удовлетворяющий условиям

$$а) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(x) = 0 \quad \text{всюду на } [0,1],$$

$$в) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \infty; \quad b_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n \ln n}}\right).$$

Что касается вопроса для каких подсистем

$$[\cos n_k x, \sin n_k x]$$

тригонометрической системы справедливы утверждения А) или В), то в этом направлении имеются положительные результаты, относящиеся лишь к лакунарным и близким к ним системам, причем они получают как следствия из более сильных теорем.

Из известной теоремы Зигмунда (см. [4], стр. 684) следует, что если последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию B_2^* , то из сходимости почти всюду к нулю некоторой подпоследовательности частных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

следует $a_k = b_k = 0, k=1, 2, \dots$.

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система непрерывных функций, определенных на $[0,1]$, $\{\mu_k\}$ — произвольная последовательность натуральных чисел и $N_j = \sum_{k=1}^j \mu_k, j=1, 2, \dots$. Тогда

существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{\nu_k\}$ такая, что

$$1) \quad \nu_k + \mu_k < \nu_{k+1}, \quad k=1, 2, \dots;$$

2) подсистема $\{\varphi_{n_k}(x)\} \equiv \{\varphi_{\nu_k+i}(x), k=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, \mu_k\}$ системы $\{\varphi_n(x)\}$ обладает тем свойством, что если $\{a_k\}$ — ограниченная последовательность действительных чисел и некоторая последовательность частных сумм

$$S_{N_{j_m}}(x) = \sum_{k=1}^{N_{j_m}} a_k \varphi_{n_k}(x) \quad (1.1)$$

ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{n_k}(x) \quad (1.2)$$

* Последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию B_2 , если любое натуральное число n можно лишь ограниченным числом способов представить в виде $n = n_k + n_j$ или $n = n_k - n_j$.

сходится к нулю всюду на $[0,1]$ за исключением не более чем счетного множества, то $a_k = 0$, $k=1, 2, \dots$. Более того, если последовательность (1.1) сходится к суммируемой функции $f(x)$ всюду на $[0,1]$ за исключением не более чем счетного множества, то ряд (1.2) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_{n_k}(x)\}$.

Заметим, что в том частном случае, когда система $\{\varphi_n(x)\}$ совпадает с тригонометрической системой, наша теорема позволяет указать подсистемы тригонометрической системы, для которых справедливо утверждение В) и которые не лакунарны и, более того, не удовлетворяют условию B_2 . Отметим еще, что метод доказательства дает (в случае тригонометрической системы) эффективный способ нахождения последовательности $\{v_k\}$ по заданной последовательности $\{\mu_k\}$.

Доказательству теоремы 1 посвящен § 2.

В § 3 доказывается следующая

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — ограниченная измеримая функция на $[0,1]$, и ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n(x) \quad (1.3)$$

удовлетворяет следующим условиям:

а) для любого $x \in [0,1]$ имеет место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k}}{\gamma_{n_k}(x)} = 0, \quad (1.4)$$

где $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность всех номеров n , для которых $\gamma_n(x) \neq 0$.

б) для каждого $x \in [0,1]$, за исключением не более чем счетного множества, существует (зависящая от x) возрастающая последовательность натуральных чисел $n_k(x)$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k(x)}(x) = f(x), \quad (1.5)$$

где

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^m a_n \gamma_n(x). \quad (1.6)$$

Тогда ряд (1.3) является рядом Фурье—Хаара функции $f(x)$, т. е.

$$a_n = \int_0^1 f(x) \gamma_n(x) dx; \quad n = 0, 1, \dots$$

Эта теорема является усилением теоремы Арутюняна—Талаляна (см. ниже, теорема II, § 2), в том частном случае, когда функция $f(x)$ ограничена.

Далее в § 3 сформулированы два следствия из теоремы 2, являющиеся усилениями частных случаев нашей теоремы 1 и теоремы

Арутюняна—Талаляна ([2], теорема 4) о единственности рядов по системе Уолша.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Мы будем пользоваться следующей теоремой, доказанной Ф. Г. Арутюняном и А. А. Талаляном (см. [2], стр. 1395).

Теорема II. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n(x), \quad (*)$$

где $\{\gamma_n(x)\}$ — система Хаара, обладает свойствами:

1) Некоторая последовательность $\{S_{N_j}(x)\}$ частных сумм ряда (*) сходится к суммируемой функции $f(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$, кроме, быть может, счетного множества точек;

2) Для любой точки $x \in [0,1]$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k}}{\gamma_{n_k}(x)} = 0$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ суть все те номера n , для которых $\gamma_n(x) \neq 0$. Тогда ряд (*) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе Хаара.

