Г. А. ЛУНЦ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С РОСТОМ ЦЕЛЫХ
 ФУНКЦИЙ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Для того чтобы целая функция $f(z)$ целого порядка ρ была функцией вполне регулярного роста по отношению к уточненному порядку $\rho(r)$, необходимо и достаточно, как показал Б. Я. Левин [1], чтобы множество ее нулей $\{\lambda_n\}$ было правильно распределенным, то есть чтобы 1) существовала угловая плотность последовательности $\{\lambda_n\}$ при показателе $\rho(r)$, 2) существовал предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{L(r)} \left(c + \sum_{|\lambda_n| < r} \lambda_n^{-\rho} \right), \quad (1)$$

где $L(r) = r^{\rho(r)-\rho}$, а c — некоторая постоянная. Известно также [1], что если $F(\varphi)$ — функция распределения угловой плотности и множество $\{\lambda_n\}$ правильно распределено, то

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\varphi} dF(\varphi) = 0. \quad (2)$$

Б. Я. Левин высказал недавно предположение, что если существует угловая плотность последовательности $\{\lambda_n\}$ и выполнено условие (2), то можно так дополнить последовательность $\{\lambda_n\}$ последовательностью с нулевой плотностью, что пополненная последовательность окажется правильно распределенной. В настоящей статье это предположение будет доказано (в несколько усиленной формулировке).

1°. Пусть сначала $\rho(r) = \rho$. В этом случае существование предела (1) равносильно существованию предела

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_n| < r} \lambda_n^{-\rho}. \quad (3)$$

Последовательность $\{\lambda_n\}$ будем всегда предполагать занумерованной в порядке неубывания модулей ее членов. Существование угловой плотности последовательности $\{\lambda_n\}$ означает, что для любых ψ_1, ψ_2 , не принадлежащих некоторому исключительному счетному множеству

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} = F(\psi_2) - F(\psi_1) = \Delta(\psi_1, \psi_2),$$

где $\{\lambda_{n_k}\}$ — та подпоследовательность $\{\lambda_n\}$, для членов которой $\arg \lambda_{n_k} \in [\psi_1, \psi_2]$. Здесь $F(\psi)$ — некоторая неубывающая функция (функция распределения угловой плотности).

Выберем разбиение интервала $[0, 2\pi]$ точками $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_q$ ($\theta_0 = 0$, $\theta_q = 2\pi$). Как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, если значения $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_q$ — не исключительные, то существует такое $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что при $k > k_0$

$$\frac{\Delta_j - \varepsilon}{k} < |\lambda_{n_{jk}}|^{-p} < \frac{\Delta_j + \varepsilon}{k}, \quad (4)$$

где $\Delta_j = \Delta(\theta_{j-1}, \theta_j)$, а $\{\lambda_{n_{jk}}\}$ — та подпоследовательность из $\{\lambda_n\}$, для точек которой $\arg \lambda_{n_{jk}} \in [\theta_{j-1}, \theta_j)$, и

$$\frac{D - \varepsilon}{k} < |\lambda_k|^{-p} < \frac{D + \varepsilon}{k}, \quad (5)$$

где $D = \sum_{j=1}^q \Delta_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^p}$ — плотность последовательности $\{|\lambda_n|\}$. Будем считать, что $D \neq 0$, так как при $D = 0$ доказываемое утверждение тривиально: достаточно дополнить последовательность $\{\lambda_n\}$ последовательностью $\{e^{\frac{\pi i}{p}} \lambda_n\}$.

Пусть теперь m_{j1}, n_1 ($i = 1, 2$) — число членов последовательности $\{\lambda_{n_{jk}}\}$, соответственно $\{\lambda_n\}$, попавших в круг $|z| \leq R_i$ ($R_2 > R_1$).

Из (4), (5) и того факта, что $\sum_{n=p_1}^{p_2} \frac{1}{n} - \ln \frac{p_2}{p_1} = o(1)$ при $p_1 \rightarrow \infty$ и $p_2 > p_1$, следует, что при любом $\varepsilon > 0$ и $R_1 > R(\varepsilon)$

$$(\Delta_j - \varepsilon) \ln \frac{m_{j1}}{m_{j1}} < \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-p} \leq (\Delta_j + \varepsilon) \ln \frac{m_{j2}}{m_{j1}}, \quad (6)$$

$$(D - \varepsilon) \ln \frac{n_2}{n_1} \leq \sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-p} \leq (D + \varepsilon) \ln \frac{n_2}{n_1}. \quad (7)$$

С другой стороны

$$\frac{\Delta_j - \varepsilon}{\Delta + \varepsilon} < \frac{m_{j1}}{n_1} < \frac{\Delta_j + \varepsilon}{D - \varepsilon} \quad (i = 1, 2),$$

