ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 5, 1970 Математика

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, С. Г. САМКО

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ $\psi(x+\alpha) - b(x)\psi(x) = g(x)$

Рассматривается функциональное уравнение $\psi(x+\alpha) - b(x)\psi(x) = g(x)$, $-\infty < x < \infty$, где $\psi(x)$, $g(x)$, $b(x)$—периодические с периодом 2π функции, равносильное следующему уравнению на окружности

$$(A\varphi)(t) \equiv \varphi(te^{i\alpha}) - a(t)\varphi(t) = f(t), \quad |t| = 1. \tag{1}$$

Уравнение (1) изучается в винеровском кольце W и $a(t) \in W$, хотя получаемые ниже результаты легко переносятся и на другие естественные классы, например, гельдеровские классы H^{λ}, классы дифференцируемых функций и др.

К уравнению (1) приводится дискретное уравнение типа свертки

$$\varphi_n - e^{-i\alpha n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}\varphi_k = g_n, \quad n = 0, \pm 1, \cdots \tag{2}$$

с осциллирующим на бесконечности коэффициентом, $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l_1$.

Важный частный случай уравнения (1), когда $a(t) = 1$, давно привлекал внимание многих авторов, особенно в последнее время в связи с проблемами „малых знаменателей“ в задачах небесной механики (см. [5]—[8]). В этих работах впервые А. Винтнер, а позже В. И. Арнольд и Ю. Мозер применили теоретико-числовые [4] методы для получения достаточных условий существования достаточно гладких (или даже аналитических) решений уравнения (1) при $a(t) \equiv 1$.

Обширный класс функциональных уравнений со сдвигом карлемановского типа, содержащих в частности (1) при $\frac{\alpha}{2\pi}$ рациональном, рассматривался в работах [1]—[2] в классах гельдеровских функций. (Там же приведена подробная библиография работ по уравнениям со сдвигом). Полученное в [1]—[2] условие нетеровости в применении к (1) имеет вид

$$\sigma(t) \equiv 1 - a(t)\, a(te^{i\alpha}) \cdots a(te^{i\alpha(m-1)}) \neq 0, \quad |t| = 1, \tag{3}$$

где $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r}{m}$ $(r, m) = 1$. Очевидно, условие (3) необходимо и достаточно для обратимости оператора A (как в классах H^{λ}, так и в кольце W).

Наиболее интересными в теории уравнения (1) с нашей точки зрения являются случаи сдвига „бесконечного порядка“ $\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right.$ — иррациональное$\Big)$ и тождественного вырождения функции $\sigma(t)$: $\sigma(t)\equiv 0$, $|t|=1$ при рациональном $\frac{\alpha}{2\pi}$. Исследованию этих случаев и посвящена настоящая статья. Мы увидим, в частности, что оператор A в указанных случаях, вообще говоря, не нетеров, причем в первом случае — за счет незамкнутости образа $A(W)$, во втором — за счет бесконечной d-характеристики ($\alpha_A=\infty$, $\beta_A=\infty$).

Отметим, что Ф. Д. Гаховым [3] было показано, что аналогичное явление — бесконечная d-характеристика в случае вырождения имеет место для сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

В настоящей работе существенно используется идея „факторизации со сдвигом“ функции винеровского кольца.

Определение. Пусть $a(t)\in W$. „Факторизацией со сдвигом $te^{i\alpha}$“ функции $a(t)$ назовем представление ее в виде

$$a(t)=\frac{v(te^{i\alpha})}{v(t)}, \tag{4}$$

где $v(t)\in W$ и $v(t)\neq 0$, $|t|=1$.

Очевидно, условия $a(t)\neq 0$ и $\operatorname{ind} a(t)=0$ являются необходимыми для факторизации (4).

1. Уравнение (1) в случае иррационального $\frac{\alpha}{2\pi}$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\varphi(te^{i\alpha})-a(t)\varphi(t)=0,\quad |t|=1. \tag{5}$$

Справедлива следующая

Лемма. *Пусть* $|t_0|=1$. *Если* $\frac{\alpha}{2\pi}$ — *иррационально, то множество* $\{t_0e^{i\alpha n}\}_{n=0}^{\infty}$ *плотно на единичной окружности (см.* [7]).