Далее, чтобы не усложнять записи, мы рассмотрим тот случай, когда $\{N_{j,m}\}$ совпадает с $\{N_j\}$. Если в приводимых ниже рассуждениях все j снабдить индексом m , то мы получим доказательство общего случая.

Обозначим

$$c_m^{(n)} = \int_0^1 \varphi_n(x) \gamma_m(x) dx, \quad m = 0, 1, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

Имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_m^{(n)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_m^{(n)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Кроме того, в силу нормированности функций $\varphi_n(x)$, имеем

$$|c_m^{(n)}| \leq 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Возьмем две последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\eta_k\}$, удовлетворяющие условиям

$$\varepsilon_n \sum_{k=1}^n \mu_k \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \eta_k < \infty. \quad (2.5)$$

Перейдем к построению последовательности $\{y_k\}$.

Пусть t — натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{\mu_1}{\sqrt{2^{t-1}}} < 1.$$

Возьмем ν_1 настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$|c_m^{(\nu_1+t)}| < \eta_1, \quad i=1, 2, \dots, \mu_1, \quad m \leq 2^{t-1}.$$

Выбор числа ν_1 возможен, в силу (2.2).

После того, как ν_1 выбрано, выберем строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{p_r^{(1)}\}$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$p_1^{(1)} = t,$$

$$\frac{\mu_2}{\sqrt{2^{\frac{p_2^{(1)}}{2}-1}}} < \frac{1}{2},$$

$$|c_m^{(\nu_1+t)}| < \eta_1, \quad i=1, 2, \dots, \mu_1, \quad m \geq 2^{\frac{p_2^{(1)}}{2}},$$

$$\left| \varphi_{\nu_1+t}(x) - \sum_{m=0}^{2^{\frac{p_r^{(1)}}{2}-1}} c_m^{(\nu_1+t)} \chi_m(x) \right| < \varepsilon_r,$$

$$r = 2, 3, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, \mu_1, \quad x \in [0, 1].$$

Выбор последовательности $\{p_r^{(1)}\}$ возможен в силу (2.1) и в силу того, что ряд Фурье—Хаара непрерывной функции сходится к ней равномерно.

Далее возьмем ν_2 настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\nu_1 + \mu_1 < \nu_2$$

и

$$\sqrt{2^{\frac{p_2^{(1)}}{2}-1}} \sum_{m=0}^{2^{\frac{p_2^{(1)}}{2}-1}} |c_m^{(\nu_2+t)}| < \eta_2, \quad i = 1, 2, \dots, \mu_2.$$

Зафиксировав ν_2 , выберем подпоследовательность $\{p_r^{(2)}\}$ последовательности $\{p_r^{(1)}\}$ так, чтобы выполнялись условия

$$p_1^{(2)} = p_2^{(1)},$$

$$\frac{\mu_3}{\sqrt{2^{\frac{p_2^{(2)}}{2}-1}}} < \frac{1}{3},$$

$$|c_m^{(\nu_2+t)}| < \eta_2, \quad i = 1, 2, \dots, \mu_k, \quad m \geq 2^{\frac{p_2^{(2)}}{2}},$$

$$\left| \varphi_{\nu_r+1}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_r^{(2)}}-1} c_m^{(\nu_r+1)} \chi_m(x) \right| < \varepsilon_r,$$

$$r = 2, 3, \dots; i = 1, 2, \dots, \mu_r, x \in [0, 1].$$

Допустим построены число ν_{k-1} и последовательности $\{p_r^{(s-1)}\}$, $s = 2, 3, \dots, k$, причем

$$\sqrt[2]{\frac{\mu_k}{2^{p_2^{(k-1)}}-1}} < \frac{1}{k}.$$

Возьмем ν_k настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\nu_{k-1} + \mu_{k-1} < \nu_k$$

и

$$\sqrt[2]{\frac{\mu_s^{(s-1)}}{2^{p_2^{(s-1)}}-1}} \sum_{m=0}^{2^{p_s^{(s-1)}}-1} |c_m^{(\nu_k+1)}| < \eta_k, \quad s = 2, 3, \dots, k; \quad i = 1, 2, \dots, \mu_k.$$