и если $\Delta_j \neq 0$, то $(1 - \varepsilon_1) \frac{n_2}{n_1} < \frac{m_{j2}}{m_{j1}} < (1 + \varepsilon_1) \frac{n_2}{n_1}$. Для любого $\varepsilon_1 > 0$

при достаточно большом R_1 . Поэтому при $\Delta_j \neq 0$, если $\frac{R_2}{R_1} > \beta > 1$

(следовательно и $\frac{n_2}{n_1} \geq \beta' > 1$, если R_1 достаточно велико) с помощью (6) и (7) получим

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-p}}{\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-p}} = \frac{\Delta_j}{D}, \quad (8)$$

то есть

$$\frac{\sum_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} |\lambda_{n_j}|^{-\rho}}{\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho}} = \frac{\Delta_j}{D} + o(1). \quad (8')$$

Это равенство справедливо и при $\Delta_j = 0$. Действительно, пусть $\Delta_j = 0$. Дополним последовательность $\{\lambda_n\}$ какой-либо последовательностью с плотностью $\eta > 0$ и расположенной в угле $\theta_{j-1} \leq \arg z < \theta_j$. Тогда для пополненной последовательности будет иметь место равенство вида (8),

причем его правая часть будет равна $\frac{\eta}{D + \eta}$. В то же время величина, стоящая под знаком предела в левой части (8) при таком пополнении последовательности $\{\lambda_n\}$ может только увеличиться (к числителю и к знаменателю прибавляется одно и то же положительное число, причем числитель меньше знаменателя). Ввиду произвольности η отсюда следует, что для данной последовательности правая часть (8) равна нулю.

Пусть $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}$ ($0 \leq \varphi_n < 2\pi$), тогда $\lambda_{n_{jk}}^{-\rho} = |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho} e^{-i\rho\varphi_{n_{jk}}}$ и при $\tilde{\varphi}_j \in [\theta_{j-1}, \theta_j)$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho} e^{-i\rho\tilde{\varphi}_j} - \sum_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} \lambda_{n_{jk}}^{-\rho} \right| &= \left| \sum_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho} (e^{-i\rho\tilde{\varphi}_j} - e^{-i\rho\varphi_{n_{jk}}}) \right| \leq \\ &\leq A\delta \sum_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho}, \end{aligned} \quad (9)$$

где δ — диаметр разбиения интервала $[0, 2\pi]$, а A — постоянная, зависящая только от ρ . Умножая обе части равенства (8') на $e^{-i\rho\tilde{\varphi}_j}$, суммируя по всем j ($j = 1, \dots, q$) и пользуясь (9), получим при больших n_2

$$\left| \frac{\sum_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho}}{\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho}} - \sum_{j=1}^q \frac{\Delta_j}{D} e^{-i\rho\tilde{\varphi}_j} \right| < A_1\delta + o(1)$$

(A_1 — постоянная, не зависящая от δ). Но так как δ произвольно, то это означает, что

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho}}{\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho}} = \frac{1}{D} \int_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi} dF(\varphi) \quad (10)$$

и, в силу условия (2),

$$\left| \sum_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho} \right| = o\left(\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho} \right). \quad (11)$$

Полезно заметить, что из равенства (10), справедливого при $\frac{n_2}{n_1} > \beta > 1$, следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-\rho}}{\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^{-\rho}} = \frac{1}{D} \int_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi} dF(\varphi). \quad (12)$$

Действительно, выбрав любое $\varepsilon > 0$ и некоторое $\beta > 1$, подберем такое N , что

$$\left| \frac{\sum_{k=N}^n \lambda_k^{-\rho}}{\sum_{k=N}^n |\lambda_k|^{-\rho}} - A \right| < \varepsilon$$

при $n \geq N\beta$, где $A = \frac{1}{D} \int_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi} dF(\varphi)$.

Тогда при $n > N\beta$

$$\frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-\rho}}{\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^{-\rho}} = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k^{-\rho} + \sum_{k=N}^n \lambda_k^{-\rho}}{\sum_{k=1}^{N-1} |\lambda_k|^{-\rho} + \sum_{k=N}^n |\lambda_k|^{-\rho}} = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k^{-\rho} + [A + \alpha(n)] \sum_{k=N}^n |\lambda_k|^{-\rho}}{\sum_{k=1}^{N-1} |\lambda_k|^{-\rho} + \sum_{k=N}^n |\lambda_k|^{-\rho}} \sim A + \alpha(n)$$

при $n \rightarrow \infty$, где $|\alpha(n)| < \varepsilon$, если $n > N\beta$. Но это и означает, что равенство (12) справедливо.

