ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, №4, 1970 Математика

Д. Г. САНИКИДЗЕ

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ КВАДРАТУРНЫМИ СУММАМИ

При решении многих важных прикладных задач возникает необходимость вычисления сингуляряых интегралов вида

$$S(f;\ x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{f(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\,dt\ \ (-1<x<1), \tag{1}$$

$$S^*(f;\ x)=\int\limits_{-1}^{+1}\frac{f(t)}{t-x}\,dt\ \ (-1<x<1), \tag{2}$$

понимаемых в смысле главного значения по Коши. Для существования их в этом смысле достаточно, например, требовать, чтобы функция f удовлетворяла на заданном отрезке условию Гельдера.

В настоящей заметке для интегралов (1 — 2) изучаются квадратурные процессы

$$S(f;\ x)\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^{(n)2}}\,U_{n-1}(x)-1}{x-x_k^{(n)}}f(x_k^{(n)}), \tag{3}$$

$$S^*(f;\ x)\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{(-1)^{k-1}}{n}\sqrt{1-x_k^{(n)2}}\left[H_{n-1}(x)+T_n(x)\ln\frac{1-x}{1+x}\right]-A_k^{(n)}}{x-x_k^{(n)}}\,f(x_k^{(n)}), \tag{4}$$

где

$$T_n(x)=\cos n\arccos x,\ \ U_{n-1}(x)=\frac{\sin n\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x_k^{(n)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\ \ (k=1,2,\cdots,n),$$

$$A_k^{(n)}=\frac{2}{n}\left[1-2\sum_{r=1}^{\frac{m}{2}}\frac{1}{4r^2-1}\cos\frac{r(2k-1)}{n}\pi\right]\left(m=\begin{cases}n-1, & n\text{—нечетное},\\ n-2, & n\text{—четное}\end{cases}\right),$$

$$H_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}A_k^{(n)}\frac{T_n(x)}{x-x_k^{(n)}}.$$

Формулы (3), (4) являются точными [1], когда f представляет произвольный многочлен степени не выше $n-1$.

Ниже получены некоторые равномерные оценки ошибки указанных квадратурных формул, дающие, по-видимому, основание считать, что формулы эти представляют достаточно эффективное средство приближения с точки зрения доставляемой ими точности.

Обозначим через $R_n(f; x)$ и $R_n^*(f; x)$, соответственно, остаточные члены формул (3) и (4). Пусть $[-\xi, \xi]$ $(0<\xi<1)$ — произвольный отрезок, содержащийся в $(-1, +1)$. Под $f \in KH_m^{(\alpha)}$ будем подразумевать, что функция f имеет на отрезке $[-1, +1]$ m-ую $(m>0)$ производную, удовлетворяющую условию Гельдера с константой K и показателем α.

Теорема. *Если $f \in KH_m^{(\alpha)}$ $(m>0,\ 0<\alpha\leqslant 1)$, то при $n = 2, 3, \cdots$ справедливы неравенства*

$$\max_{x\in[-\xi,\,\xi]} |R_n(f; x)| \leqslant (A_1 + A_2 \ln n) \frac{1}{(n-1)^{m+2}},$$

$$\max_{x\in[-\xi,\,\xi]} |R_n^*(f; x)| \leqslant (A_1^* + A_2^* \ln n + A_3^* \ln^2 n) \frac{1}{(n-1)^{m+\alpha}},$$

где A_1, A_2, A_1^*, A_2^*, A_3^* — не зависящие от n константы, известным образом определяемые через K.

Сформулированная теорема утверждает, в частности, сходимость квадратурных процессов (3) и (4) для функций из класса Гельдера с любым показателем $0<\alpha<1$.

Доказательство теоремы в значительной степени основано на утверждениях, формулируемых ниже в виде лемм.

Лемма 1. *Если алгебраический многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени $\leqslant n-1$ удовлетворяет в точках $x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ неравенству*

$$|Q_{n-1}(x_k^{(n)})| \leqslant \frac{A}{\sqrt{1-x_k^{(n)2}}} \quad (A = \text{const}),$$

то в любой точке $x \in (-1, +1)$ для этого многочлена верна оценка

$$|Q_{n-1}(x)| \leqslant \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}\left(8 + \frac{2}{\pi}|T_n(x)| \ln n\right).$$

Доказательство. Ввиду того, что степень рассматриваемого многочлена не превосходит $n-1$, его можно представить посредством интерполяционного многочлена Лагранжа, построенного по указанным в лемме узлам

$$Q_{n-1}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} T_n(x)}{x - x_k^{(n)}} \sqrt{1-x_k^{(n)2}}\, Q_{n-1}(x_k^{(n)}).$$