После того, как ν_k выбрано, выберем подпоследовательность $\{p_r^{(k)}\}$ последовательности $\{p_r^{(k-1)}\}$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$p_1^{(k)} = p_2^{(k-1)},$$

$$\sqrt[2]{\frac{\mu_{k+1}}{2^{p_2^{(k)}}-1}} < \frac{1}{k+1},$$

$$|c_m^{(\nu_k+1)}| < \eta_k, \quad i = 1, 2, \dots, \mu_k, \quad m > 2^{p_2^{(k)}},$$

$$\left| \varphi_{\nu_k+1}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_r^{(k)}}-1} c_m^{(\nu_k+1)} \chi_m(x) \right| < \varepsilon_r,$$

$$r = 2, 3, \dots; i = 1, 2, \dots, \mu_k, x \in [0, 1].$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим последовательности $\{\nu_k\}$ и $\{p_r^{(k)}\}$, где при любом $k > 1$ $\{p_r^{(k)}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{p_r^{(k-1)}\}$ и при этом выполняются следующие условия:

$$\nu_{k-1} + \mu_{k-1} < \nu_k, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (2.6)$$

$$p_1^{(k)} = p_2^{(k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (2.7)$$

$$\sqrt[2]{\frac{\mu_k}{2^{p_1^{(k)}}-1}} < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

$$\sqrt{2^{p_s^{(s-1)}} - 1} \sum_{m=0}^{2^{p_s^{(s-1)}} - 1} |c_m^{(v_k+i)}| < \gamma_k, \quad (2.9)$$

$$k=2, 3, \dots; s=2, 3, \dots, k; i=1, 2, \dots, \mu_k,$$

$$|c_m^{(v_k+i)}| < \gamma_k, \quad k=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, \mu_k, \quad m \geq 2^{p_2^{(k)}}, \quad (2.10)$$

$$\left| \varphi_{v_{k+i}}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_r^{(k)}} - 1} c_m^{(v_k+i)} \gamma_m(x) \right| < \varepsilon_r, \quad (2.11)$$

$$k=1, 2, \dots; r=2, 3, \dots; i=1, 2, \dots, \mu_k; x \in [0, 1].$$

З а м е ч а н и е. Из (2.7), (2.9) и (2.10) следует, что при фиксированном k неравенства

$$|c_m^{(v_k+i)}| < \gamma_k, \quad i=1, 2, \dots, \mu_k \quad (2.12)$$

могут не выполняться только при тех значениях m , которые удовлетворяют условию

$$2^{p_1^{(k)}} \leq m \leq 2^{p_2^{(k)}} - 1. \quad (2.13)$$

С другой стороны, из (2.7) следует, что любое m удовлетворяет неравенству (2.13) только при одном значении k . Таким образом, при любом фиксированном m неравенства (2.12) могут не выполняться только при одном значении k .

Докажем, что система $\{\varphi_{v_{k+i}}(x), k=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, \mu_k\}$ удовлетворяет утверждению теоремы.

Пусть

$$|a_{v_{k+i}}| < M, \quad k=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, \mu_k \quad (2.14)$$

и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_{N_j}(x) = f(x) \quad (2.15)$$

для всех $x \in [0, 1]$ за исключением не более чем счетного множества, где

$$S_{N_j}(x) = \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^{\mu_k} a_{v_{k+i}} \varphi_{v_{k+i}}(x)$$

и $f(x)$ — суммируемая функция.

Нам нужно доказать, что из (2.14) и (2.15) следует

$$a_{v_{k+i}} = \int_0^1 \varphi_{v_{k+i}}(x) f(x) dx, \quad k=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, \mu_k. \quad (2.16)$$

Рассмотрим следующий ряд по системе Хаара:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m \chi_m(x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\nu_k} a_{\nu_k+l} c_m^{(\nu_k+l)} \right) \chi_m(x). \quad (2.17)$$

Оценим коэффициенты b_m ряда (2.17).

В силу приведенного выше замечания для любого фиксированного m неравенства (2.12) выполняются для всех значений k за исключением не более чем одного. Если обозначить это исключительное значение через $k(m)$, то в силу (2.13) будем иметь

$$2^{\rho_1^{(k(m))}} \leq m \leq 2^{\rho_2^{(k(m))}} - 1. \quad (2.18)$$

Отсюда, с учетом (2.3) и (2.14), получим

$$\begin{aligned} |b_m| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\nu_k} a_{\nu_k+l} c_m^{(\nu_k+l)} \right| < M \left(\sum_{l=1}^{\nu_{k(m)}} |c_m^{(\nu_{k(m)}+l)}| + \right. \\ &+ \left. \sum_{k \neq k(m)} \sum_{l=1}^{\nu_k} |c_m^{(\nu_k+l)}| \right) < M \left(\nu_{k(m)} + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \tau_k \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из этой оценки следует, что ряд (2.17) удовлетворяет условию 2) теоремы 2.