Переходим к построению дополнительной последовательности.

Выбираем любые целые $h > 1$, $\alpha > 2$ и строим вектор $\lambda_1^{-\rho} + \lambda_2^{-\rho} + \dots + \lambda_h^{-\rho} = \Lambda_0 e^{i\psi_0}$, после чего дополняем последовательность $\{\lambda_n\}$ числами $\mu_1, \dots, \mu_{p_0}$, выбранными так, что

$$|\mu_1| = \dots = |\mu_{p_0}| = |\lambda_h|, \quad \arg \mu_1 = \dots = \arg \mu_{p_0} = -\frac{\psi_0 + \pi}{\rho},$$

$$p_0 |\lambda_h|^{-\rho} \leq \Lambda_0 < (p_0 + 1) |\lambda_h|^{-\rho}.$$

Очевидно, что если $\Lambda_0 e^{i\psi_0} + \mu_1^{-\rho} + \dots + \mu_{p_0}^{-\rho} = \eta_0 e^{i\psi_0}$, то $\eta_0 < |\lambda_h|^{-\rho}$ (возможно, что $p_0 = 0$, это соответствует случаю, когда $\Lambda_0 < |\lambda_h|^{-\rho}$). Теперь строим вектор $\eta_0 e^{i\psi_0} + \lambda_{h+1}^{-\rho} + \dots + \lambda_{\alpha h}^{-\rho} = \Lambda_1 e^{i\psi_1}$ и дополняем последовательность $\{\lambda_n\}$ числами $\mu_{p_0+1}, \dots, \mu_p$, такими, что $|\mu_{p_0+1}| = \dots = |\mu_p| = |\lambda_{\alpha h}|$,

$$\arg \mu_{p_0+1} = \dots = \arg \mu_p = -\frac{\psi_1 + \pi}{\rho}, \quad (p_1 - p_0) |\lambda_{\alpha h}|^{-\rho} \leq \Lambda_1 < (p_1 - p_0 + 1) |\lambda_{\alpha h}|^{-\rho}.$$

Очевидно, что если $\sum_{n=1}^{\alpha h} \lambda_n^{-p} + \sum_{n=1}^{p_1} \mu_n^{-p} = \eta_1 e^{i\psi_1}$, то $\eta_1 < |\lambda_{\alpha h}|^{-p}$. Вообще,

после того, как построен вектор $\sum_{n=1}^{\alpha^m h} \lambda_n^{-p} + \sum_{n=1}^{p_{m-1}} \mu_n^{-p} = \Lambda_m e^{i\psi_m}$, добавляем к последовательности $\{\lambda_n\}$ члены $\mu_{p_{m-1}+1}, \dots, \mu_{p_m}$ такие, что

$$|\mu_{p_{m-1}+1}| = \dots = |\mu_{p_m}| = |\lambda_{\alpha^m h}|, \quad \arg \mu_{p_{m-1}+1} = \dots = \arg \mu_{p_m} = -\frac{\psi_m + \pi}{p},$$

$$(p_m - p_{m-1}) |\lambda_{\alpha^m h}| \leq \Lambda_m < (p_m - p_{m-1} + 1) |\lambda_{\alpha^m h}|,$$

после чего

$$\sum_{n=1}^{\alpha^m h} \lambda_n^{-p} + \sum_{n=1}^{p_m} \mu_n^{-p} = \eta_m e^{i\psi_m}, \quad \eta_m < |\lambda_{\alpha^m h}|^{-p}. \quad (13)$$

Докажем, что если $\{v_n\} = \{\lambda_n\} \cup \{\mu_n\}$ (последовательность $\{v_n\}$ занумерована в порядке неубывания модулей ее членов), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-p}$ сходится и сумма его равна нулю.

Из построения очевидно, что стремятся к нулю частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-p}$ с номерами $n_m = \alpha^m h + p_m$. Предположим, что существует такое $\gamma > 0$ и такая бесконечная последовательность индексов $\{q_l\}$, что

$$\left| \sum_{n=1}^{q_l} v_n^{-p} \right| > \gamma. \quad (14)$$

Достаточно рассмотреть такие q_l , для которых

$$n_{m_l} = \alpha^{m_l} h + p_{m_l} < q_l \leq \alpha^{m_l+1} h + p_{m_l} = \tilde{q}_l,$$

так как, по построению, при $\alpha^{m_l+1} h + p_{m_l} < r \leq \alpha^{m_l+1} h + p_{m_l+1}$ всегда

$$\left| \sum_{n=1}^r v_n^{-p} \right| < \left| \sum_{n=1}^{\tilde{q}_l} v_n^{-p} \right|. \text{ Из (13) и (14) следует, что для любого } \varepsilon, 0 < \varepsilon < \gamma,$$

