

Ф. А. ШАМОЯН

ОПИСАНИЕ ЗАМКНУТЫХ ИДЕАЛОВ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФАКТОРИЗАЦИИ В АЛГЕБРАХ РАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ

Введем следующие обозначения:

1. U_R — открытый круг с центром в нуле и радиуса R .
2. $U = U_1$ — открытый единичный круг.
3. $H(U)$ — множество всех функций, аналитических в U .
4. Пусть ρ и σ — положительные числа. Символом X_ρ^σ обозначим

множество

$$\left\{ f \in H(U), f: \|f\|_\rho^\sigma = \sup_{z \in U} |f(z)| \exp \left(-\frac{\sigma}{(1-|z|)^\rho} \right) < +\infty \right\}.$$

5. $X_\rho^\infty = \bigcup_{\sigma > 0} X_\rho^\sigma.$
6. $X_{\rho+0} = \bigcap_{\varepsilon > 0} X_{\rho+\varepsilon}^1.$

В этой статье мы установим, что факторизация М. М. Джрбашяна, предложенная им в [1], хорошо приспособлена к изучению алгебры $X_{\rho+0}$ ($\rho \geq 1$). Мы дадим полное описание замкнутых идеалов алгебры $X_{\rho+0}$, снабженной естественной топологией. Кроме того, мы покажем, что свойства нулей функции класса X_ρ^∞ ($\rho > 1$) существенно отличаются от свойств нулей целых функций порядка ρ .

§ 1. Вспомогательные сведения

В этом параграфе формулируются применяемые ниже теоремы Линдена и Картрайт.

Теорема А. (Линден, [4]). Пусть f регулярна в $\bar{U}_R$, $f(0)=1$, и, кроме того, пусть $1 < \beta \leq 2$. Тогда существует число $r_0 = r_0(\beta) < R$ такое, что

$$n(\zeta, h, f) \leq K(\beta, \delta)(R-r)^{-\beta} \left\{ \int_0^R M(t, \log^+ |f|)(R-t)^{\beta-1} dt + M(r_0, \log |f|) \right\},$$

где

$$|\zeta| = r < R, h = \delta(R-r), 0 < \delta < \frac{1}{6},$$

$K(\delta, \beta)$ — положительное число, $n(\zeta, h, f)$ — число нулей функции f в круге $|\zeta - z| < h$,

$$M(t, \log^+ |f|) = \sup_{|z|=t} \log^+ |f(z)|.$$

Теорема Б. (Линден, [3]). Пусть для заданного значения $\theta \in [0, 2\pi)$ $S_{h,k}$ обозначает область

$$|1 - 2^{-k} < |z| < 1 - 2^{-k-1}; 2^{-k} \cdot 2\pi h < \theta - \arg z < 2\pi(h+1)2^{-k}\},$$

где h и k — целые числа такие, что $k > 0$,

$$-2^{k-1} \leq h \leq 2^{k-1} - 1.$$

Предположим, что k_0 и ρ — положительные числа, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность точек круга U такая, что при всех достаточно больших n выполняется неравенство $|a_n| > 1 - 2^{-k_0}$, и для любого $\theta \in [0, 2\pi)$ существует не более $c2^{k\rho}$ точек a_n , в каждой из областей $S_{h,k}$ при $k \geq k_0$. Пусть S — любое целое число, большее $\rho - 1$ при $\rho > 1$ и равное нулю при $\rho \leq 1$. Тогда функция P , заданная равенством

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n (a_n - z)}{1 - \bar{a}_n z} \exp \left(\sum_{r=1}^{S+1} \frac{1}{r} \left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z} \right)^r \right),$$

аналитична в U и принадлежит X^∞ .

Теорема В. Пусть P — произведение, построенное в теореме Б. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом n существует число

$$r_n \in \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right]$$

такое, что

$$\log |P(r_n e^{i\theta})| \geq - \frac{1}{(1 - r_n)^{2+\varepsilon}}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Теорема В следует из результатов работ [3], [5].

Теорема Г. (Картрайт, [6]).