Действительно, пусть x_0 — произвольная точка отрезка $[0,1]$ и $\chi_m(x_0) \neq 0$. Из определения функций Хаара и в силу (2.18) имеем

$$|\chi_m(x_0)| > \frac{1}{2} \sqrt{2^{\rho_1^{(k(m))}-1}}. \quad (2.20)$$

Из (2.19) и (2.20) получим

$$\frac{|b_m|}{|\chi_m(x_0)|} < \frac{2M \left(\nu_{k(m)} + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \tau_k \right)}{\sqrt{2^{\rho_1^{(k(m))}-1}}}. \quad (2.21)$$

Очевидно $k(m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, поэтому из (2.21) и (2.8) следует, что

$$\frac{|b_m|}{|\chi_m(x_0)|} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty, \chi_m(x_0) \neq 0,$$

что и требовалось.

Для завершения доказательства теоремы нам нужно показать еще, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| S_{N_j}(x) - \sum_{m=0}^{\rho_{j+1}^{(j)}} b_m \chi_m(x) \right| = 0 \quad (2.22)$$

равномерно на $[0,1]$.

Применяя последовательно (2.14), (2.11), (2.9), (2.4) и (2.5), получим

$$\begin{aligned}
& \left| S_{N_j}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}-1}} b_m \gamma_m(x) \right| = \\
& = \left| \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{\nu_k} a_{\nu_k+l} \varphi_{\nu_k+l}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}-1}} \left(\sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{\nu_k} a_{\nu_k+l} c_m^{(\nu_k+l)} \right) \gamma_m(x) \right| \leq \\
& \leq \left| \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{\nu_k} a_{\nu_k+l} \varphi_{\nu_k+l}(x) - \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{\nu_k} a_{\nu_k+l} \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}-1}} c_m^{(\nu_k+l)} \gamma_m(x) \right| + \\
& + \left| \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\nu_k} a_{\nu_k+l} \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}-1}} c_m^{(\nu_k+l)} \gamma_m(x) \right| \leq \\
& \leq M \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{\nu_k} \left| \varphi_{\nu_k+l}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}-1}} c_m^{(\nu_k+l)} \gamma_m(x) \right| + \\
& + M \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\nu_k} \sqrt{2^{p_{j+1}^{(j)}-1}} \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}-1}} |c_m^{(\nu_k+l)}| \leq \\
& \leq M \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{\nu_k} \varepsilon_{j+1} + M \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\nu_k} \eta_k = \\
& = M \left(\varepsilon_{j+1} \sum_{k=1}^j \nu_k + \sum_{k=j+1}^{\infty} \nu_k \eta_k \right) \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Из (2.15) и (2.22) следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}-1}} b_m \gamma_m(x) = f(x) \quad (2.23)$$

для всех $x \in [0, 1]$, за исключением не более чем счетного множества.

Из (2.23), в силу теоремы 2, получаем, что ряд (2.17) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе Хаара, откуда, в свою очередь, следует

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}-1}} b_m \gamma_m(x) - f(x) \right| dx = 0. \quad (2.24)$$

Из (2.22) и (2.24) получим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 |S_{N_j}(x) - f(x)| dx = 0. \quad (2.25)$$

В силу непрерывности функций $\varphi_n(x)$ из (2.25) получим

$$a_{\nu_k+1} = \int_0^1 \varphi_{\nu_k+1}(x) f(x) dx,$$

что и требовалось.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Сначала введем некоторые обозначения.

Для любого натурального числа $n > 2$ обозначим через $l(n)$ натуральное число, определяемое из соотношений

$$n = 2^{l(n)} + m, \quad 0 \leq m < 2^{l(n)}. \quad (3.1)$$

Тогда будем иметь

$$\max \gamma_n(x) = \sqrt{2^{l(n)}}. \quad (3.2)$$

Далее обозначим

$$\Delta_n^+ = \begin{cases} \{x : a_n \gamma_n(x) = |a_n| \sqrt{2^{l(n)}}\}, & \text{если } a_n \neq 0 \\ \{x : \gamma_n(x) = \sqrt{2^{l(n)}}\}, & \text{если } a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_n^- = \begin{cases} \{x : a_n \gamma_n(x) = -|a_n| \sqrt{2^{l(n)}}\}, & \text{если } a_n \neq 0 \\ \{x : \gamma_n(x) = -\sqrt{2^{l(n)}}\}, & \text{если } a_n = 0. \end{cases}$$

Наконец, пусть $\overline{\Delta_n^+}$ и $\overline{\Delta_n^-}$ будут замыканиями множеств Δ_n^+ и Δ_n^- соответственно.