при $l > l(\varepsilon)$

$$\left| \sum_{n=n_{m_l}+1}^{q_l} v_n^{-p} \right| = \left| \sum_{n=\alpha^{m_l} h+1}^{q_l} \lambda_n^{-p} \right| > \gamma - \varepsilon > 0, \quad (15)$$

где $\alpha^{m_l} h < q_l \leq \alpha^{m_l+1} h$ и, тем более, $\sum_{n=\alpha^{m_l} h+1}^{q_l} |\lambda_n|^{-p} > \gamma - \varepsilon$. Так как

$|\lambda_n|^{-p} \sim \frac{D}{n}$ при большом n , то последнее неравенство означает, что

$\ln q_l - \ln(\alpha^{m_l} h) > \frac{\gamma}{D} - \varepsilon_1$ при любом $\varepsilon_1 > 0$ и достаточно большом l ,

то есть $\frac{q_l}{\alpha^{m_l} h} > e^{\frac{\gamma}{D} - \varepsilon_1} > 1$. А так как

$$\sum_{n=\alpha^{m_l} h+1}^{\alpha^{m_l+1} h} |\lambda_n|^{-\rho} \sim D \ln \alpha = O(1),$$

то из (11) следует, что $\left| \sum_{n=\alpha^{m_l} h+1}^{\alpha^{m_l+1} h} \lambda_n^{-\rho} \right| = o(1)$, а это противоречит (15).

Итак, доказано, что $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^{-\rho} = 0$.

Докажем, наконец, что плотность последовательности $\{\mu_n\}$ равна нулю. Очевидно, что

$$\frac{(\alpha^m - \alpha^{m-1}) h}{|\lambda_{\alpha^m h}|^\rho} \leq \sum_{n=\alpha^{m-1} h+1}^{\alpha^m h} |\lambda_n|^{-\rho} \leq \frac{(\alpha^m - \alpha^{m-1}) h}{|\lambda_{\alpha^{m-1} h}|^\rho},$$

а так как $\left| \frac{\lambda_{\alpha^m h}}{\lambda_{\alpha^{m-1} h}} \right| \sim \alpha$, то отношение $\frac{\alpha^m - \alpha^{m-1}}{|\lambda_{\alpha^m h}|^\rho} : \sum_{n=\alpha^{m-1} h+1}^{\alpha^m h} |\lambda_n|^{-\rho}$ огра-

ничено снизу и сверху положительными константами, не зависящими от m . По построению и из (11) следует, что

$$\frac{p_m - p_{m-1}}{|\mu_{p_m}|^\rho} = o\left(\sum_{n=\alpha^{m-1} h+1}^{\alpha^m h} |\lambda_n|^{-\rho}\right) = o\left(\frac{\alpha^m - \alpha^{m-1}}{|\lambda_{\alpha^m h}|^\rho}\right),$$

но $|\lambda_{\alpha^m h}| = |\mu_{p_m}|$ и, таким образом, $p_m - p_{m-1} = o(\alpha^m - \alpha^{m-1})$. Взяв любое $\varepsilon > 0$, выберем такое $M = M(\varepsilon)$, что $p_m - p_{m-1} < \varepsilon(\alpha^m - \alpha^{m-1})$ при $m > M$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{p_m}{\alpha^m} &= \frac{p_0 + (p_1 - p_0) + \dots + (p_M - p_{M-1}) + (p_{M+1} - p_M) + \dots + (p_m - p_{m-1})}{1 + (\alpha - 1) + \dots + (\alpha^M - \alpha^{M-1}) + (\alpha^{M+1} - \alpha^M) + \dots + (\alpha^m - \alpha^{m-1})} < \\ &< \frac{C_M + \varepsilon(\alpha^m - \alpha^M)}{C'_M + (\alpha^m - \alpha^M)} \rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$ (C_M и C'_M не зависят от m). Ввиду произвольности ε это значит,

что $p_m = o(\alpha^m)$, а так как $|\lambda_{\alpha^m h}|^\rho \sim \frac{\alpha^m h}{D}$, то $p_m = o(|\lambda_{\alpha^m h}|^\rho) = o(|\mu_{p_m}|^\rho)$.

Таким образом, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_m + 1}{|\mu_{p_m+1}|^\rho} = 0$, а так как $\mu_{p_m+1} = \dots = \mu_{p_{m+1}}$, то

это и означает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\mu_k|^\rho} = 0$, то есть что плотность последо-

вательности $\{\mu_n\}$ равна нулю. Итак, в случае когда $\rho(r) > \rho$, утверждение полностью доказано.