Следствие. Нетривиальное решение уравнения (5) (если оно существует) отлично от нуля всюду на единичной окружности.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (5) *имело при иррациональном* $\frac{\alpha}{2\pi}$ *нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы*

1) $a(t)\neq 0,\ |t|=1,$

2) $\operatorname{ind} a(t)=0,$

3) $\frac{1}{2\pi\alpha}\int\limits_{|t|=1}\frac{\operatorname{Ln} a(t)}{t}\,dt$ — *целое (положительное, отрицательное или нуль) хотя бы для одного выбора ветви* $\operatorname{Ln} a(t)$,

4) $\left\{\dfrac{1}{e^{i\alpha k}-1}\displaystyle\int\limits_{|t|=1}\dfrac{\ln a(t)}{t^{k+1}}\,dt\right\}_{k=\pm 1,\,\pm 2,\cdots}\in l_1.$

При выполнении этих условий уравнение (5) *имеет одно (линейно независимое) решение**.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi(t)$—нетривиальное решение уравнения (5). Если $a(t_0)=0$, то согласно (5) $\varphi(t_0 e^{i\alpha})=0$, что невозможно в силу следствия из леммы. Поэтому необходимо $a(t)\neq 0$, $|t|=1$. Условие $\operatorname{ind} a(t)=0$ очевидно.

Обозначим $\varkappa=\operatorname{ind}\varphi(t)$, $\tilde{\varphi}(t)=t^{-\varkappa}\varphi(t)$. Тогда (5) примет вид $\tilde{\varphi}(te^{i\alpha})=e^{-i\alpha\varkappa}\,a(t)\,\tilde{\varphi}(t)$, что равносильно равенству

$$\ln\tilde{\varphi}(te^{i\alpha})-\ln\tilde{\varphi}(t)=-i\alpha\varkappa+2\pi ip+\ln a(t),\tag{6}$$

где p — целое пока не определенное число.

Так как $\ln\tilde{\varphi}(t)$, $\ln a(t)\in W$, то положив

$$\ln\tilde{\varphi}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k t^k,\quad \ln a(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_k t^k,$$

получаем систему

$$\gamma_k(e^{i\alpha k}-1)=\begin{cases}-i\alpha\varkappa+2\pi pi+\eta_0, & k=0\\ \eta_k, & k=\pm 1,\pm 2,\cdots.\end{cases}\tag{7}$$

Отсюда необходимо вытекает, что

$$2\pi pi-i\alpha\varkappa+\eta_0=0,\tag{8}$$

$$\{\eta_k(e^{i\alpha k}-1)^{-1}\}_{k=\pm 1,\,\pm 2,\cdots}\in l_1,$$

что совпадает с условиями 3)—4), при этом ветвь логарифма в 3) определяется равенством $\ln a(t)=\ln a(t)-2\pi pi$. Отметим, что из (8) числа p и $\varkappa$ определяются однозначно вследствие иррациональности $\dfrac{\alpha}{2\pi}$.

Достаточность. Пусть условия 1)—4) выполнены. Тогда система (7), а с нею и уравнения (6) и (5) разрешимы. Единственное решение имеет вид

$$\varphi(t)=ct^{\varkappa}e^{\gamma(t)},$$

где

$$\gamma(t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{e^{i\alpha k}-1}\left(\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\ln a(\tau)}{\tau^{k+1}}\,d\tau\right)t^k,$$

---

* В силу иррациональности $\dfrac{\alpha}{2\pi}$ условие 3) теоремы может быть выполнено лишь для одной ветви $\ln a(t)$. Что касается условия 4), то оно, очевидно, не зависит от выбора ветви.

$$\varkappa = -\frac{1}{2\pi\alpha}\int\limits_{|t|=1}\frac{\ln a(t)}{t}\,dt$$

при выборе ветви согласно условию (8), c—произвольная постоянная. Теорема доказана.

Отметим частный случай, когда $a(t) = a = \mathrm{const}$. Тогда, в силу теоремы 1, нетривиальное решение существует лишь при $a = e^{i\alpha n}$, $n = 0, \pm 1, \cdots$.