Лемма. Пусть при некотором n_0

$$S_{n_0}(x) \geq C > 0 \text{ при } x \in \Delta_{n_0}^+. \quad (3.3)$$

Тогда какова бы ни была точка $t \in [0, 1]$ можно найти натуральное число $p > n_0$ такое, что

- $t \notin \overline{\Delta_p^+}, \overline{\Delta_p^-} \subset \overline{\Delta_{n_0}^+}$,
- $S_n(x) > C$ при $x \in \Delta_p^+$ и $n_0 \leq n \leq p$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность интервалов $\Delta_{n_k}^+$, определенных следующими условиями

$$\Delta_{n_k}^+ \subset \Delta_{n_{k-1}}^+, \quad m \Delta_{n_k}^+ = \frac{1}{2} m \Delta_{n_{k-1}}^+; \quad k = 1, 2, \dots$$

Очевидно последовательность n_k возрастающая.

Докажем, что найдется сколь угодно большое натуральное $m > 2$ такое, что

$$|a_{n_m}| \sqrt{2^{l(n_m)}} < \sum_{k=1}^{m-1} |a_{n_k}| \sqrt{2^{l(n_k)}}. \quad (3.4)$$

Сначала докажем существование хотя бы одного $m > 2$, для которого выполняется (3.4). Действительно, если бы такого m не существовало то, во-первых, нашлось бы наименьшее натуральное $i_0 \geq 1$, для которого

$$a_{n_{i_0}} \neq 0 \quad (3.5)$$

и, кроме того, при произвольном $m > i_0 + 1$ выполнялись бы неравенства

$$\begin{aligned} |a_{n_i}| \sqrt{2^{l(n_i)}} &> \sum_{k=1}^{i-1} |a_{n_k}| \sqrt{2^{l(n_k)}} = \\ &= \sum_{k=i_0}^{i-1} |a_{n_k}| \sqrt{2^{l(n_k)}}; \quad i = i_0 + 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда из неравенств (3.6) мы получим

$$|a_{n_m}| \sqrt{2^{l(n_m)}} > 2^{m-i_0-1} |a_{n_{i_0}}| \sqrt{2^{l(n_{i_0})}} \text{ при всех } m > i_0 + 1. \quad (3.7)$$

С другой стороны, из построения интервалов $\Delta_{n_m}^+$ видно, что

$$l(n_m) = l(n_{i_0}) + m - i_0. \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) получаем

$$\frac{|a_{n_m}|}{\sqrt{2^{l(n_m)}}} > 2^{-\frac{1}{2}l(n_{i_0}) + i_0 - 1} |a_{n_{i_0}}| \text{ при } m > i_0 + 1. \quad (3.9)$$

В силу (3.5) из (3.9) следует, что в точке x_0 , являющейся пересечением всех отрезков $\bar{\Delta}_{n_k}^+$, нарушается условие (1.4). Если x_0 — двоично-иррациональная точка — это очевидно. Если же x_0 — двоично-рациональная, то, начиная с некоторого номера K , x_0 будет общим концом отрезков $\bar{\Delta}_{n_k}^+$, $k > K$ и по определению функций Хаара будем иметь

$$|Z_{n_k}(x_0)| = \frac{1}{2} \sqrt{2^{l(n_k)}} \text{ при } k \geq K,$$

откуда, в силу (3.5) и (3.9), видно, что в точке x_0 нарушается условие (1.4). Полученное противоречие доказывает существование натурального числа $m \geq 2$, для которого имеет место (3.4).

Теперь докажем, что число m может быть выбрано сколь угодно большим. Действительно, пусть $N > 1$ — произвольное натуральное число. Заменяя в предыдущих рассуждениях n_1 на n_N , найдем число $m \geq N + 1$, для которого

$$|a_{n_m}| \sqrt{2^{l(n_m)}} < \sum_{k=N}^{m-1} |a_{n_k}| \sqrt{2^{l(n_k)}}.$$

Следовательно для этого m имеет место и (3.4).

Теперь очевидно, что число $m > 2$ можно выбрать так, чтобы вместе с (3.4) выполнялось и

$$t \in \bar{\Delta}_{n_m}^+ \cap \bar{\Delta}_{n_m}^- \quad (3.10)$$

Определим натуральное число p из условий

$$1) \quad m\Delta_p^+ = \frac{1}{2} m\Delta_m^+;$$

2) Δ_p^+ лежит на том из отрезков $\bar{\Delta}_{n_m}^+$ и $\bar{\Delta}_{n_m}^-$, который не содержит t .

Очевидно при таком выборе p утверждение а) леммы будет выполняться.