Отсюда по условию леммы имеем

$$|Q_{n-1}(x)| \leqslant \frac{A}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{T_n(x)}{x - x_k^{(n)}} \right|.$$

Полагая $x = \cos\vartheta$ $(0 < \vartheta < \pi)$, $\vartheta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi$, заметим прежде всего, что

$$\frac{1}{n}\left|\frac{T_n(x)}{x - x_k^{(n)}}\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\frac{\cos n\vartheta - \cos n\vartheta_k^{(n)}}{\cos\vartheta - \cos\vartheta_k^{(n)}}\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{\sin\frac{n(\vartheta - \vartheta_k^{(n)})}{2}\sin\frac{n(\vartheta+\vartheta_k^{(n)})}{2}}{\sin\frac{\vartheta - \vartheta_k^{(n)}}{2}\sin\frac{\vartheta + \vartheta_k^{(n)}}{2}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\frac{\vartheta + \vartheta_k^{(n)}}{2}} \leqslant \frac{\sin\vartheta + \sin\vartheta_k^{(n)}}{\sin\vartheta\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k^{(n)}}{2}} = \frac{2\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k^{(n)}}{2}\cos\frac{\vartheta - \vartheta_k^{(n)}}{2}}{\sin\vartheta\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k^{(n)}}{2}} \leqslant \frac{2}{\sin\vartheta}.$$

Значит

$$\frac{1}{n}\left|\frac{T_n(x)}{x - x_k^{(n)}}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{5}$$

Предположим теперь, что $\vartheta_m^{(n)} < \vartheta < \vartheta_{m+1}^{(n)}$ $(1 \leqslant m \leqslant n-1)$ и займемся оценкой выражения

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x - x_k^{(n)}}\right| = \frac{|\cos n\vartheta|}{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)} - \cos\vartheta} +$$

$$+ \frac{|\cos n\vartheta|}{n}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{\cos\vartheta - \cos\vartheta_k^{(n)}}.$$

Обе суммы, стоящие в правой части, оцениваются одинаковым образом, поэтому для определенности займемся оценкой суммы

$$\frac{|\cos n\vartheta|}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)} - \cos\vartheta} + \frac{|\cos n\vartheta|}{\cos\vartheta_{m-1}^{(n)} - \cos\vartheta} + \frac{|\cos n\vartheta|}{\cos\vartheta_m^{(n)} - \cos\vartheta}.$$

Для этого заметим, что

$$\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)} - \cos\vartheta} \leqslant \frac{1}{\cos\tau - \cos\vartheta}, \quad \vartheta_k^{(n)} \leqslant \tau \leqslant \vartheta_{k+1}^{(n)}.$$

$$(k = 1, 2, \cdots, m-2).$$

Отсюда, интегрируя обе части и суммируя, находим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)} - \cos\vartheta} \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-2}\int_{\vartheta_k^{(n)}}^{\vartheta_{k+1}^{(n)}}\frac{d\tau}{\cos\tau - \cos\vartheta} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\vartheta_1^{(n)}}^{\vartheta_{m-1}^{(n)}} \frac{d\tau}{\cos\tau - \cos\vartheta} < \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\vartheta_{m-1}^{(n)}} \frac{d\tau}{\cos\tau - \cos\vartheta}. \tag{6}$$

Но

$$\int\limits_{0}^{\vartheta_{m-1}^{(n)}} \frac{d\tau}{\cos\tau - \cos\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta} \ln \frac{\sin\frac{\vartheta+\tau}{2}}{\sin\frac{\vartheta-\tau}{2}} \Bigg|_0^{\vartheta_{m-1}^{(n)}} = \frac{1}{\sin\vartheta} \ln \frac{\sin\frac{\vartheta+\vartheta_{m-1}^{(n)}}{2}}{\sin\frac{\vartheta-\vartheta_{m-1}^{(n)}}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\vartheta} \ln \frac{1}{\sin\frac{\vartheta-\vartheta_{m-1}^{(n)}}{2}}. \tag{7}$$

Учитывая, что $\sin\frac{\vartheta-\vartheta_{m-1}^{(n)}}{2} > \sin\frac{\vartheta_m^{(n)}-\vartheta_{m-1}^{(n)}}{2} = \sin\frac{\pi}{2n}$ и $\sin\tau > \frac{2}{\pi}\tau$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\pi}{2}$, на основании (5), (6) и (7) получим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_k^{(n)}}\right| \leqslant \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{|T_n(x)|}{\pi\sqrt{1-x^2}} \ln n.$$

Аналогичная оценка имеет место и для второй суммы. Лемма доказана.