Перейдем к исследованию неоднородного уравнения (1) при $\frac{\alpha}{2\pi}$ иррациональном. Заметим для этого, что непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Для того чтобы функция* $a(t)$ *допускала „факторизацию со сдвигом" (4) при иррациональном* $\frac{\alpha}{2\pi}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* 1)—4) *теоремы* 1. *При выполнении этих условий функция* $v(t)$ *в* (4) *определяется единственным образом (с точностью до постоянного множителя):* $v(t) = t^{\varkappa} e^{\gamma(t)}$.

Следствие показывает, что при выполнении условий 1)—4) теоремы неоднородное уравнение (1) может быть исследовано до конца. Действительно, представляя $a(t)$ в виде (4), имеем

$$\frac{\varphi(te^{i\alpha})}{v(te^{i\alpha})} - \frac{\varphi(t)}{v(t)} = \frac{f(t)}{v(te^{i\alpha})}.$$

Обозначив

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{v(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{v(t\,e^{i\alpha})},$$

получим „задачу о скачке" $\psi(te^{i\alpha}) - \psi(t) = g(t)$. Нетрудно видеть, что необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи имеет вид

$$g_0 = 0, \quad \left\{\frac{g_n}{e^{i\alpha n}-1}\right\}_{n=\pm1,\pm2,\cdots} \in l_1,$$

где $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} g_k t^k = g(t)$. Второе из этих условий показывает, что образ оператора A не замкнут в W. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1)—4) *теоремы 1. Для того чтобы неоднородное уравнение* (1) *было разрешимо в* W *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $$\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{tv(te^{i\alpha})}\,dt = 0,$$

2) $$\left\{(e^{i\alpha n}-1)^{-1}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}\,v(te^{i\alpha})}\right\}_{n=\pm1,\pm2,\cdots} \in l_1,$$

где $v(t)$ — *решение задачи* (4). *При выполнении этих условий решение задачи* (1) *имеет вид*

$$\varphi(t) = cv(t) + v(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{e^{i\alpha n} - 1} \int_{|\tau|=1} \frac{f(\tau)\, d\tau}{\tau^{n+1} v(\tau e^{i\alpha})}. \tag{9}$$

Заметим, что условие 1) теоремы 2 представляет собой условие ортогональности $(f, \psi) = \int_{|t|=1} f(t)\psi(t)\,dt = 0$ единственному нулю $\psi(t)$ транспонированного оператора

$$(A^{T}\psi)(t) = e^{-i\alpha}\psi(te^{-i\alpha}) - a(t)\psi(t).$$

Следуя идеям, использованным в работах [5]—[8], получим для $f(t)$ достаточные условия, при которых уравнение (1) имеет решение.

Известно, что почти все иррациональные числа медленно приближаются рациональными. Именно, имеет место следующий факт ([5]—[6]). Пусть $\varepsilon > 0$, почти для всех $\omega \in [0, 2\pi]$ существует постоянная $K = K(\omega)$ такая, что $\left|\omega - \frac{m}{n}\right| > \frac{K}{n^{2+\varepsilon}}$ для любых целых m и n. Класс таких ω содержит, в частности, все алгебраические иррациональные числа (см. [9], стр. 262). Отсюда вытекает ([6], стр. 30), что ряды вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{g_n}{e^{i\alpha n} - 1}$$

сходятся абсолютно для почти всех α, если только

$$g_n = O\left(\frac{1}{|n|^{1+\delta}}\right), \quad \delta > \varepsilon > 0.$$

Следовательно, условие 2) теоремы 2 будет выполнено, если, например, функция $\frac{f(t)}{v(t\, e^{i\alpha})}$ имеет вторую ограниченную производную. Мы приходим к следующему выводу.

Пусть $\frac{\alpha}{2\pi}$ — *алгебраическое иррациональное число (или трансцендентное число, медленно приближаемое рациональными). Если функция* $\frac{f(t)}{v(t\, e^{i\alpha})}$ *имеет ограниченную вторую производную и среднее значение этой функции по окружности* $|t| = 1$ *равно нулю, то для* $a(t)$, *удовлетворяющих условиям* 1)—4) *теоремы 1 уравнение* (1) *разрешимо и его общее решение имеет вид* (9).