Далее имеем

$$a_n \gamma_n(x) \geq 0 \text{ при } x \in \Delta_p^+ \text{ и } n_0 < n \leq p, n \neq n_m, \quad (3.11)$$

$$|a_{n_m} \gamma_{n_m}(x)| \leq \sum_{k=1}^{m-1} a_{n_k} \gamma_{n_k}(x) \text{ при } x \in \Delta_p^+. \quad (3.12)$$

Из (3.3), (3.11) и (3.12) следует

$$S_n(x) > C \text{ при } x \in \Delta_p^+ \text{ и } n_0 \leq n \leq p.$$

Таким образом, для выбранного p выполняются оба утверждения леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Функция $f(x)$ предполагалась ограниченной. Можно считать, что

$$|f(x)| \leq 1, x \in [0, 1]. \quad (3.13)$$

Пусть

$$b_n = \int_0^1 f(x) \gamma_n(x) dx; \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.14)$$

и

$$S_m^*(x) = \sum_{n=0}^m b_n \gamma_n(x); \quad m = 0, 1, \dots \quad (3.15)$$

Тогда как известно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*(x) = f(x) \quad \text{почти всюду,} \quad (3.16)$$

и в силу (3.13)

$$|S_n^*(x)| \leq 1, x \in [0, 1]; \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.17)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \gamma_n(x), \quad (3.18)$$

где

$$c_n = a_n - b_n; \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.19)$$

Обозначим через $S_n^-(x)$ частные суммы ряда (3.18).

Рассмотрим два возможных случая.

1) Частные суммы $S_n^-(x)$ ограничены в совокупности на $[0,1]$.

В этом случае ряд (3.18) является рядом Фурье некоторой функции $F(x)$ из L_2 и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^-(x) = F(x) \quad \text{почти всюду.} \quad (3.20)$$

С другой стороны, в силу (3.19), имеем

$$S_n^+(x) = S_n(x) - S_n^-(x). \quad (3.21)$$

Отсюда, в силу условия b) теоремы 2 и (3.16), получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}^+(x) = 0 \quad \text{почти всюду.} \quad (3.22)$$

Из (3.20) и (3.22) следует

$$F(x) = 0 \quad \text{почти всюду.} \quad (3.23)$$

Так как ряд (3.18) есть ряд Фурье функции $F(x)$, то из (3.23) следует

$$c_n = 0; \quad n = 0, 1, \dots,$$

откуда

$$a_n = b_n = \int_0^1 f(x) \gamma_n(x) dx; \quad n = 0, 1, \dots$$

2) Частные суммы $S_n^-(x)$ не ограничены в совокупности.

Тогда найдутся двоично-иррациональная точка $x \in [0,1]$ и натуральное число n_0 такие, что

$$|S_{n_0}^-(x)| > 3.$$

Отсюда, в силу (3.17) и (3.21), получим

$$|S_{n_0}^+(x)| > 2. \quad (3.24)$$

Из (3.24) следует, что в рассматриваемой точке x выполняется одно из неравенств

$$S_{n_0}^+(x) > 2 \quad \text{или} \quad S_{n_0}^+(x) < -2.$$

Случай, когда выполняется второе из этих неравенств, сводится к случаю, когда выполняется первое. Для этого нужно вместо ряда (1.3) рассматривать ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} -a_n \gamma_n(x).$$

Итак пусть выполняется первое неравенство

$$S_{n_0}^+(x) > 2. \quad (3.25)$$

Так как x — двоично-иррациональная точка, то из (3.25) следует

$$S_{n_0}^+(x) > 2 \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{n_0}^+. \quad (3.26)$$

Занумеруем в последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ все двоично-рациональные точки и все точки, в которых не выполняется условие (1.5).

Из (3.26) с применением леммы при $t=x_1$ следует существование натурального числа $p_1 > n_0$ такого, что

- 1) $x_1 \in \overline{\Delta}_{p_1}^+, \overline{\Delta}_{p_1}^+ \subset \overline{\Delta}_{n_0}^+$;
- 2) $S_n(x) > 2$ при $x \in \Delta_{p_1}^+$ и $n_0 \leq n \leq p_1$.

Далее, применяя лемму при $n_0 = p_1$, $C=2$ и $t=x_2$, мы найдем число $p_2 > p_1$ такое, что

- 1) $x_2 \in \overline{\Delta}_{p_2}^+, \overline{\Delta}_{p_2}^+ \subset \overline{\Delta}_{p_1}^+$;
- 2) $S_n(x) > 2$ при $x \in \Delta_{p_2}^+$ и $p_1 \leq n \leq p_2$.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$, удовлетворяющую условиям

$$n_0 < p_1 < p_2 < \dots, \quad (3.27)$$

$$x_k \in \overline{\Delta}_{p_k}^+, \overline{\Delta}_{p_k}^+ \subset \overline{\Delta}_{p_{k-1}}^+; \quad k=1, 2, \dots; \quad (p_0 = n_0) \quad (3.28)$$

и

$$S_n(x) > 2 \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{p_k}^+, \quad n_0 \leq n \leq p_k, \quad k=1, 2, \dots. \quad (3.29)$$

Так как в последовательности $\{x_n\}$ участвуют все двоично-рациональные точки, то из (3.28) следует, что пересечение всех отрезков $\overline{\Delta}_{p_k}^+$ состоит из двоично-иррациональной точки x_0 , отличной от всех x_n , $n=1, 2, \dots$. Будучи двоично-иррациональной точка x_0 принадлежит и всем интервалам $\Delta_{p_k}^+$. Тогда, в силу (3.27) и (3.29), будем иметь

$$S_n(x_0) > 2 \quad \text{при} \quad \text{всех} \quad n \geq n_0,$$

которое противоречит условию б) теоремы 2 и (3.13).