Замечание. Построенная нами последовательность $\{\mu_n\}$ состоит из групп одинаковых членов. Однако легко так изменить по-

строение, чтобы все члены последовательности $\{\mu_n\}$ были различны. Поступим следующим образом. Если те два члена последовательности $\{\lambda_n\}$, между которыми вставлена группа членов последовательности $\{\mu_n\}$ не одинаковы по модулю: $|\lambda_{\alpha m_h}| < |\lambda_{\alpha m_{h+1}}|$, то полагаем $|\lambda_{\alpha m_n}| < |\lambda_{\alpha p_{m-1}+1}| < \dots < |\lambda_{\alpha p_m}| < |\lambda_{\alpha m_{h+1}}|$. Если же $|\lambda_{\alpha m_h}| = |\lambda_{\alpha m_{h+1}}| = \dots = |\lambda_{\alpha m_{h+r-1}}| < |\lambda_{\alpha m_{h+r}}|$, то соответствующую группу членов последовательности $\{\mu_n\}$ вставляем между $\lambda_{\alpha m_{h+r-1}}$ и $\lambda_{\alpha m_{h+r}}$. При таком построении все члены последовательности $\{\mu_n\}$ различны и не совпадают также с членами последовательности $\{\lambda_n\}$. Для обоснования такого построения не требуется никаких существенных изменений в рассуждениях, так как число членов последовательности $\{\lambda_n\}$ на одной и той же окружности большим быть не может: если n — номер первого члена последовательности $\{\lambda_n\}$, попавшего на окружность $|z| = R$, то число членов этой последовательности с модулем R есть $o(n)$. Противоположное допущение противоречило бы существованию угловой плотности последовательности $\{\lambda_n\}$ (и даже плотности последовательности $\{|\lambda_n|\}$).

2°. Пусть теперь $\rho(r)$ — уточненный порядок: $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho$, $\rho'(r) = o\left(\frac{1}{r \ln r}\right)$ и $F(\psi)$ — функция распределения угловой плотности последовательности $\{\lambda_n\}$ при показателе $\rho(r)$, то есть для всех ψ_1, ψ_2 , не принадлежащих некоторому исключительному счетному множеству,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_{n_k}|^{\rho} (|\lambda_{n_k}|)} = F(\psi_2) - F(\psi_1) = \Delta(\psi_1, \psi_2),$$

где $\{\lambda_{n_k}\}$ — та подпоследовательность из $\{\lambda_n\}$, для членов которой $\arg \lambda_{n_k} \in [\psi_1, \psi_2)$. Плотность $D = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_{n_k}|^{\rho} (|\lambda_{n_k}|)}$ последовательности $\{|\lambda_n|\}$ будем считать отличной от нуля (при $D = 0$ доказываемое утверждение тривиально — достаточно дополнить последовательность $\{e^{\frac{\pi i}{2}} \lambda_n\}$). Пусть по-прежнему интервал $[0, 2\pi]$ разбит точками $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_q$ ($\theta_0 = 0, \theta_q = 2\pi$) и $\{\lambda_{n_{jk}}\}$ — та подпоследовательность из $\{\lambda_n\}$, для членов которой $\arg \lambda_{n_{jk}} \in [\theta_{j-1}, \theta_j)$. Повторяя выкладки и рассуждения из п. 1° (с заменой $|\lambda_n|^{-\rho}$ на $|\lambda_n|^{-\rho} (|\lambda_n|)$ и $|\lambda_{n_{jn}}|^{-\rho}$ на $|\lambda_{n_{jn}}|^{-\rho} (|\lambda_{n_{jn}}|)$), мы придем, при условии, что $\frac{n_2}{n_1} > \beta > 1$, к равенству

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho} (|\lambda_{n_{jk}}|)}{\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho} (|\lambda_k|)} = \frac{\Delta_j}{D}. \quad (16)$$

Здесь $\Delta_j = \Delta(\theta_{j-1}, \theta_j)$, а m_{j1} , n_i ($i=1, 2$) имеют тот же смысл, что и в п. 1°. Пусть $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}$, $\lambda_n^{(\lambda_n)} = |\lambda_n|^{(\lambda_n)} e^{i\varphi_n^{(\lambda_n)}}$ ($0 \leq \varphi_n < 2\pi$). Вы-