Пусть функция φ аналитична в U и $u = \operatorname{Re} \varphi$, пусть далее $\varphi(0) \geq 0$. Если

$$u(z) \leq \frac{1}{(1 - |z|)^\alpha} \quad (z \in U),$$

то при всех $z \in U$ выполняются неравенства

$$(a) \quad |\varphi(z)| \leq \frac{K(\alpha)}{(1 - |z|)}, \quad \text{при } 0 \leq \alpha < 1,$$

$$(б) \quad |\varphi(z)| \leq \frac{K}{(1 - |z|)} \log^2 \left(\frac{1}{1 - |z|} \right), \quad \text{при } \alpha = 1,$$

$$(в) \quad |\varphi(z)| \leq \frac{K(\alpha)}{(1 - |z|)^2}, \quad \text{при } 1 < \alpha < +\infty,$$

где $K(\alpha)$ — положительные постоянные, зависящие только от α .

§ 2. О факторизации М. М. Джрбашяна

Пусть $f \in H(U)$ и

$$T_f(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \quad (0 < r < 1).$$

Множество функций $f \in H(U)$, для которых

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha T_f(r) dr < +\infty,$$

$-1 < \alpha < +\infty$ обозначим через A_α^* .

М. М. Джрбашян в работе [1] нашел каноническое представление этих классов при $-1 < \alpha < +\infty$.

Пусть k — неотрицательная целочисленная функция, заданная в U такая, что множество $\{z \in U: k(z) > 0\}$ не имеет точки сгущения в U . Такую функцию k мы будем называть дивизором. Символом π_k^α мы будем обозначать произведение М. М. Джрбашяна (см. [1]) такое, что

$$N(\pi_k^\alpha) = \{z \in U: k(z) > 0\},$$

причем кратность нуля в точке z равна $k(z)$, где $N(f)$ есть множество нулей функции f . Каждой функции $f \in H(U)$ соответствует дивизор k_f , определяемый так: $k_f(z)$ равняется кратности нуля $z \in U$ для функции f .

М. М. Джрбашян доказал (см. [1]), что каждую функцию $f \in A_\alpha^*$ можно представить в следующем виде:

$$f(z) = \frac{k_\alpha}{c_\lambda} z^\lambda \pi_{k_f}^\alpha(z) \exp g'_\alpha(z) \quad (z \in U), \quad (1)$$

где

$$g'_\alpha(z) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \log |f(\rho e^{i\theta})| \rho d\theta d\rho}{(1-\rho e^{-i\theta} z)^{\alpha+2}} \quad (z \in U),$$

$$k_\alpha = \exp \left[\lambda(\alpha+1) \int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^\alpha \log \frac{1}{\rho} d\rho}{\rho} \right],$$

c_λ — коэффициент при z^λ в разложении f в ряд Маклорена. Произведение $\pi_{k_f}^\alpha$ определяется так

$$\pi_{k_f}^\alpha = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) \exp [-U_\alpha(z, z_k)] \quad (z \in U), \quad (2)$$

где

$$U_\alpha(z, \zeta) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \right| \rho d\theta d\rho}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}, \quad (3)$$

а $\{z_k\}$ — расположенное в последовательность множество $N(f)$, каждый элемент z множества $N(f)$ встречается в этой последовательности $k_f(z)$ раз.

При исследовании замкнутых идеалов в алгебре X_{p+0} (см. ниже) возникает следующий вопрос:

Пусть $f \in X_{p+0}$, и пусть α таково, что $f \in X_\alpha^*$ (например, $\alpha > p-1$), тогда в силу (1)

$$f = \frac{k_1}{c_1} z^{\alpha} \pi_{k_1}^{\alpha} \exp g_1'.$$

Принадлежит ли функции $\exp g_1', \exp [-g_1']$ множеству X_{p+0} ? Кроме того, сам по себе интересен и такой вопрос, возникающий в связи с тем, что при любых α', α таких, что $\alpha' < \alpha$ выполняется включение $A_{\alpha'}^* \subset A_\alpha^*$ и, тем самым, каждая функция, принадлежащая $A_{\alpha'}^*$, имеет новое представление вида (1) в A_α^* . Каков рост сомножителей $\pi_{k_1}^{\alpha}, \pi_{k_1}^{\alpha'}$, g_1', g_1'' , участвующих в разных представлениях одной и той же функции? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 1. Пусть $f \in X_\alpha^*$ ($\alpha > 1$) и $\alpha > p-1$. Тогда

$$|\pi_{k_1}^{\alpha}(z)| + |\exp(g_1'(z))| \leq \exp \left[\frac{c}{(1-|z|)^p} \log^2 \frac{1}{1-|z|} \right] \quad (z \in U). \quad (4)$$

Если же $f \in X_{p+0}$, то $\pi_{k_1}^{\alpha}, \exp g_1', \exp [-g_1']$ также принадлежат X_{p+0} , где c — некоторое положительное число, независимое от $z \in U$.