Таким образом, второй случай, т. е. случай, когда частные суммы $S_n(x)$ не ограничены в совокупности, не может выполняться. Теорема 2 доказана.

Заметим, что для тригонометрической системы предложение типа теоремы 2 не справедливо.

Именно, К. Тандори [5] построил ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (3.30)$$

удовлетворяющий условиям

- 1) $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$;
- 2) для любого x

$$\liminf S_n(x) = -\infty, \quad \limsup S_n(x) = +\infty,$$

где $S_n(x)$ — частные суммы ряда (3.30).

Из условий 1) и 2) следует, что в любой точке x некоторая последовательность частных сумм ряда (3.30) сходится к нулю.

Следующие две теоремы являются непосредственными следствиями теоремы 2.

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система непрерывных функций, определенных на $[0,1]$, $\{\mu_k\}$ — произвольная последовательность натуральных чисел и $N_j = \sum_{k=1}^j \mu_k$, $j=1, 2, \dots$. Тогда

существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{\nu_k\}$ такая, что

$$1) \nu_k + \mu_k < \nu_{k+1}; \quad k=1, 2, \dots;$$

2) Подсистема $\{\varphi_{\nu_k+i}(x)\} \equiv \{\varphi_{\nu_k+i}(x); k=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, \mu_k\}$ системы $\{\varphi_n(x)\}$ обладает тем свойством, что если $\{a_k\}$ — ограниченная последовательность действительных чисел, и для каждого $x \in [0,1]$ за исключением не более чем счетного множества, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $j_m(x)$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{N_{j_m(x)}}(x) = f(x),$$

где $S_m(x)$ — частные суммы ряда

$$\sum_{k=1}^m a_k \varphi_{n_k}(x) \tag{3.31}$$

и $f(x)$ — ограниченная измеримая функция, то ряд (3.31) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_{n_k}(x)\}$.

Эта теорема получается из теоремы 2 с помощью тех же рассуждений, которые применялись при выводе теоремы 1 из теоремы II.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ — ограниченная измеримая функция на $[0,1]$, и ряд по системе Уолша

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega_n(x) \tag{3.32}$$

удовлетворяет условиям

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \tag{3.33}$$

б) для любого $x \in [0,1]$, за исключением не более чем счетного множества, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $m_k(x)$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{2^{m_k(x)}}(x) = f(x), \tag{3.34}$$

где

$$\sigma_m(x) = \sum_{n=0}^{m-1} b_n \omega_n(x). \tag{3.35}$$

Тогда ряд (3.32) является рядом Фурье—Уолша функции $f(x)$.

Доказательство. Как известно (см. [6], стр. 155) всюду на $[0,1]$, за исключением двоично-рациональных точек, выполняются равенства

$$w_0(x) = \gamma_0(x), \quad w_1(x) = \gamma_1(x),$$

$$w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{l(n)}}} \sum_{l=2^l(n)}^{2^{l(n)+1}-1} a_l^{(n)} \gamma_l(x), \quad n \geq 2, \quad (3.36)$$

где

$$|a_l^{(n)}| = 1; \quad n = 2, 3, \dots; \quad 2^l(n) \leq i \leq 2^{l(n)+1} - 1. \quad (3.37)$$

Рассмотрим ряд

$$b_0 w_0(x) + b_1 w_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=2^n}^{2^{n+1}-1} b_m w_m(x) \right]. \quad (3.38)$$

В силу равенств (3.36) при любом $N \geq 1$ имеем во всех двоично-иррациональных точках

$$\begin{aligned} & b_0 w_0(x) + b_1 w_1(x) + \sum_{n=1}^N \left[\sum_{m=2^n}^{2^{n+1}-1} b_m w_m(x) \right] = \\ & = b_0 \gamma_0(x) + b_1 \gamma_1(x) + \sum_{n=1}^N \left[\sum_{m=2^n}^{2^{n+1}-1} b_m \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} a_l^{(n)} \gamma_l(x) \right] = \\ & = b_0 \gamma_0(x) + b_1 \gamma_1(x) + \sum_{n=1}^N \left[\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{m=2^n}^{2^{n+1}-1} b_m a_l^{(m)} \right) \gamma_l(x) \right] = \\ & = b_0 \gamma_0(x) + b_1 \gamma_1(x) + \sum_{n=1}^N \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} a_l \gamma_l(x), \end{aligned} \quad (3.39)$$