Пусть $P_n(t)$ — многочлен степени n, осуществляющий наилучшее приближение функции $f \in KH_m^{(\alpha)}$ в равномерной метрике

$$\max_{t\in[-1,\,+1]} |f(t) - P_n(t)| \leqslant \frac{C}{n^{m+\alpha}}, \quad C = \mathrm{const}.$$

Обозначим далее

$$M_\eta(f;\,\beta) = \sup_{x',\,x''\in[-\eta,\,\eta]} \frac{|f(x') - f(x'')|}{|x'-x''|^\beta},$$

где β — произвольное положительное число, меньшее α, а $[-\eta,\,\eta]$ $(0<\eta<1)$ — некоторый отрезок, содержащийся в $(-1,\,+1)$.

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$M_\eta(f-P_n;\,\beta) \leqslant \frac{C_1}{n^{m+\alpha-\beta}}, \tag{8}$$

где C_1 — константа, зависящая от C, α, m, η.

Доказательство*. Положим

$$\Delta_{xh}(f-P_n) = |f(x+h) - P_n(x+h) - [f(x) - P_n(x)]|$$

при любых $x,\ x+h \in [-\eta,\,\eta]$. Без ограничения общности можно считать, что $0<h\leqslant 2\eta$.

---

* Приведенное здесь доказательство в определенной степени аналогично указанному в [2].

Предположим сначала, что $h > \frac{\eta}{n}$. В этом случае

$$\Delta_{xh} \leqslant 2 \max_t |f(t) - P_n(t)| \leqslant \frac{2C}{n^{m+\alpha}} = \frac{2Cn^{-\beta}}{n^{m+\alpha-\beta}} < \frac{2C\,\eta^{-\beta}\,h^\beta}{n^{m+\alpha-\beta}}. \tag{9}$$

Пусть теперь $h \leqslant \frac{\eta}{n}$. Как известно [3]

$$f(x) - P_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x), \quad V_k(x) = P_{2^k n}(x) - P_{2^{k-1} n}(x).$$

Далее обозначим $N_k = \max\limits_{x \in [-1, +1]} |V_k(x)|$. Тогда на основании тождества

$$V_k(x) = [P_{2^k n}(x) - f(x)] - [P_{2^{k-1} n}(x) - f(x)]$$

можно написать

$$N_k \leqslant \frac{C}{(2^k n)^{m+\alpha}} + \frac{C}{(2^{k-1} n)^{m+\alpha}} = \frac{(1 + 2^{-m-\alpha})}{(2^{k-1} n)^{m+\alpha}}.$$

К правой части равенства

$$\Delta_{xh} = \left| \sum_{k=1}^{\infty} [V_k(x+h) - V_k(x)] \right|$$

применим теорему Лагранжа о среднем значении. Тогда

$$\Delta_{xh} \leqslant h \sum_{k=1}^{\infty} |V_k'(x + \vartheta_k h)|, \quad 0 < \vartheta_k < 1. \tag{10}$$

Ввиду того, что степень $V_k(x)$ равна $2^k n$, в силу (10) и неравенства С. Н. Бернштейна [4] можно написать

$$\Delta_{xh} \leqslant h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k n N_k}{\sqrt{1-(x+\vartheta_k h)^2}} \leqslant \frac{2C(1+2^{-m-\alpha})\,nh}{\sqrt{1-\eta^2}\; n^{m+\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k-1)(m+\alpha-1)}}.$$

Рассмотрим теперь два случая: $m \geqslant 1$ и $m = 0$. Предположим сначала, что $m \geqslant 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k-1)(m+\alpha-1)}} = \frac{1}{1 - 2^{1-m-\alpha}}$$

и, следовательно

$$\Delta_{xh} \leqslant \frac{2C(1+2^{-m-\alpha})\,nh}{\sqrt{1-\eta^2}\,(1-2^{1-m-\alpha})\,n^{m+\alpha}}. \tag{11}$$

Но, ввиду того, что $nh < (nh)^\beta$, из (11) следует

$$\Delta_{xh} \leqslant \frac{2C(1+2^{-m-\alpha})\,h^\beta}{\sqrt{1-\eta^2}\,(1-2^{1-m-\alpha})\,n^{m+\alpha-\beta}}. \tag{12}$$

Пусть теперь $m=0$. Очевидно, что

$$\Delta_{xh} \leqslant |f(x+h) - f(x)| + |P_n(x+h) - P_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant Kh^{\alpha}+h\max_{x\in[-\eta,\,\eta]}|P_n'(x)|. \tag{13}$$