Сначала докажем лемму.

Лемма. Пусть k — дивизор такой, что множество $\{z \in U: k(z) > 0\}$ удовлетворяет условию теоремы Б. Если P — произведение, фигурирующее в теореме Б

$$N(P) = \{z \in U: k(z) > 0\},$$

то

$$|g_k^P(z)| \leq \frac{c_0}{(1-|z|)^p} \log^2 \frac{1}{(1-|z|)} \quad (z \in U) \quad (5)$$

для любого $\alpha > p-1$ ($c_0, k = 0, 1, 2, \dots$ — абсолютные постоянные).

Доказательство. Пусть P — произведение, о котором говорится в теореме Б. Так как $P \in A_\alpha^*$ при $\alpha > p-1$, то по теореме М. М. Джрбашяна (см. [1]) для P имеем представление

$$P = \pi_k^P \exp g_k^P. \quad (6)$$

Нужно оценить последний сомножитель*

$$g_k^P(z) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \log |P(\rho e^{i\theta})| \rho d\theta d\rho}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} =$$

* Возможность почленного интегрирования вытекает из следующих ниже оценок.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-\rho^2)^{\alpha} \left[\log \left| 1 - \frac{1-|z_k|^2}{1-z_k z} \right| + \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\alpha+1} \frac{1}{l} \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-z_k \rho e^{i\theta}} \right)^l \right] \cdot \frac{\rho d\theta d\rho}{(1-z \rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^{\alpha+1} \frac{1}{l} \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-z_k z} \right)^l + \log \frac{|z_k|^2}{1-z_k z} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha} \log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k} \right|}{(1-z \rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \rho d\theta d\rho \right]. \quad (7)
\end{aligned}$$

Равенства понимаются с точностью до $2\pi ni$, где n — целое число.

Мы воспользовались теоремой XIII₁ работы [1]. Оценим

$$\begin{aligned}
g_z(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^{\alpha+1} \frac{1}{l} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z} \right)^l + \log \frac{|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z} + \\
&+ \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha} \log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \right|}{(1-z \rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \rho d\theta d\rho. \quad (8)
\end{aligned}$$

Из [1] имеем

$$\begin{aligned}
U_{\alpha}(z, \zeta) &= \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha} \log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \right|}{(1-z \rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \rho d\theta d\rho = \\
&= \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} dt + \\
&+ \sum \frac{\Gamma(\alpha+2+k)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+k)} \left(\int_0^{|\zeta|^2} (1-t)^{\alpha+1} t^{k-1} dt \right) \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
U_{\alpha}(z, \zeta) &= \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} dt - \\
&- \int_0^{|\zeta|^2} \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{t z}{\zeta} \right)^{\alpha+2}} - 1 \right] dt. \quad (9)
\end{aligned}$$

Пусть

$$\left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right| < \frac{1}{8}. \quad (10)$$

Тогда очевидно $z \neq \zeta$ и при $t \in [0, 1]$

$$\frac{tz}{\zeta} \neq 1.$$

Действительно, если $|z| < |\zeta|$, то $\frac{tz}{\zeta} \neq 1$ при $t \in [0, 1]$.

Если же $|z| > |\zeta|$, то из равенства $tz = \zeta$ следовало бы, что $\arg z = \arg \zeta$ и

$$\left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right| = \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - |\zeta| |z|} > 1,$$

что противоречит (10).

Поэтому

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} - 1 \right] dt$$

существует.