берем внутри каждого интервала (θ_{j-1}, θ_j) ($j=1, \dots, q$) точку $\tilde{\varphi}_j$ и к диаметру δ разбиения интервала $[0, 2\pi]$ и произвольному $\varepsilon > 0$ подберем такое $N(\delta, \varepsilon)$, что при $n_1 < N$ и $k > m_{j1}$ для всех j ($j=1, \dots, q$)

$$|(\tilde{\varphi}_j - \varphi_{n_{j1}}) \rho(|\lambda_{n_{j1}}|) - \rho(|\lambda_{n_{j1}}|) - \rho| < \varepsilon \quad (17)$$

(при некоторых j подпоследовательность из $\{\lambda_{n_{j1}}\}$, для членов которой $k > m_{j1}$ может оказаться пустой). Тогда при $k > m_{j1}$

$$|\exp[-i\rho(|\lambda_{n_{j1}}|) \tilde{\varphi}_j] - \exp[-i\rho(|\lambda_{n_{j1}}|) \varphi_{n_{j1}}]| < A\delta,$$

где A — постоянная, не зависящая от δ и

$$\left| \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} [|\lambda_{n_{j1}}|^{-\rho(|\lambda_{j1})} e^{-i\rho(|\lambda_{n_{j1}}|) \tilde{\varphi}_j} - \lambda_{n_{j1}}^{-\rho(|\lambda_{n_{j1}}|)}] \right| < A\delta \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{j1}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{j1}}|)}. \quad (18)$$

Произведя в левой и правой частях (18) суммирование от $j=1$ до $j=q$, будем иметь при $n_1 > N$

$$\left| \sum_{j=1}^q \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{j1}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{j1}}|)} e^{-i\rho(|\lambda_{n_{j1}}|) \tilde{\varphi}_j} - \sum_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho(|\lambda_k|)} \right| < A\delta \sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}. \quad (19)$$

С другой стороны, с учетом (17) при $n_1 > N$ получим

$$\left| \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{j1}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{j1}}|)} (e^{-i\rho(|\lambda_{n_{j1}}|) \tilde{\varphi}_j} - e^{-i\rho \tilde{\varphi}_j}) \right| < \bar{A}_\varepsilon \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{j1}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{j1}}|)}, \quad (20)$$

где $\bar{A}$ не зависит от ε и j . Суммируя обе части (20) от $j=1$ до $j=q$, будем иметь

$$\left| \sum_{j=1}^q \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{j1}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{j1}}|)} e^{-i\rho(|\lambda_{n_{j1}}|) \tilde{\varphi}_j} - \sum_{j=1}^q \sum_{k=n_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{j1}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{j1}}|)} e^{-i\rho \tilde{\varphi}_j} \right| < \bar{A} \varepsilon \sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}. \quad (21)$$

Деля обе части неравенств (19) и (21) на $\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}$ и сравнивая между собой полученные неравенства, будем иметь

$$\left| \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{j1}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{j1}}|)} e^{-i\rho \tilde{\varphi}_j}}{\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}} - \frac{\sum_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho(|\lambda_k|)}}{\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}} \right| < A\delta + \bar{A}\varepsilon.$$

Теперь из равенства (16) следует, что при заданном разбиении

$$\left| \sum_{j=1}^q \frac{\Delta_j}{D} e^{-i\rho \varphi_j} - \frac{\sum_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho} (|\lambda_k|)}{\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho} (|\lambda_k|)} \right| < A\delta + \bar{A}\varepsilon + o(1).$$

Так как ε произвольно, то это означает, что если $\frac{n_2}{n_1} > \beta > 1$, то

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho} (|\lambda_k|)}{\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho} (|\lambda_k|)} = \frac{1}{D} \int_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi} dF(\varphi).$$

Отсюда следует, что если выполнено условие (2), то

$$\left| \sum_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho} (|\lambda_k|) \right| = o\left(\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho} (|\lambda_k|) \right). \quad (22)$$

Заметим, что равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-\rho} (|\lambda_k|)}{\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^{-\rho} (|\lambda_k|)} = \frac{1}{D} \int_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi} dF(\varphi),$$

аналогичное равенству (12), также, как нетрудно показать, имеет место.

Последовательность $\{\mu_n\}$ выберем в точности так, как в п. 1°, пользуясь, как и в п. 1, точным порядком ρ , а не уточненным $\rho(r)$. Положим, далее, как и в п. 1, $\{\nu_n\} = \{\lambda_n\} \cup \{\mu_n\}$ и покажем, что последовательность $\{M_n\} = \left\{ \frac{1}{L(|\nu_n|)} \sum_{k=1}^n \nu_k^{-\rho} \right\}$, где $L(r) = r^{\rho(r)-\rho}$ сходится (к нулю).