где

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{m=2^n}^{2^{n+1}-1} b_m a_l^{(m)} \quad \text{при} \quad 2^n \leq l \leq 2^{n+1} - 1. \quad (3.40)$$

Докажем, что ряд по системе Хаара

$$b_0 \gamma_0(x) + b_1 \gamma_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} a_l \gamma_l(x) \quad (3.41)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

Действительно, из условия б) теоремы 4 следует, что в любой точке $x \in [0,1]$, за исключением не более чем счетного множества, некоторая последовательность частных сумм ряда (3.38) сходится к $f(x)$. Тогда, так как в силу (8) ряды (3.38) и (3.41) имеют одинаковые частные суммы, то то же самое имеет место для ряда (3.41). Таким образом, для ряда (3.41) выполняется условие б) теоремы 2. Проверим выполнение условия а).

Из (3.40) и (3.37) имеем при $2^n \leq i \leq 2^{n+1} - 1$

$$\frac{|a_i|}{\max \gamma_i(x)} = \frac{|a_i|}{\sqrt{2^n}} \leq \max \{|b_m| : 2^n \leq m \leq 2^{n+1} - 1\}.$$

Отсюда, в силу (3.33), получим

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|a_l|}{\max \gamma_l(x)} = 0,$$

которое является более сильным, чем условие а) теоремы 2.

Согласно теореме 2 ряд (3.41) является рядом Фурье—Хаара функции $f(x)$, поэтому (см. [6], стр. 143) ряд (3.41) сходится к $f(x)$ в метрике $L[0,1]$. Тогда из (3.39) следует, что ряд (3.38) тоже сходится к $f(x)$ в метрике $L[0,1]$, т. е. (см. обозначение (3.35))

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 |\sigma_{2^N}(x) - f(x)| dx = 0. \tag{3.42}$$

Так как $|w_n(x)| \leq 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то при $2^N > n$ имеем

$$\begin{aligned} |a_n - \int_0^1 f(x) w_n(x) dx| &= \left| \int_0^1 \sigma_{2^N}(x) w_n(x) dx - \right. \\ &\left. - \int_0^1 f(x) w_n(x) dx \right| \leq \int_0^1 |\sigma_{2^N}(x) - f(x)| dx, \end{aligned}$$

откуда, в силу (3.42)

$$a_n = \int_0^1 f(x) w_n(x) dx,$$

что и требовалось. Теорема 4 доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступило 25.VI.1970

Յ. Ա. ՔԱՒԱՅԱՆ. Որոշ օրրոգեցալ սխտեմենեռոյ գրված շարքերի միակութիւն մասին (ամփոփում)

Ապացուցված է թերեմ, որի համաձայն անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած յուրա-
բանչյուր օրթոնորմալ սխտեմից կարելի է անշատել ենթասխտեմ, որով գրված շարքերը
օժտված են միակութիւն որոշակի հատկութեամբ: Ծռանկյունաշափական սխտեմի դեպքում այդ
թերեմը հնարավորութիւն է տալիս նշել լակունար սխտեմներից տարբեր ենթասխտեմներ,
որոնք օժտված են միակութիւն նշված հատկութեամբ: Ապացուցված են նաև, որոշ միակութիւն
թերեմներ շարքի և Ուոլշի շարքերի վերաբերյալ:

F. A. TALALIAN. *On uniqueness of the series by certain orthogonal systems (summary)*

A theorem is proved, according to which from any orthonormal system of continuous functions a subsystem may be chosen, the series by which possess certain uniqueness properties. In the case of trigonometric system the theorem permits to point out nonlacunar subsystems, possessing the uniqueness property. Some uniqueness theorems for the series by the Haar and Walsh systems are proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. П. Л. Ульянов. Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19, вып. 1, 1964, 3—69.
2. Ф. Г. Арутюнян и А. А. Талалиян. О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, серия матем., 28, 6, 1964, 1391—1408.
3. Г. М. Мушеgian и Р. И. Овсепян. О единственности ортогональных рядов, Изв. АН АрмССР, „Математика“, IV, № 4, 1969, 259—266.
4. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды, М., 1961.
5. К. Tandori. Über ein Problem von S. B. Stetschkin, Acta. Sci. Math., 26, 1—2, 1965, 75—78.
6. С. Качмаж и Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., 1958.