Следовательно при условии (10) можно записать следующее равенство:

$$\begin{aligned} U_{\alpha}(z, \zeta) &+ \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} dt - \\ &- \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} - 1 \right] dt + \\ &+ \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} - 1 \right] dt = \\ &= \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} \frac{dt}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} - \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} - 1 \right] dt. \end{aligned}$$

Но при $|z| < |\zeta|$ непосредственное разложение последнего интеграла в степенной ряд показывает, что он совпадает с $\log \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$.

Предыдущие рассуждения показывают, что при условии (10) $\frac{z}{\zeta}$ не может принимать вещественных значений, больших единицы. В силу

аналитичности интеграла относительно $\frac{z}{\zeta}$, получаем, что он равен $\log\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$ (при условии (10)).

Итак, при условии (10)

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{l=1}^{s+1} \frac{1}{l} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^l + \log \frac{|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} + \\ &+ \log \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) + \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} \frac{dt}{t} = \\ &= \sum_{l=1}^{s+1} \frac{1}{l} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^l + \log \left(1 - \frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right) + \\ &+ \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (11)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l=1}^{s+1} \frac{1}{l} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^l + \log \left(1 - \frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right) \right| &\leq \\ &\leq \left| \frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right|^{s+2} \sum_{k=s+2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 8^k} \end{aligned}$$

при условии (10).

Остается оценить интеграл

$$\int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} \frac{dt}{t}.$$

Сделаем замену переменной, полагая

$$1-t = \tau(1-|\zeta|^2).$$

Тогда оцениваемый интеграл по модулю превратится в

$$\frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha+2}}{|1-\bar{\zeta}z|^{\alpha+2}} \left| \int_0^1 \frac{\tau^{\alpha+1} \zeta^{\alpha+2} d\tau}{(1-\tau(1-|\zeta|^2)) \left(\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z} + \frac{\tau\bar{\zeta}(1-|\zeta|^2)}{1-\bar{\zeta}z} \right)^{\alpha+2}} \right|.$$

Оценим снизу знаменатель подынтегральной дроби.

Имеем

$$1 - \left| \frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z} \right|^2 = \frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{\zeta}z|^2} \leq 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4},$$

то есть

$$\left| \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \right| > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Но так как

$$\left| \frac{\zeta z (1 - |\zeta|^2)}{1 - \bar{\zeta} z} \right| \leq \frac{1}{8},$$

то знаменатель не меньше положительного числа, не зависящего от ζ и z при условии (10) и $|\zeta| \geq \frac{1}{2}$.

Следовательно при условии (10) имеем

$$|g(z)| \leq c_1 \left(\left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right|^{s+2} + \left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right|^{s+2} \right). \quad (12)$$

Переходим к тому случаю, когда

$$\frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \bar{\zeta} z|} > \frac{1}{8}. \quad (13)$$

Мы будем пользоваться формулой (8).

Очевидно можно написать

$$|g(z)| \leq \left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right|^{s+2} \left((s+2) 8^{s+2} + 8^{s+2} \log \frac{1}{1 - |z|} + \right. \\ \left. + 8^{s+2} \cdot \frac{2(a+1)}{\pi} \left| \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - \rho^2) \log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \right|}{(1 - z \rho e^{-i\theta})^{s+2}} \rho d\rho d\theta \right| \right),$$

то есть

$$|g(z)| \leq c_2 \left| \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z} \right|^{s+2} \left\{ 1 + \log \frac{1}{1 - |z|} + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \right| \right| \frac{\rho d\theta d\rho}{1 - 2|z| \rho \cos \theta - \varphi + |z|^2 \rho^2} \right\},$$

где $\varphi = \arg z$.

А при $|\zeta| > \frac{1}{2}$, $0 \leq \rho < 1$ справедливо неравенство

$$\left| \log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \right| \right| \leq -\log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \right| + 2 \log 3.$$