Для оценки $|P_n'(x)|$ на основании неравенства (4.8) из [3] можно получить неравенство

$$\max_{x\in[-\eta,\,\eta]}|P_n'(x)|\leqslant\frac{C_2}{\sqrt{1-\eta^2}\,n^{\alpha-1}}, \tag{14}$$

где константа C_2 может быть известным образом выражена через C. Учитывая далее, что

$$h^{\alpha}=h^{\beta}h^{\alpha-\beta}\leqslant\frac{\eta^{\alpha-\beta}h^{\beta}}{n^{\alpha-\beta}},\quad\frac{nh}{n^{\alpha}}<\frac{(nh)^{\beta}}{n^{\alpha}}=\frac{h^{\beta}}{n^{\alpha-\beta}},$$

в силу (13) и (14) получим

$$\Delta_{xh}\leqslant\frac{C_3h^{\beta}}{n^{\alpha-\beta}},\quad C_3=\eta^{\alpha-\beta}K+\frac{C_2}{\sqrt{1-\eta^2}}. \tag{15}$$

Объединяя (9), (12) и (15), получим (8), причем можно положить

$$C_1=\max\left\{\frac{2C\eta^{-\alpha}(1+2^{-m-\alpha})}{\sqrt{1-\eta^2}\,(1-2^{1-m-\alpha})},\ K+\frac{C_2}{\sqrt{1-\eta^2}}\right\}.$$

Для дальнейших рассуждений важную роль играет оценка величин

$$\lambda_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|\beta_{k,n}(x)|,\quad\lambda_n^*(x)=\sum_{k=1}^{n}|\beta_{k,n}^*(x)|,$$

где

$$\beta_{k,n}(x)=\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^{(n)2}}\,U_{n-1}(x)-1}{n\,(x-x_k^{(n)})},$$

$$\beta_{k,n}^*(x)=-\frac{\dfrac{(-1)^{k-1}}{n}\sqrt{1-x_k^{(n)2}}\left[H_{n-1}(x)+T_n(x)\ln\dfrac{1-x}{1+x}\right]-A_k^{(n)}}{x-x_k^{(n)}}.$$

Укажем сначала оценку для $\lambda_n(x)$. Легко видеть, что

$$\beta_{\nu,n}(x_\nu^{(n)})=\frac{x_\nu^{(n)}}{n\,(1-x_\nu^{(n)2})}\quad(\nu=1,2,\cdots,n),$$

$$\beta_{\nu,n}(x_i^{(n)})=\frac{(-1)^{\nu+i}\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}-\sqrt{1-x_i^{(n)2}}}{n\,(x_i^{(n)}-x_\nu^{(n)})\sqrt{1-x_i^{(n)2}}}\quad(i=1,2,\cdots,n;\ i\neq\nu).$$

Так что

$$|\beta_{\nu,n}(x_\nu^{(n)})|\leqslant\frac{1}{n\,(1-x_\nu^{(n)2})}=\frac{1}{n\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}\sin\dfrac{2\nu-1}{2n}\pi}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}\sin\dfrac{\pi}{2n}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}}. \tag{16}$$

Для оценки $\beta_{\nu, n}(x_i^{(n)})$ $(i \neq \nu)$ заметим, что

$$\frac{\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}}{n|x_i^{(n)}-x_\nu^{(n)}|} = \frac{\sin \frac{2\nu-1}{2n}\pi}{2n\left|\sin \frac{i-\nu}{2n}\pi\right|\left|\sin \frac{i+\nu-1}{2n}\pi\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sin \frac{2\nu-1}{2n}\pi + \sin \frac{2i-1}{2n}\pi}{2n\left|\sin \frac{i-\nu}{2n}\pi\right|\left|\sin \frac{i+\nu-1}{2n}\pi\right|} = \frac{\sin \frac{i+\nu-1}{2n}\pi \cos \frac{\nu-1}{2n}\pi}{n\left|\sin \frac{i-\nu}{2n}\pi\right|\left|\sin \frac{i+\nu-1}{2n}\pi\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n\left|\sin \frac{i-\nu}{2n}\pi\right|} \leqslant \frac{1}{|i-\nu|} \leqslant 1 \quad (i \neq \nu). \tag{17}$$

Аналогично

$$\frac{\sqrt{1-x_i^{(n)2}}}{n\,(x_\nu^{(n)}-x_i^{(n)})} \leqslant 1 \tag{18}$$

при любом i, отличном от ν. Из (16), (17) и (18) следует неравенство

$$|\beta_{k,n}\,(x_j^{(n)})| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x_j^{(n)2}}}\ (j=1, 2, \cdots, n)],$$

