ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 4, 1970 Математика

В. С. КОРОЛЕВИЧ

НЕКОТОРЫЕ БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

В настоящей работе рассматривается банахово пространство H_n^2 $(n > 0)$ аналитических функций $f(z)$ таких, что

$$f^{(n)} \in H_n^2.$$

Норма пространства H_n^2 вводится таким образом

$$\|f\|_{H_n^2} = \max_{0<k<n} \|f^{(k)}\|_{H^2} = \max_{0<k<n} \sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(re^{i\theta})|^2 \, d\theta\right)^{1/2}.$$

Оказывается, что при $n \geqslant 1$ пространство H_n^2 является банаховой алгеброй [1] относительно обычного умножения. Попутно мы рассматриваем банаховы алгебры $A_n \subset H_n^2$, состоящие из функций $f(z)$, для которых $f^{(n)}(z)$ непрерывна в круге $|z| \leqslant 1$.

Главным результатом работы является описание некоторых идеалов алгебры H_n^2 и выяснение связи между этими идеалами и внутренними функциями.

Как известно, впервые заметил подобную связь Берлинг [2, 3] для пространства H^2 (так как H^2 не является алгеброй относительно обычного умножения, то вместо идеалов здесь рассматриваются подпространства H^2, инвариантные относительно умножения на z). Именно Берлинг установил теорему:

Теорема. *Существует взаимно однозначное соответствие между всеми подпространствами H^2, инвариантными относительно умножения на z и всеми внутренними функциями, т. е. функциями вида*

$$G(z) = B(z) \cdot \exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \, d\mu(\theta)\right\},$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке, $d\mu(\theta)$ — положительная сингулярная мера на окружности $e^{i\theta}$ $(0 < \theta \leqslant 2\pi)$. Точнее, всякое инвариантное подпространство $S \subset H^2$ состоит из функций $f \in H^2$, для которых внутренняя функция $G(z)$ является делителем.

Как известно, каждая функция $f \in H^2$ допускает каноническую факторизацию

$$f(z) = G(z)\cdot \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta + i\gamma\right\},$$

где $G(z)$ — внутренняя функция. Говорят, что внутренняя функция $G_1(z)$ делит $f(z)$, если $G(z)/G_1(z)$ является ограниченной функцией в круге $|z|<1$.

Результат, аналогичный приведенной теореме Берлинга для алгебры A всех функций, регулярных в круге $|z|<1$ и непрерывных в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, также был известен Берлингу, однако он этого результата не опубликовал. Поэтому описание всех замкнутых идеалов алгебры A обычно связывают с именем Рудина, который опубликовал соответствующий результат в 1957 г. [4].

Главной трудностью при установлении структуры идеалов алгебры H_n^2 является выяснение возможности деления данной функции $f\in H_n^2$ на ее внутреннюю часть $G(z)$ так, чтобы отношение $f(z)/G(z)$ (называемое внешней частью $f(z)$) также принадлежало пространству H_n^2. Мы опираемся на следующую теорему [5]:

Теорема. *Пусть $f\in H_n^2$, а внутренняя функция вида*

$$G(z) = B(z)\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{e^{i\theta_k}+z}{e^{i\theta_k}-z}\right\}\left(\alpha_k>0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k<\infty\right)$$

является делителем $f(z)$. Тогда отношение $f_1(z)=f(z)/G(z)$ также принадлежит пространству H_n^2, причем

$$\|f_1^{(k)}\|_{H^2}\leqslant\|f^{(k)}\|_{H^2}\quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

§ 1. Пространство H_n^2

Определение 1. *Пространство H_n^2 $(n>0)$ — класс аналитических функций $f(z)$, регулярных в единичном круге $|z|=1$ и таких, что $f^{(n)}\in H_n^2$, с нормой*

$$\|f\|_{H_n^2}=\max_{0<k<n}\|f^{(k)}\|_{H^2}=\max_{0\leqslant k<n}\sup_{0<r<1}\left(\int\limits_0^{2\pi}|f^{(k)}(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

При $n=0$ получаем классическое пространство $H_0^2=H^2$. Полнота H_n^2 следует непосредственно из определения нормы. Норма (1.1) эквивалентна норме

$$\|f\|^*_{H_n^2}=\sqrt{\sum_{l=0}^{\infty}|c_l|^2(l+1)^{2n}}, \tag{1.2}$$

где $f(z)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}c_l z^l\quad(|z|<1)$.

Для пространства H_n^2 справедлива легко доказываемая

Теорема 1. *Если* $f \in H_n^2$ $(n > 0)$, *то* $f^{(k)}(z)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ *непрерывно продолжимы на круг* $|z| \leqslant 1$; *при этом*

$$\max_{\substack{|z| \leqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant n-1}} |f^{(k)}(z)| \leqslant C \|f\|_{H_n^2}, \tag{1.3}$$

где константа C *зависит только от* n.

Определение 2. *Класс функций* $f(z)(|z| \leqslant 1)$, *регулярных в круге* $|z| < 1$ *и таких, что* $f^{(n)} \in A$ *с нормой*

$$\|f\|_{A_n} = \max_{\substack{|z| \leqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant n}} |f^{(k)}(z)| \quad (n \geqslant 0) \tag{1.4}$$

будем называть пространством A_n $(n \geqslant 0)$.