Поэтому

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| \log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \right| \right| \rho d\theta d\rho}{1 - 2|z| \rho \cos \theta - \varphi + |z|^2 \rho^2} =$$

$$= O\left(\log \frac{1}{1-|z|}\right) - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log \left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right| \rho d\theta d\rho}{1 - 2|z|\rho \cos \theta - \rho + |z|^2 \rho^2}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \frac{1}{1-|z|^2 \rho^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log \left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right| \cdot (1-|z|^2 \rho^2) \rho d\theta d\rho}{1 - 2|z|\rho \cos \theta - \rho + |z|^2 \rho^2} \right| = \\ &= \left| \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{1-|z|^2 \rho^2} - \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right| \frac{e^{i\theta} + z\rho}{e^{i\theta} - z\rho} d\theta \right| = \\ &= O\left(\int_0^1 \frac{\rho}{1-\rho^2|z|^2} \log \frac{1}{1-\rho|z|} d\rho\right) = O\left(\log^2 \frac{1}{1-|z|}\right). \end{aligned}$$

В этом можно убедиться, разлагая подынтегральное выражение в ряд. Следовательно имеем

$$|g_\zeta(z)| \leq c_3 \left(\log^2 \frac{1}{1-|z|} \right) \cdot \left| \frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right|^{\gamma+2} \quad (14)$$

при условии (13).

Из (12) и (14) следует

$$|g_\zeta(z)| \leq c \left(\log^2 \frac{1}{1-|z|} \right) \cdot \left| \frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right|^{\gamma+2} \quad (z, \zeta \in U, |\zeta| > \frac{1}{2}),$$

где $\gamma = \min(a, s)$.

Поэтому получаем

$$|g_\alpha^P(z)| \leq c_4 \left(\log^2 \frac{1}{1-|z|} \right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z} \right)^{\gamma+2} \quad (z \in U). \quad (15)$$

Но из оценок работы [3] следует, что последняя сумма не больше $\frac{c_5}{(1-|z|)^p}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Непосредственно из леммы и из (6) (где $k = k_f$) следует оценка (4) для $\pi_{k_f}^a$, (см. теорему Б). Далее заметим, что

$$\pi_{k_f}^z = P \exp(-g_\alpha^P).$$

По предыдущей лемме

$$|\exp(-g_\alpha^P)| \geq \exp \left[-\frac{c_4}{(1-|z|)^p} \log^2 \frac{1}{1-|z|} \right].$$

В силу известных оценок снизу для P , полученных в [5], (см. также [3]), имеем оценку (4) для $\exp g_\alpha^P$.

Пусть $f \in X_{\alpha,0}$, тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует $c_f(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(z)| \leq \exp \frac{c_f(\varepsilon)}{(1-|z|)^{p+\varepsilon}}.$$

Из теоремы В мы заключаем, что при любом n в интервале $\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right]$ содержится число r_n такое, что

$$|\pi_{k,r}^{\alpha}(z)| \geq \exp\left(-\frac{\text{const}}{(1-r_n)^{p+1}}\right)$$

при всех z , равных по модулю r_n .

Поэтому

$$|\exp g'_\alpha(z)| = |f(z) (\pi_{k,r}^{\alpha}(z))^{-1}| \leq \leq \exp \frac{c}{(1-|z|)^{p+1}} \quad (|z| = r_n, n = 1, 2, \dots).$$

Рассуждая теперь так же, как в [3], § 4 получаем, что

$$|\exp g'_\alpha(z)| \leq \exp \frac{c}{(1-|z|)^{p+1}}$$

при всех $z \in U$.

Из теоремы Г следует теперь, что и

$$\text{при всех } z \in U \quad |\exp - g'_\alpha(z)| \leq \exp \frac{c(p, \varepsilon)}{(1-|z|)^{p+1}}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что представление М. М. Джрбашяна A^* можно рассматривать как некоторый аналог представления Адамара (см. [10]) для целых функций конечного порядка.

В монографии М. М. Джрбашяна [2] исследован другой способ факторизации растущих функций, который приводит к параметрическому представлению важных функциональных классов.

Этот способ факторизации не обладает свойством, описанным в теореме 1: произведение типа Бляшке (см. [2]), участвующее в факторизации функции класса X_{p+0} , может не принадлежать этому классу.

§ 3. О замкнутых идеалах в алгебре X_{p+0}

Введем в X_{p+0} топологию проективного предела банаховых пространств $X_{p+\varepsilon}^1$, $\varepsilon > 0$. Тогда X_{p+0} превращается в топологическую алгебру относительно поточечного умножения и сложения. Опишем все замкнутые идеалы в этой алгебре.