откуда, в силу леммы 1, получаем

$$|\beta_{k,n}(x)| \leqslant \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\left(4+\frac{1}{\pi}\,|T_n(x)|\ln n\right) \quad (-1<x<1). \tag{19}$$

Положив теперь $x=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$, $\vartheta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi$, $\vartheta_m^{(n)} \leqslant \vartheta < \vartheta_{m+1}^{(n)}$ $(1 \leqslant m \leqslant n-1)$, можно написать

$$\lambda_n(x) \leqslant |\sigma_n^{(1)}(x)| + |\sigma_n^{(2)}(x)|,$$

где

$$\sigma_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{(-1)^{k-1}\sin\vartheta_k^{(n)}\sin n\vartheta - \sin\vartheta}{\sin\vartheta\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_k^{(n)})}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\sin n\vartheta|}{n\sin\vartheta}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{\sin\vartheta_k^{(n)}}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta} +$$

$$+\frac{1}{n}\frac{|(-1)^{m-2}\sin\vartheta_{m-1}^{(n)}\sin n\vartheta - \sin\vartheta|}{\sin\vartheta\,(\cos\vartheta_{m-1}^{(n)}-\cos\vartheta)} + \frac{1}{n}\frac{|(-1)^{m-1}\sin\vartheta_m^{(n)}\sin n\vartheta - \sin\vartheta|}{\sin\vartheta\,(\sin\vartheta_m^{(n)}-\cos\vartheta)}, \tag{20}$$

а $\sigma_n^{(2)}(x)$ содержит сумму остальных членов, начиная с $k=m+1$.

Согласно (19) сумма последних двух слагаемых в (20) не превосходит

$$\frac{8}{\sin\vartheta}\left(4+\frac{1}{\pi}\,|\cos n\vartheta|\ln n\right).$$

Кроме того, в силу известного неравенства [4]

$$\frac{|\sin n\vartheta|}{n\sin\vartheta}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{\sin\vartheta_k^{(n)}}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta}\leqslant\frac{2|\sin n\vartheta|}{\pi\sin\vartheta}\ln n.$$

Далее на основании рассуждений, применяемых в доказательстве леммы 1, находим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta}\leqslant\frac{1}{\pi\sin\vartheta}\ln n.$$

Аналогичные неравенства мы получим и при оценке $\sigma_n^{(2)}(x)$. Окончательно будем иметь

$$\lambda_n(x)\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left|32+\frac{1}{\pi}(8|T_n(x)|+2\sqrt{1-x^2}\,|U_n(x)|+1)\ln n\right|$$

$$(-1<x<1).$$

Из полученного следует, что на любом отрезке вида $[-\xi,\xi]$ $(0<\xi<1)$ справедлива равномерная оценка

$$\max_{x\in[-\xi,\xi]}\lambda_n(x)\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(32+\frac{11}{\pi}\ln n\right). \tag{21}$$

Рассмотрим теперь сумму

$$\lambda_n^*(x)=\sum_{k=1}^{n}|\beta_{k,n}^*(x)|.$$

Так как [4]

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_k^{(n)}}\right|\sqrt{1-x_k^{(n)2}}\leqslant 8+\frac{4}{\pi}|T_n(x)|\ln n,$$

то достаточно получить оценку выражения

$$\nu_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|\delta_{k,n}(x)|,$$

где

$$\delta_{k,n}(x)=\frac{\frac{(-1)^{k-1}}{n}\sqrt{1-x_k^{(n)2}}\,H_{n-1}(x)-A_k^{(n)}}{x-x_k^{(n)}}\quad(A_k^{(n)}>0,\ k=1,2,\cdots,n).$$

Очевидно, что $A_k^{(n)}\leqslant\frac{4}{n}(k=1,2,\cdots,n)$. Поэтому, пользуясь применяемыми при доказательстве леммы 1 рассуждениями, получим

$$|H_{n-1}(x)|\leqslant\frac{32}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{8}{\pi}\frac{|T_n(x)|}{\sqrt{1-x^2}}\ln n\quad(-1<x<1).$$

Так что

$$\max_{x\in[-\xi,\xi]}|H_{n-1}(x)|\leqslant\frac{8}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(4+\frac{1}{\pi}\ln n\right).$$

Далее, как легко видеть

$$\delta_{\nu,n}(x_\nu^{(n)}) = \frac{A_\nu^{(n)} x_\nu^{(n)}}{2(1-x_\nu^{(n)2})} + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq\nu}}^{n} \frac{A_p^{(n)}}{x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}},$$

$$\delta_{\nu,n}(x_i^{(n)})_\nu' = \frac{(-1)^{\nu+i}\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}\,A_i^{(n)} - \sqrt{1-x_i^{(n)2}}\,A_\nu^{(n)}}{(x_i^{(n)} - x_\nu^{(n)})\sqrt{1-x_i^{(n)2}}} \quad (i\neq\nu).$$