Если $n = n_m = \alpha^m h + p_m$ ($m = 1, 2, \dots$), то очевидно, что $M_n \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Действительно, по построению $\left| \sum_{k=1}^{n_m} \nu_k^{-\rho} \right| < |\lambda_{\alpha^m h}|^{-\rho}$, $|\nu_{n_m}| = |\lambda_{\alpha^m h}|$ и, следовательно, $|M_{n_m}| < |\lambda_{\alpha^m h}|^{-\rho} (|\lambda_{\alpha^m h}|) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Для того чтобы доказать, что вообще $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$, достаточно рассмотреть лишь такие значения n , для которых

$$\alpha^{m-1} h + p_{m-1} < n \leq \alpha^m h + p_m \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (23)$$

так как по построению

$$L(|\nu_{\alpha^m h + p_m}|) = L(|\nu_{\alpha^m h + p_{m-1} + 1}|) = \dots = L(|\nu_{\alpha^m h + p_m}|) = L(|\lambda_{\alpha^m h}|)$$

и

$$\left| \sum_{p=1}^{\alpha^m h + p_{m-1} + l} \nu_p^{-\rho} \right| < \left| \sum_{p=1}^{\alpha^m h + p_{m-1}} \nu_p^{-\rho} \right|$$

при $0 < l < p_m - p_{m-1}$; следовательно при $\alpha^m h + p_{m-1} < n \leq \alpha^m h + p_m$ имеем $|M_n| < |M_{\alpha^m h + p_{m-1}}|$.

Дальше мы будем пользоваться следующим свойством функции $L(r)$ (см. [1]): если A — конечная постоянная, то на отрезке $1 \leq k \leq A$ равномерно $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(kr)}{L(r)} = 1$ (k может зависеть от r). Допустим, что

существует такое $\gamma > 0$ и такое бесконечное множество значений n из интервалов вида (23), для которых $|M_n| > \gamma$. При $n = \alpha^{m-1} h + p_{m-1}$ имеем

$$M_n = \frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h}|)} \sum_{p=1}^{\alpha^{m-1} h + p_{m-1}} \nu_p^{-\rho} \rightarrow 0,$$

если $m \rightarrow \infty$, как уже было доказано. Пусть $n = n' = \alpha^{m-1} h + p_{m-1} + l$ и

$$M_{n'} = \frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h + l}|)} \sum_{p=1}^{\alpha^{m-1} h + p_{m-1} + l} \nu_p^{-\rho},$$

где $1 \leq l \leq (\alpha^m - \alpha^{m-1})h$. В соответствии с указанным выше свойством функции $L(r)$ имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h + l}|)}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h}|)} = 1$, так как $1 \leq \frac{|\lambda_{\alpha^{m-1} h + l}|}{|\lambda_{\alpha^{m-1} h}|} <$

$< (\alpha + \eta)^{\frac{1}{p}}$ ($\eta \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$) и поэтому

$$\tilde{M}_{n'} = \frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h + l}|)} \sum_{p=1}^{\alpha^{m-1} h + p_{m-1}} \nu_p^{-\rho} = \frac{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h}|)}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h + l}|)} M_{n_{m-1}} \rightarrow 0 \quad (24)$$

при $m \rightarrow \infty$. Имеем далее

$$\begin{aligned} R = M_{n'} - \tilde{M}_{n'} &= \frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h + l}|)} \sum_{p=\alpha^{m-1} h}^{\alpha^{m-1} h + l} \lambda_p^{-\rho} = \\ &= \frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h + l}|)} \sum_{p=\alpha^{m-1} h}^{\alpha^{m-1} h + l} |\lambda_p|^{-\rho} e^{-l \rho \varphi_p}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для всех p , $\alpha^{m-1} h \leq p \leq \alpha^m h$ равномерно $\frac{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h + l}|)}{L(|\lambda_p|)} \rightarrow 1$. Поэтому каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех достаточно больших m и всех $p \in [\alpha^{m-1} h, \alpha^m h]$ имеем

$$\frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1}h+l}|)} < (1 + \varepsilon) \frac{1}{L(|\lambda_p|)}. \quad (26)$$

Внося в правой части (25) под знак суммы множитель $\frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1}h+l}|)}$ и пользуясь (26), получим

$$|R| < (1 + \varepsilon) \left| \sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)} e^{-l\rho\varphi_p} \right|.$$

С другой стороны, при достаточно больших m

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)} e^{-l\rho\varphi_p} - \sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)} e^{-l\rho(|\lambda_p|)\varphi_p} \right| < \\ < A\varepsilon \sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)} < A'\varepsilon \end{aligned}$$

(A, A' — постоянные) и поэтому

$$|R| < (1 + \varepsilon') \left| \sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} \lambda_p^{-\rho(|\lambda_p|)} \right| \quad (27)$$