Сначала докажем следующую лемму:

Лемма. Если множество $\{z \in U: k(z) > 0\}$ удовлетворяет условию теоремы Б с $\rho \rightarrow \rho + \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого $k_0 > 0$, то при подходящем выборе α (например, $\alpha > \rho - 1$)

$$X_{p+0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi_{k,\varepsilon}^\alpha}{\pi_{k,\varepsilon}^\rho} = 1, \quad (16)$$

где

$$k_r(z) = \begin{cases} k(z), & \text{если } z \in U_r \\ 0, & \text{если } z \in U/U_r \end{cases}$$

(имеется в виду топология пространства X_{r+0}).

Доказательство. Заметим, что из теоремы 1 следует

$$\frac{\pi_k^2}{\pi_{k_r}^2} \in X_{r+1}^1, \quad 0 < r < 1$$

и ограничено в $X'_{r+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$. И кроме того, имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{\pi_k^2}{\pi_{k_r}^2}(z) = 1 \quad (z \in U), \quad (17)$$

так как π_k^2 сходится в U .

Но ввиду вполне непрерывности оператора вложения из $X_{r+\varepsilon}^1 \rightarrow X_{r+2\varepsilon}^1$ (см. [9]), заключаем, что (17) имеет место в $X_{r+2\varepsilon}^1$. Так как ε — любое положительное число, то лемма доказана.

Пусть J — идеал в X_{r+0} , через k_J обозначим дивизор, определенный следующим образом:

$$k_J = \inf_{f \in J} k_f. \quad (18)$$

Если k — дивизор, то через J_k будем обозначать множество

$$\{f \in X_{r+0} : k_f \geq k_J\}.$$

Теорема 2. Пусть J — замкнутый идеал в алгебре X_{r+0} ($r \geq 1$). Тогда

$$1. J = \{f \in X_{r+0} : k_f \geq k_J\};$$

2. Пусть k — дивизор ($k \neq 0$) такой, что множество $\{z \in U : k(z) > 0\}$ удовлетворяет условию теоремы Б с $r \rightarrow r + \varepsilon$ при любом положительном $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого k_0 . Тогда множество

$$\{f \in X_{r+0}, f : k_f \geq k\}$$

есть нетривиальный (отличный от $\{0\}$) замкнутый идеал в X_{r+0} ;

3. Всякий замкнутый идеал в X_{r+0} — главный, точнее, если J — замкнутый идеал в X_{r+0} , то существует $a > 0$ такое, что

$$J = \pi_{k_J}^a X_{r+0}.$$

Доказательство. Легко видеть, что J_{k_J} является замкнутым идеалом в X_{r+0} , где k_J определяется по (18). Чтобы доказать равенство $J = J_{k_J}$ достаточно установить включение $J_{k_J} \subset J$, так как обратное включение очевидно. Если $f \in J$, то $\pi_{k_f}^2 \in J$.

Действительно $f = \pi_{k_f}^2 \exp g'_2$ (см. теорему 1), где

$$\exp g'_2, \exp(-g'_2) \in X_{r+0}.$$

Значит

$$\pi_{kf}^* = f \exp(-g^*) \in J.$$

Согласно лемме

$$X_{p+0} - \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{\pi_{kf}^a}{\pi_{kf,r}^a} \Phi = \Phi$$

для любого

$$\Phi \in X_{p+0}.$$

Докажем, что если

$$\Phi \in J_{kf}, \quad \text{то} \quad \frac{\pi_{kf}^a}{\pi_{kf,r}^a} \Phi \in J.$$

Для этого достаточно установить, что если z_0 такая точка, в которой $k_f(z_0) - k_f(z_0) > 0$, то

$$\frac{\pi_{kf}^a}{\pi_{z_0}^a} \in J,$$

где

$$\pi_{z_0}^a = \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \exp[-U_a(z, z_0)]$$

(см. формулу (3)).

Пусть $h \in J$, $h(z_0) \neq 0^*$ и

$$\Phi_1(z) = \frac{h(z_0) - h(z)}{\pi_{z_0}^a(z)},$$

($z \in U$)

$$\Phi_2(z) = \frac{\pi_{kf}^a}{\pi_{z_0}^a}(z).$$

Функции $\Phi_1, \Phi_2 \in X_{p+0}$, поэтому $\pi_{kf}^a \Phi_1 + h \Phi_2 \in J$.