$\delta_{\nu,n}(x_i^{(n)})$ оценивается точно так же, как и $\beta_{\nu,n}(x_i^{(n)})$. В результате будем иметь

$$|\delta_{\nu,n}(x_i^{(n)})| \leqslant \frac{8}{\sqrt{1-x_i^{(n)2}}} \quad (i\neq\nu). \tag{22}$$

Укажем теперь оценку для $\delta_{\nu,n}(x_\nu^{(n)})$. Рассмотрим для этого суммы

$$\sum_{p=1}^{\nu-1} \frac{A_p^{(n)}}{|x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}|}, \quad \sum_{p=\nu+1}^{n} \frac{A_p^{(n)}}{|x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}|},$$

причем, если $\nu = 1$, то отсутствует первая, а если $\nu = n$, то вторая сумма.

Имеем

$$\sum_{p=1}^{\nu-1} \frac{A_p^{(n)}}{|x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}|} < \frac{4}{n}\sum_{p=1}^{\nu-2} \frac{1}{x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}} + \frac{4}{n|x_\nu^{(n)} - x_{\nu-1}^{(n)}|},$$

причем на основании (6) и (7)

$$\frac{4}{n}\sum_{p=1}^{\nu-2} \frac{1}{|x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}|} \leqslant \frac{1}{\pi \sin\vartheta_\nu^{(n)}} \ln \frac{1}{\sin\dfrac{\vartheta_\nu^{(n)} - \vartheta_{\nu-1}^{(n)}}{2}} =$$

$$= \frac{4}{\pi\sin\vartheta_\nu^{(n)}} \ln\frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2n}} < \frac{4}{\pi\sin\vartheta_\nu^{(n)}}\ln n.$$

Следовательно

$$\sum_{p=1}^{\nu-1} \frac{A_p^{(n)}}{|x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}|} \leqslant \frac{4}{\pi\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}}\ln n + \frac{4}{n|x_\nu^{(n)} - x_{\nu-1}^{(n)}|}.$$

Для оценки последнего слагаемого в правой части полученного неравенства заметим, что

$$\frac{1}{n|x_\nu^{(n)} - x_{\nu-1}^{(n)}|} = \frac{1}{n\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}}\,\frac{\sin\dfrac{2\nu-1}{2n}\pi}{|x_\nu^{(n)} - x_{\nu-1}^{(n)}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}}\,\frac{\sin\dfrac{2\nu-1}{2n}\pi + \sin\dfrac{2\nu-3}{2n}\pi}{2\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{\nu-1}{n}\pi}.$$

Воспользовавшись формулой для суммы синусов и часто применяемым выше неравенством $\sin\frac{\pi}{2n} > \frac{1}{n}$, получаем

$$\frac{1}{n|x_\nu^{(n)}-x_{\nu-1}^{(n)}|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x_\nu^{(n)^2}}}.$$

Таким образом

$$\sum_{p=1}^{\nu-1}\frac{A_p^{(n)}}{|x_\nu^{(n)}-x_p^{(n)}|} \leqslant \frac{4}{\sqrt{1-x_\nu^{(n)^2}}}\left(1+\frac{1}{\pi}\ln n\right).$$

Такая же оценка имеет место и для второй суммы.

Заметив, наконец, что

$$\left|\frac{A_\nu^{(n)}\,x_\nu^{(n)}}{2\,(1-x_\nu^{(n)^2})}\right| \leqslant \frac{2}{n\sqrt{1-x_\nu^{(n)^2}}\,\sin\frac{2\nu-1}{2n}\pi} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x_\nu^{(n)^2}}},$$

получим

$$|\delta_{\nu,\,n}(x_\nu^{(n)})| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x_\nu^{(n)^2}}}\left(5+\frac{4}{\pi}\ln n\right). \tag{23}$$

Используя оценки (22) и (23), в силу леммы 1 будем иметь

$$|\delta_{k,\,n}(x)| \leqslant \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\left[20+\frac{1}{\pi}(16+5|\,T_n(x)|)\ln n+\frac{4}{\pi^2}|T_n(x)|\ln^2 n\right]$$

$$(-1 < x < 1),$$

откуда

$$\max_{x\in[-\xi,\,\xi]}|\delta_{k,\,n}(x)| \leqslant \frac{4}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(20+\frac{21}{\pi}\ln n+\frac{4}{\pi^2}\ln^2 n\right).$$