2. Случай вырождения $\sigma(t)$ при рациональном $\frac{\alpha}{2\pi}$

Предполагаем, что $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r}{m}$ рационально, $(r, m) = 1$ и $\sigma(t) \equiv 0$, т. е.

$$a(t)\,a(te^{i\alpha})\cdots a(te^{i\alpha(m-1)})\equiv 1,\ |t|=1. \qquad (10)$$

Из представления (10) следует, что

$$a(t)\neq 0,\ |t|=1 \text{ и } \operatorname{ind} a(t)=0.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Для того чтобы при рациональном* $\frac{\alpha}{2\pi}$ *функция* $a(t)$ *допускала „факторизацию со сдвигом"* (4) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (10).

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Из (10) следует, что существует точка t_0 такая, что $a(t_0)=1$. Выберем ветвь $\ln a(t)$ так, чтобы $\ln a(t_0)=0$. Обозначим $\ln a(t)=b(t)=$ $=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k t^k \in W$. Нетрудно видеть, что при указанном выборе ветви справедливо соотношение

$$b(t)+b(te^{i\alpha})+\cdots+b(te^{i\alpha(m-1)})\equiv 0$$

или

$$b_k(1+e^{i\alpha k}+\cdots+e^{i\alpha(m-1)k})=0,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

Отсюда следует, что $b_k=0$ для k, кратных m. Но тогда разрешима в l_1 система

$$u_k(e^{i\alpha k}-1)=b_k,\ k=0,\pm 1,\cdots,$$

а, следовательно, разрешимо в W уравнение

$$u(te^{i\alpha})-u(t)=b(t),\ u(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k t^k,$$

при этом $u_k=b_k(e^{i\alpha k}-1)^{-1}$ для $k\neq lm$, $l=0,\pm 1,\cdots$ и u_k выбирается произвольно при k кратном m, лишь бы $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|u_k|<\infty$. Введем функцию $v(t)=e^{u(t)}$. Очевидно, $v(t)\in W$ и $v(t)\neq 0$, $|t|=1$. Функция $v(t)$ и есть решение задачи „факторизации со сдвигом".

Замечание. В отличие от факторизации при иррациональном $\frac{\alpha}{2\pi}$, решение которой $v(t)$ определялось единственным образом, факторизация при рациональном $\frac{\alpha}{2\pi}$ имеет бесчисленное множество решений. При этом функцию $v(t)$ всегда можно найти с любым наперед заданным индексом (за счет подбора u_k при $k=lm$, $l=0,\pm 1,\cdots$). Например, положив $|u_0|>2\sum_{j\neq lm}|b_j|\,|1-e^{i\alpha j}|^{-1}$ и $u_k=0$ для $k=\pm m,\pm 2m,\cdots$, получим $\operatorname{ind} v(t)=0$.

Переходим к исследованию уравнения (1). При выполнении условия (10) представим функцию $a(t)$ в виде (4), что возможно согласно теореме 3.

Имеем

$$\frac{\varphi(te^{i\alpha})}{v(te^{i\alpha})}-\frac{\varphi(t)}{v(t)}=\frac{f(te^{i\alpha})}{v(te^{i\alpha})},\quad |t|=1.$$

Обозначив, как и в п° 1

$$\frac{\varphi(t)}{v(t)}=\psi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k t^k,\quad \frac{f(t)}{v(t\,e^{i\alpha})}=g(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_k t^k,$$

приходим к системе $\psi_k(e^{i\alpha k}-1)=g_k$, $k=0,\pm1,\cdots$, откуда $\psi_k=(e^{i\alpha k}-1)^{-1}g_k$ при $k\neq jm$, $j=0,\pm1,\cdots$, и ψ_k произвольно при k, кратных m, если выполнены необходимые и достаточные условия разрешимости: $g_k=0$, $k=0,\pm m,\cdots$. Тем самым получена следующая

Теорема 4. *Оператор A нормально разрешим в кольце W и оба его дефектные числа бесконечны. Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения $A\varphi=f$ имеют вид*

$$\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)\,dt}{t^{k+1}v(te^{i\alpha})}=0,\quad k=0,\pm m,\ \pm 2m,\cdots.$$

При выполнении этих условий решение уравнения имеет вид

$$\varphi(t)=v(t)\left[\sum_{k\neq 0,\pm m,\cdots}\left(\frac{g_k}{e^{i\alpha k}-1}\right)t^k+\sum_{j=-\infty}^{\infty}c_j t^{mj}\right],$$

где $\{c_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — произвольная последовательность из l_1.