Так как

$$\frac{h(z_0) \pi_{kf}^a}{\pi_{z_0}^a} = \Phi_1 \pi_{kf}^a + \Phi_2 h \rightarrow \frac{\pi_{kf}^a}{\pi_{z_0}^a} \in J,$$

то мы получаем утверждение 1. Утверждение 2 очевидно, а утверждение 3 следует из утверждения 1 и теоремы 1. Доказательство завершено.

Замечание 1. Пусть J — замкнутый идеал в X_{p+0} ($p > 1$), тогда следующие утверждения равносильны:

1. $J \neq \{0\}$.

* Случай простого нуля функции h . Аналогичным образом рассматривается и случай кратного нуля.

2. Множество $\{z \in U, z: k_J(z) > 0\}$ удовлетворяет условию теоремы Б при $\varphi \rightarrow \varphi + \varepsilon$ для любого положительного ε , начиная с некоторого k_0 .

Замечание 2. Докажем, что теорема 2 не справедлива при $0 \leq \varphi < 1$. Действительно, пусть

$$S(z) = \exp \left(-\frac{1+z}{1-z} \right)$$

и $0 \leq \varphi < 1$, тогда легко видеть, что замыкание идеала

$$J = S X_{\varphi+0}$$

является нетривиальным идеалом в $X_{\varphi+0}$ (см. [7], § 6), и в то же время $k_J(z) \equiv 0$ ($z \in U$).

§ 4. О нулях функций класса X_φ^- ($\varphi > 1$)

Символом $N(f)$ мы будем обозначать множество всех нулей функции f . Как известно, в классе E_φ^∞ всех целых функций порядка не выше φ и нормального типа возможен следующий феномен: подмножества множества $N(f)$ ни при какой $g \in E_\varphi^\infty$ не представимы в виде $N(g)$.

Действительно, если φ — целое число, а $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ записано в виде последовательности множества $N(f)$ ($|a_1| \leq |a_2|, \dots$), то

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left| \sum_{|a_k| < r} a_k^{-\varphi} \right| < +\infty,$$

тогда как, вообще говоря

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k|^{-\varphi} = +\infty,$$

(см. [10]).

Этот факт играет важную роль при исследовании идеалов в алгебрах целых функций (см. [8]).

Мы покажем, что для функций класса X_φ^∞ ($\varphi > 1$) только что отмеченное явление невозможно.

Теорема 3. Если $f \in X_\varphi^\infty$ ($\varphi > 1$) и E — любое подмножество множества $N(f)$, то существует функция $\varphi \in X_\varphi^\infty$ такая, что $N(\varphi) = E$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(0) = 1$.

Положим

$$\beta = \min \left\{ 2, \frac{1}{2} (1 + \varphi) \right\}, \text{ и заметим, что } \beta \in (0).$$

Существует число c такое, что

$$M(t, \log |f|) \leq \frac{c}{(1-t)^\beta} \quad (t \in [0, 1)).$$

Поэтому

$$\int_0^R M(t, \log^+ |f|) (R-t)^{\beta-1} dt \leq \\ \leq C \int_0^R \frac{(R-t)^{\beta-1}}{(1-t)^p} dt < C \int_0^R \frac{dt}{(1-t)^{p-\beta+1}} \leq \frac{C}{(1-R)^{p-\beta}}.$$

Пусть $\zeta \in U$, $|\zeta| = r$. Полагая $R = \frac{1}{2}(1+r)$, получаем (см. теорему А)

$$n(\zeta, h, f) \leq C(p, \delta) \frac{1}{(1-r)^p} ((1-r)^{\beta-p} + M(r_0 \log^+ |f|)) \leq \frac{C_1(\delta p)}{(1-r)^p}.$$

Положим $\delta = \frac{1}{8}$. Тогда последнее неравенство приобретает вид

$$n(\zeta, h, f) \leq \frac{K}{(1-r)^p}. \quad (19)$$

Каждое множество $S_{h,k}$ можно покрыть не зависящим от h и k конечным числом кружков радиуса $\frac{1}{16 \cdot 2^k}$, к которым применима оценка

(19). Поэтому число нулей функции f в множестве $S_{h,k}$ не превосходит $\text{const } 2^{kp}$.