Поступая точно так же, как это было сделано при получении (21) и используя указанные выше оценки для $H_{n-1}(x)$ и $\delta_{k,\,n}(x)$, можно получить оценку

$$\max_{x\in[-\xi,\,\xi]}\nu_n(x) \leqslant \frac{8}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(40+\frac{59}{\pi}\ln n+\frac{12}{\pi^2}\ln^2 n\right).$$

Следовательно

$$\max_{x\in[-\xi,\,\xi]}\lambda_n^*(x) \leqslant \frac{8}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(40+\frac{59}{\pi}\ln n+\frac{12}{\pi^2}\ln^2 n\right)+$$

$$+\left(8+\frac{4}{\pi}\ln n\right)\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}. \tag{24}$$

Рассмотрим теперь интеграл*

* Здесь учтено, что

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}=0 \quad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

$$S(f-P_{n-1};\ x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{f(t)-P_{n-1}(t)-[f(x)-P_{n-1}(x)]}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}^{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}^{1},$$

где $P_{n-1}(t)$ — указанный в лемме 2 многочлен степени $n-1$.

При любых $x\in[-\xi,\ \xi]$ и $n=2,\ 3,\cdots$ в первом интеграле t не превосходит по абсолютной величине $\dfrac{\xi+1}{2}$. Поэтому можно написать

$$|S(f-P_{n-1};\ x)|\leqslant\frac{1}{\pi}M_{\frac{\xi+1}{2}}(f-P_{n-1};\ \beta)\int\limits_{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}^{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|^{1-\beta}\sqrt{1-t^2}}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\max_t|f(t)-P_{n-1}(t)|\left[\int\limits_{-1}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|\sqrt{1-t^2}}+\int\limits_{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}^{1}\frac{dt}{|t-x|\sqrt{1-t^2}}\right],\qquad(25)$$

где $0<\beta<\alpha$, а $M_{\frac{\xi+1}{2}}(f-P_{n-1};\ \beta)$ — принятое в лемме 2 обозначение.

Оценим интегралы, входящие в (25). Имеем

$$\int\limits_{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}^{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|^{1-\beta}\sqrt{1-t^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2}}\int\limits_{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}^{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|^{1-\beta}}=$$

$$=\frac{2^{1-\beta}(1-\xi)^{\beta}}{\beta\sqrt{1-\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2}\,(n-1)^{\beta}}.$$

Далее, так как $\sin(1+\xi)\dfrac{\pi}{4}>\dfrac{1+\xi}{2}>\left|x-\dfrac{1-\xi}{2n-2}\right|$, то можно написать

$$\int\limits_{-1}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|\sqrt{1-t^2}}=-\int\limits_{-1}^{-\sin(1+\xi)\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}-$$

$$-\int\limits_{-\sin\frac{1+\xi}{4}\pi}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}=-\int\limits_{-1}^{\cos\frac{3+\xi}{4}\pi}-\int\limits_{\cos\frac{3+\xi}{4}\pi}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}.\qquad(26)$$

Заменой $t = \cos\varphi$, $x = \cos\vartheta$ первый интеграл правой части (26) приводится к виду

$$-\int\limits_{\frac{3+\xi}{4}\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi-\cos\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\vartheta+\frac{3+\xi}{4}\pi\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta\right)} \leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta\right)}\quad\left(\frac{3+\xi}{4}\pi>\vartheta\right),$$

причем, ввиду $0<\vartheta<\pi$, ясно, что $\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta<\pi$ и поэтому

$$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta\right)>\frac{1}{\pi}\left(\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta\right).$$

Следовательно

$$-\int\limits_{\frac{3+\xi}{4}\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi-\cos\vartheta}\leqslant\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta}\leqslant\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{\frac{3+\xi}{4}\pi-\arccos(-\xi)}=$$

$$=\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{\arccos\xi-\frac{1-\xi}{4}\pi}<\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}-\frac{1-\xi}{4}\pi}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{1-\xi-\frac{1-\xi}{4}\pi}=\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{(1-\xi)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Что же касается второго интеграла, то он легко оценивается следующим образом:

$$-\int\limits_{\cos\frac{3+\xi}{4}\pi}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\frac{3+\xi}{4}\pi}}\int\limits_{\cos\frac{3+\xi}{4}\pi}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{t-x}=$$

$$=-\frac{1}{\sin\frac{3+\xi}{4}\pi}\left(\ln\frac{1-\xi}{2n-2}-\ln\cos\frac{3+\xi}{4}\pi\right)\leqslant\frac{1}{\sin\frac{3+\xi}{4}\pi}\ln\frac{2n-2}{1-\xi}=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{1-\xi}{4}\pi}\ln\frac{2n-2}{1-\xi}.$$