($\varepsilon' > 0$ — любое, m достаточно велико). Так как было предположено, что для бесконечного множества значений m и соответствующих l имеет место неравенство $|M_n| > \gamma$ (n — из интервала вида (23)), то для этих же значений m и l при некотором $\delta > 0$ имеем, с учетом (24), $|R| > \gamma - \delta > 0$. Из (27) поэтому следует, что

$$\sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)} \geq \left| \sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} \lambda_p^{-\rho(|\lambda_p|)} \right| > \gamma' > 0.$$

Но $\sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)} \sim D \ln \frac{\alpha^{m-1}h+l}{\alpha^{m-1}h}$, следовательно при достаточно малом $\delta' > 0$ и большом m

$$D \ln \frac{\alpha^{m-1}h+l}{\alpha^{m-1}h} > \gamma' - \delta' > 0, \quad \frac{\alpha^{m-1}h+l}{\alpha^{m-1}h} > e^{\frac{\gamma' - \delta'}{D}} > 1.$$

Но на основании (22) отсюда следует, что

$$\left| \sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} \lambda_p^{-\rho(|\lambda_p|)} \right| = o \left(\sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)} \right) = o(1).$$

Теперь из (27) получим $\lim_{m \rightarrow \infty} R = \lim_{m \rightarrow \infty} M_n = 0$. Мы пришли к противоре-

чию, которое доказывает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$. Остается показать, что плотность последовательности $\{\nu_n\}$ равна нулю не только при показателе ρ , но и при показателе, соответствующем любому уточненному порядку $\rho(r)$.

В п. 1 было доказано, что $p_m = o(\alpha^m)$, следовательно

$$p_m = o(|\lambda_{\alpha^m}|^{\rho(|\lambda_{\alpha^m}|)}) = o(|\mu_{p_m}|^{\rho(|\mu_{p_m}|)}),$$

то есть $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_m}{|\mu_{p_m}|^{\rho(|\mu_{p_m}|)}} = 0$. Но $\mu_{p_{m-1}+1} = \mu_{p_{m-1}+2} = \dots = \mu_{p_m}$ и по-

этому $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{q}{|\mu_q|^{\rho(|\mu_q|)}} = 0$ при $p_{m-1} < q \leq p_m$. На этом доказательство заканчивается.

Доказанное нами утверждение — несколько более сильное, чем сформулированное в начале статьи. Во-первых, для пополненной последовательности в случае точного порядка ρ не только существует предел вида (3), но имеет место сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^{-\rho}$. Во-вторых, нигде не использовалось то обстоятельство, что число ρ — целое. В третьих, и это нам кажется существенным, дополнительная последовательность определяется только точным порядком ρ и не зависит от выбора уточненного порядка.

Заметим, наконец, что доказательство того факта, что для последовательности $\{\nu_n\}$ существует предел (3) (соответственно (1)), основано только на свойстве последовательности $\{\lambda_n\}$, выраженном равенствами (11), (22), которые следуют из существования угловой плотности и выполнения условия (2), но могут, как нетрудно видеть, иметь место и в случае, когда последовательность $\{\lambda_n\}$ не имеет угловой плотности.

Московский институт химического
машиностроения

Поступило 22. X. 1969

Գ. Լ. ԱՌԻՆՑ. Ամբողջ կարգի ամբողջ ֆունկցիաների անի հետ կապված մի բերեմի մասին (ամփոփում)

Ապացուցվում է R . Ցա. Վերին հիպոթեզը՝ եթե $\{\lambda_n\}$ հաջորդականությունը ունի անկյունային խտություն $\rho(r)$ ցուցիչի դեպքում, իսկ $\rho(r) = \rho$, ρ -ն ամբողջ թիվ է և

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dF(\varphi) = 0,$$

որտեղ $F(\varphi)$ -ն անկյունային խտության բաշխման ֆունկցիան է, ապա $\{\lambda_n\}$ հաջորդականությունը կարելի է այնպես լրացնել մի զրոյական խտություն ունեցող հաջորդականությամբ, որ այն դառնա կանոնավոր բաշխված:

G. L. LUNTS. *On a theorem connected with the growth of entire functions of entire order (summary)*

A hypothesis of B. Y. Levin is proved: if the sequence $\{\lambda_n\}$ has an angular density with an exponent $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho$, ρ — integer, and

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\varphi} dF(\varphi) = 0,$$

where $F(\varphi)$ is the distribution function of angular density, then it is possible to supplement the sequence $\{\lambda_n\}$ with a sequence having zero density in such a way, that it transforms to a regularly distributed sequence.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., 1956.