоскость

$$\tau_1 \bar{x}_1 + \cdots + \tau_p \bar{x}_p + c = 0, \quad c = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_n|}{\lambda_n^{(k)}}, \quad (5)$$

которая является гиперплоскостью сопряженных абсцисс сходимости нашего ряда

Каждая точка  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$  гиперплоскости (5) представляет собой систему крайнесопряженных абсцисс сходимости ряда. Выражение  $\tau_1 \operatorname{Re}(z_1) + \cdots + \tau_p \operatorname{Re}(z_p) + c = 0$  определяет собой границу области сходимости ряда.

Теорема 2, устанавливающая связь между коэффициентами, показателями и сопряженными абсциссами сходимости, позволяет также найти основные характеристические свойства гиперповерхности сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле. Именно справедлива

Теорема 3. Пусть  $\theta$  — некоторая гиперповерхность в  $R^p$ . Чтобы  $\theta$  была гиперповерхностью сопряженных абсцисс сходимости



ряда Дирихле вида (2), необходимо и достаточно чтобы она представляла собой границу выпуклой октантообразной области.

Доказательство. Необходимость. Пусть  $\theta$  — гиперповерхность сопряженных абсцисс сходимости некоторого ряда Дирихле вида (2), и пусть  $(x'_1, \dots, x'_p)$  и  $(x''_1, \dots, x''_p)$  — внутренние точки той области  $B$ , для которой  $\theta$  является границей. Тогда

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}| + (x'_1, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} < 0,$$

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}| + (x'', \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} < 0.$$

Умножая первое неравенство на  $\nu$ ,  $0 \leq \nu \leq 1$ , а второе — на  $1 - \nu$  и складывая их, получим

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}| + (\lambda_{(n)}, \nu x' + (1 - \nu) x'')}{|\lambda_{(n)}|} < 0.$$

Это рассуждение показывает, что вместе с двумя точками множества  $B$  ему принадлежит и весь отрезок, соединяющий эти точки, т. е. множество  $B$  представляет собой выпуклую область. Октантообразность множества  $B$  следует из свойств ряда Дирихле. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть  $\theta$  является границей некоторой выпуклой октантообразной области  $B \subset R^p$ . Рассмотрим опорную функцию области  $B$ .

$$H_B(\alpha) = H_B(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \sup_{(x_1, \dots, x_p) \in B} (x_1 \cos \alpha_1 + \dots + x_p \cos \alpha_p).$$

Здесь  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  — углы, образованные выбранным лучом и осями координат. Не снижая общности, предположим, что точка  $(0, 0, \dots, 0) \in B$ . Гиперповерхность  $\theta$ , как граница выпуклой октантообразной области  $B$ , определяется в этом случае значениями функции  $H_B(\alpha)$  при

$$\alpha_i \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

Построим ряд

$$\sum_{(n)} d_{(n)} e^{(x, n)},$$

где

$$d_{(n)} = \exp \{ - H_B(\alpha_1^{(n_1)}, \dots, \alpha_p^{(n_p)}) \sqrt{\|n\|} \},$$

$$\alpha_i^{(n_i)} = \arccos \frac{n_i}{\sqrt{\|n\|}} \quad (i=1, 2, \dots, p), \quad \|n\| = n_1^2 + \dots + n_p^2.$$

Нетрудно видеть, что ряд сходится абсолютно в некоторой трубчатой области, содержащей точку  $(0, 0, \dots, 0)$ .



Из определения опорной функции области вытекает, что для каждой точки  $(\bar{x}) \in \theta$

$$\begin{aligned} \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d(n)| + (\bar{x}, n)}{|n|} &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{(\bar{x}, n) - H_B(\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_p^{(n)}) \sqrt{|n|}}{|n|} = \\ &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_1 (\cos \alpha_1^{(n)} + \dots + \bar{x}_p \cos \alpha_p^{(n)}) - H_B(\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_p^{(n)})}{\cos \alpha_1^{(n)} + \dots + \cos \alpha_p^{(n)}} \leq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как  $H_B(\alpha)$  — опорная функция выпуклой области, то для каждой точки  $(\bar{x}) \in \theta$  найдется такое направление  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ , что

$$\bar{x}_1 \cos \alpha_1 + \dots + \bar{x}_p \cos \alpha_p = H_B(\alpha).$$

Образуем такую последовательность векторов  $(n_1, \dots, n_p)$ , что  $\alpha_i^{(n_i)} \rightarrow \alpha_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, p$ . Это, очевидно, всегда возможно\*.

Так как опорная функция  $H_B(\alpha)$  непрерывна, то для указанной последовательности векторов  $(n_1, \dots, n_p)$  будем иметь

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_1 \cos \alpha_1^{(n)} + \dots + \bar{x}_p \cos \alpha_p^{(n)} - H_B(\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_p^{(n)})}{\cos \alpha_1^{(n)} + \dots + \cos \alpha_p^{(n)}} = 0.$$

Отсюда и из неравенства [6] следует, что для точек  $(\bar{x}) \in \theta$

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d(n)| + \bar{x}_1 n_1 + \dots + \bar{x}_p n_p}{n_1 + \dots + n_p} = 0.$$

Теорема доказана полностью.

Московский энергетический институт

Поступило 20.X.1969

Վ. Պ. ԳՐՈՄՈՎ. Դիրիլեյի կրկնակի շարքերի մասին (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքը նվիրված է դրական ցուցիչներով Դիրիլեյի կրկնակի շարքերին, Մասնավորապես տրվում է երկրաչափական բնական մոտեցում հարակից զուգամիտության արսցիսների հիպերմակերևույթի և հարակից զուգամիտության արսցիսների սիստեմների սահմանման ժամանակ, Ստացված է անալիտիկ կապ հարակից զուգամիտության արսցիսների սիստեմների, դորձակիցների և ցուցիչների միջև: Լրիվ բնութագրված է, թե երբ իրական թվերի սիստեմը հիանդիսանա Դիրիլեյի շարքի հարակից զուգամիտության արսցիսների սիստեմ: Տրվում է Դիրիլեյի շարքերի հարակից զուգամիտության արսցիսների հիպերմակերևույթների երկրաչափական բնութագրումը:

V. P. GROMOV. On the theory of multiple Dirichlet series (summary)

We consider multiple Dirichlet series and derive a relation, which defines the surface of conjugate abscissas of convergence of the series. A complete geometrical characterisation of the surface of conjugate abscissas of convergence is proposed.

\* В эту схему может не укладываться только случай, когда  $\theta$  — гиперплоскость. Но для этого случая ряд Дирихле легко строится непосредственно, см. пример 3<sup>о</sup>.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. B. *Malgrange*. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 6, 1955—1956, 271.
2. A. *Martineau*. Equations différentielles d'ordre infini, *Bull. Soc. math. France*, 95, 1967, 109—154.
3. В. П. Громов. Ряды полиномов Дирихле многих комплексных переменных, *ДАН СССР*, 173, № 5, 1967, 999—1001.
4. В. П. Громов. О последовательностях полиномов Дирихле, Докл. научно-техн. конференции по итогам научно-исслед. работ за 1968—69 г., МЭИ, секц. матем., 1969, 18—25.
5. В. П. Громов. О представлении произвольных функций двух комплексных переменных двойными функциональными рядами типа рядов Дирихле, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 32, 1968, 621—632.
6. В. П. Громов. О представлении целых функций двух комплексных переменных функциональными рядами типа рядов Дирихле, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1969.
7. В. П. Громов. Кратные ряды Дирихле, *Сиб. мат. журнал*, X, № 3, 1969, 522—536.