На основании полученных неравенств и (26) можно написать

$$\int\limits_{-1}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|\sqrt{1-t^2}}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1-\xi}{4}\pi}\left(\ln\frac{2\pi}{(1-\xi)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}+\ln n\right).$$

Точно таким же образом можно получить оценку

$$\int\limits_{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}^{1} \frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1-\xi}{4}\pi}\left(\ln\frac{2\pi}{(1-\xi)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}+\ln n\right).$$

Объединяя указанные оценки и используя лемму 2, получим, что при $n=2, 3, \cdots$

$$\max_{x\in[-\xi,\xi]}|S(f-P_{n-1}; x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\left[\frac{2^{1-\beta}C_1(1-\xi)^\beta}{\beta\sqrt{1-\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{4C}{\sin\frac{1-\xi}{4}\pi}\left(\ln\frac{2\pi}{(1-\xi)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}+\ln n\right)\right]\frac{1}{(n-1)^{m+\alpha}}. \tag{27}$$

Аналогичным образом для $S^*(f-P_{n-1}; x)$ получим

$$\max_{x\in[-\xi,\xi]}|S^*(f-P_{n-1}; x)| \leqslant \left[\frac{2^{1-\beta}C_1(1-\xi)^\beta}{\beta}+C\left(4\ln\frac{2}{1-\xi}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}+4\ln n\right)\right]\frac{1}{(n-1)^{m+\alpha}}. \tag{28}$$

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что остаточные члены формул (3) и (4) в указанных выше обозначениях могут быть представлены соответственно в виде

$$R_n(f; x) = S(f-P_{n-1}; x)-\sum_{k=1}^{n}\beta_{k,n}(x)[f(x_k^{(n)})-P_{n-1}(x_k^{(n)})],$$

$$R_n^*(f; x) = S^*(f-P_{n-1}; x)-\sum_{k=1}^{n}\beta_{k,n}^*(x)[f(x_k^{(n)})-P_{n-1}(x_k^{(n)})].$$

Отсюда на основании оценок (21), (24), (27), (28) следует теорема, причем

$$A_1=\frac{64C}{\sqrt{1-\xi^2}}+\frac{4C}{\pi\sin\frac{1-\xi}{4}\pi}\ln\frac{2\pi}{(1-\xi)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{2^{1-\beta}C_1(1-\xi)^\beta}{\beta\pi\sqrt{1-\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2}},$$

$$A_2=\frac{22C}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}+\frac{4C}{\pi\sin\frac{1-\xi}{4}\pi},$$

$$A_1^*=4C\ln\frac{2}{1-\xi}+\frac{320\,C}{\sqrt{1-\xi^2}}+9C\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}+\frac{2^{1-\beta}C_1(1-\xi)^\beta}{\beta},$$

$$A_2^*=4C+\frac{4C}{\pi}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}+\frac{472\,C}{\pi\sqrt{1-\xi^2}},\quad A_\xi^*=\frac{96\,C}{\pi^2\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Таким образом, доказанная теорема дает как оценку порядка приближения, так и оценки констант*, входящих в порядок. Тем самым она доставляет возможность найти фактическую оценку ошибки приближения заданными квадратурными формулами при любом фиксированном числе узлов.

Вычислительный центр
АН Грузинской ССР

Поступило 17.VII.1969

Ջ. Գ. ՍԱՆԻԿԻՁԵ. Որոշ սինգուլյար օպերատորների քառակուսացման գումարներով մոտարկելու կարգի մասին *(ամփոփում)*

Քառակուսացման (3) և (4) բանաձևերի համար նշվում են մոտարկման գնահատականներ, երբ ֆունկցիան [-1, 1]-ի վրա ունի m *կարգի ածանցյալ* (m > 0), *որը նշված հատվածի վրա բավարարում է Հելդերի պայմանին։*

D. G. SANIKIDSE. *On the order of approximation of some singular operators by quadrature sums* (summary)

Estimates of approximation for the quadrature formulae (3) and (4) are obtained. The function f is assumed to posess derivative or order m ($m > 0$) on the segment $[-1, +1]$ satisfying Helder condition on the mentioned segment.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Г. Саникидзе.* О сходимости квадратурного процесса для некоторых сингулярных интегралов, Журн. вычисл. матем. и матем., физики, № 1, 1970.
2. *А. И. Каландия.* Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости, Матем. сб., 42 (84), № 2, 1957.
3. *С. Б. Стечкин.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, № 3, 1951.
4. *И. П. Натансон.* Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949, 169—540.

---

* Напомним, что константа C известным образом выражается через постоянную Гельдера K.