Замечание. Аналог теоремы 4 имеет место для дискретного уравнения (2) в пространствах l_p, $1\leqslant p<\infty$ и c_0.

Ростовский государственный
университет

Поступило 11.VI.1970

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆՑ, Ս. Գ. ՍԱՄԿՈ. $\psi(x+\alpha)-b(x)\psi(x)=g(x)$ *ֆունկցիոնալ հավասարման մասին (ամփոփում)*

$(A\varphi)(t)\equiv\varphi(te^{i\alpha})-a(t)\varphi(t)=f(t)$, $|t|=1$ *ֆունկցիոնալ հավասարումը դիտարկվում է այն դեպքերում, երբ* $\frac{\alpha}{2\pi}$*-ն իռացիոնալ է կամ* $\frac{\alpha}{2\pi}$*-ն այնպիսի ռացիոնալ թիվ է, որ վերոհիշյալ հավասարման սիմվոլը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝*

$$\sigma(t)\equiv 1-a(t)\,a(te^{i\alpha})\cdots a(te^{i\alpha(m-1)})\equiv 0,\ \frac{\alpha}{2\pi}=\frac{r}{m},\ |t|=1.$$

Ցույց է տրվում, որ երկու դեպքերում էլ օպերատորը նետերյան չէ։ Առաջին դեպքում A օպերատորը ունի անվերջ α-խարակտերիստիկա, երկրորդ դեպքում՝ ոչ-փակ պատկեր։ Ուսումնասիրությունները հենվում են $a(t)=\frac{v(te^{i\alpha})}{v(t)}$ *— ի «ֆակտորիզացիայի» վրա։ Եթե $a(t)$-ն ֆակտորիզացվում է, ապա ոչ-ինքնահամալուծ հավասարումը լուծվում է մինչև վերջ։*

N. K. KARAPETIANTS, S. G. SAMKO. *On a functional equation*
$\psi(x+a) - b(x)\psi(x) = g(x)$ (summary)

A functional equation $(A\varphi)(t) \equiv \varphi(te^{i\alpha}) - a(t)\varphi(t) = f(t)$, $|t| = 1$, is considered in the case $\sigma(t) = 1 - a(t)\, a(te^{i\alpha}) \cdots a(te^{i\alpha(m-1)}) \equiv 0$, $|t| = 1$, if $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r}{m}$ is rational and in the case of irrational $\frac{\alpha}{2\pi}$. It is shown that in the both cases the operator A is not uotherian. In the first case the operator has an infinite L-characteristic, in the second case it has an unclosed image. The investigation is based on the „factorisation" of $a(t) > \frac{v(te^{i\alpha})}{v(t)}$. If $a(t)$ my be factorised, the nonhomogeneous equation permits complete solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. С. Литвинчук.* Теория Нетера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными неизвестными, ИАН СССР, сер. матем., 31, № 3, 1967, 563—586.
2. *Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения, УМН, XXIII, 3, 1968, 68—121.
3. *Ф. Д. Гахов.* Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши, Диф. уравнения, 1966, II, № 4, 1966, 533—543.
4. *А. Я. Хинчин.* Цепные дроби, М., 1935.
5. *A. Wintner.* The linear difference equations of first order for angular variables, Duke Math. Journ., 12, № 3, 1945, 445—449.
6. *В. И. Арнольд.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 1, 1961, 21—86.
7. *В. И. Арнольд.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движений в классической и небесной механике, УМН, XVIII, вып. 6 (114), 1963, 91—192.
8. *Ю. Мозер.* О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь, Сб. переводов Математика, 6:5, 1962, 51—67.
9. *А. А. Бухштаб.* Теория чисел, Учпедгиз, М., 1960.