Остальное следует из теоремы Б.

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю В. П. Хавину за постановку задачи и внимание к работе и Н. К. Никольскому, ответом на вопрос которого служит § 4.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступило 3.IV.1970

Յ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Փակ իդեալների նկարագրումը և ֆունկցիոնալային մի ֆանի ճարտար միավոր շրջանում անալիտիկ անոթ ֆունկցիաների պլանիֆիկացումը (ամփոփում)

Դիցուք X_{p+0} բոլոր այն ֆունկցիաների դասն է, որոնք անալիտիկ են միավոր U շրջանում և բավարարում են հետևյալ պայմանին

$$|f(z)| \leq C_f \cdot \exp \frac{1}{(1-|z|)^{p+\varepsilon}} \quad (z \in U)$$

ցանկացած դրական ε -ի համար:

Ապացուցված է, որ U . Մ. Ջրբաշյանի ֆակտորիզացիան, որը բերված է [1] հոդվածում չավ հարմարված է X_{p+0} դասի ուսումնասիրությանը, Այդ թեորեման օգտագործվում է X_{p+0} -ում փակ իդեալների նկարագրման հարցում, որտեղ X_{p+0} դիտված է որպես տոպոլոգիական ալգեբրայի Բացի այդ ապացուցված է, որ X_p -ին պատկանող ֆունկցիաների զրոների բնույթը խիստ տարբերվում է p կարգի և նորմալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների զրոների բնույթից, Այստեղ X_p -ն այն ֆունկցիաների դասն է, որոնք անալիտիկ են U -ում և բավարարում են հետևյալ պայմանին

$$|f(z)| \leq \exp \frac{C}{(1-|z|)^p} \quad (z \in U)$$

C -ն որեւէ թիվ է $(0, +\infty)$ -ին տեղադրելի:

F. A. SHAMOYAN. *The description of closed ideals and some questions of factorisation in algebras of growing functions analytical in a disc* (summary)

Let $X_{\rho+0}$ be the class of all functions f analytical in the unit disc U of the complex plane satisfying the following condition:

$$|f(z)| \leq C_{f,s} \exp \frac{1}{(1-|z|)^{s+1}} \quad (z \in U),$$

for arbitrary positive s . In investigation of the class the factorisation theorem proposed by M. M. Džrbašjan in [1] theorem leads to the complete description of closed ideals in $X_{\rho+0}$ considered as a topological algebra. It is also shown that the properties of zeros of functions belonging to X_{ρ}^{∞} differ from properties of zeros of entire functions with corresponding rate of growth, when X_{ρ}^{∞} is the class of all functions f analytical in U satisfying the condition

$$|f(z)| \leq \exp \frac{C}{(1-|z|)^{\rho}}$$

or some $C \in (0, +\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Дžрбаšян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. инст. матем. и мех. АН Армянской ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
2. М. М. Дžрбаšян. Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области, М., „Наука“, 1966.
3. C. N. Linden. The representations of regular functions, Journ. London Math. Soc. 39, № 153, 1964, 19—30.
4. C. N. Linden. The minimum modulus of functions regular and finite order in the unit circle, Quart. Journ. of Math. (Oxford), № 7, № 27, 1956, 196—216.
5. М. Тсуџи. Canonical product of the meromorphic functions in unit circle, Journ. Math. Soc. Jap., 8, № 1, 1956, 7—19.
6. M. L. Cartwright. On analytic functions regular in unit circle, Quar. J. Math. (Oxford), № 16, 1933.
7. H. S. Shapiro. Weighted polynomial approximation and boundary behaviour of analytic functions, „Современные проблемы теории аналитических функций, 326—335, М., „Наука“, 1966.
8. Н. К. Никольский. Замкнутые идеалы в некоторых алгебрах целых функций, Сиб. мат. журн., № 1, 1968, 211—215.
9. Ф. А. Шамоян. О замкнутых идеалах в одной алгебре растущих аналитических функций, Изв. АН Арм. ССР, „Математика“, IV, № 4, 1969, 267—277.
10. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.