Очевидно $A_0 = A$, $A_n \subset H_n^2$. Полнота A_n следует из определения нормы. Кроме того, из теоремы 1 получаем

$$H_n^2 \subset A_{n-1} \text{ и } \|f\|_{A_{n-1}} \leqslant \|f\|_{H_n^2} \quad (n \geqslant 1). \tag{1.5}$$

Из классических теорем аппроксимации следует, что множество $\{1, z, z^2, \cdots, z^n, \cdots\}$ фундаментально в пространствах H_n^2 и A_n $(n \geqslant 0)$.

§ 2. Алгебры H_n^2, A_n

Теорема 2. *Если* $f, g \in H_n^2$ $(n \geqslant 1)$, *то* $f \cdot g \in H_n^2$. *При этом*

$$\|f \cdot g\|_{H_n^2} \leqslant C \|f\|_{H_n^2} \cdot \|g\|_{H_n^2}, \tag{2.1}$$

где C *зависит только от* n.

Другими словами H_n^2 $(n \geqslant 1)$ — банахова алгебра с еденицей $f(z) \equiv 1$.

Доказательство: Если $f \cdot g \in H_n^2$, то

$$[f(z) \cdot g(z)]^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)}(z) \cdot g^{(i)}(z) \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Так как по крайней мере одно из чисел i, $k-i$ меньше n, то, в силу теоремы 1, $f^{(k-i)} \cdot g^{(i)} \in H^2$ и

$$\|f^{(k-i)} g^{(i)}\|_{H^2} \leqslant C_1 \|f\|_{H_n^2} \cdot \|g\|_{H_n^2} \, (i = 0, 1, \cdots k, \ k = 0, 1, \cdots, n),$$

где C_1 зависит от k и i. Поэтому справедливо (2.1), где C зависит только от n.

Еще проще доказывается

Теорема 3. *Если* $f, g \in A_n$ $(n \geqslant 0)$, *то* $f \cdot g \in A_n$, *причем*

$$\|fg\|_{A_n} \leqslant C \|f\|_{A_n} \cdot \|g\|_{A_n}.$$

Другими словами, пространство A_n $(n \geqslant 0)$ является банаховой алгеброй. Из § 1 следует, что алгебры A_n $(n \geqslant 0)$ и H_n^2 $(n \geqslant 1)$

имеют одну образующую z.

Примечание: пространство H^2 не является алгеброй относительно обычного умножения.

§ 3. Идеалы алгебры H_n^2 $(n \geqslant 1)$

Теорема 4. *Пространство максимальных идеалов алгебры H_n^2 $(n \geqslant 1)$ гомеоморфно замкнутому кругу $|z| \leqslant 1$.*

Доказательство. Алгебра H_n^2 $(n \geqslant 1)$ является алгеброй с одной образующей. Пусть $F(f)$ $(f \in H_n^2)$ — мультипликативный функционал, причем $F(z) = z_0$. Легко видеть, что $|z_0| \leqslant 1$. В самом деле, если бы $|z_0| > 1$, то $|F(z^m)| = |z_0|^m$ возрастало бы при $m \to \infty$ со скоростью геометрической прогрессии, в то время как

$$\|z^m\|_{H_n^2} = O(m^n) \quad (m \to \infty).$$

Так как функционал $F(f)$ ограничен, то $|F(f)| \leqslant C \|f\|_{H_n^2}$; в частности

$$|F(z^m)| = |z_0|^m \leqslant C \|z^m\|_{H_n^2} \leqslant C_1 m^n,$$

что приводит к противоречию. Поэтому для любого полинома $P(z)$ имеем $F(P) = P(z_0)$ и, следовательно

$$F(f) = f(z_0) \quad (f \in H_n^2).$$

Аналогичную теорему можно доказать и для алгебры A_n.

Переходим теперь к описанию других замкнутых идеалов алгебры H_n^2.

Определение 1. Пусть $K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_{n-1}$ — замкнутые множества на окружности $|z| = 1$, а $G(z)$ — внутренняя функция. Обозначим через $I\{G(z); K_0, K_1, \cdots, K_{n-1}\}$ множество функций $f \in H_n^2$, удовлетворяющих условиям

1) $f(z) = f'(z) = f''(z) = \cdots = f^{(i)}(z) = 0$ $(z \in K_i,\ i = 0, 1, \cdots, n-1)$;

2) $G(z)$ делит $f(z)$.

Теорема 5. $I\{G(z); K_0, K_1, \cdots, K_{n-1}\}$ — *замкнутый идеал (быть может, тривиальный).*

Доказательство. Из (1.5) следует, что

$$I\{G(z); K_0, K_1, \cdots, K_{n-1}\}$$

— замкнутое подпространство H_n^2, так как всякий предельный элемент в метрике H_n^2 является также предельным элементом в метрике A_{n-1} и удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 1. Кроме того $z \cdot I\{G(z); K_0, K_1, \cdots, K_{n-1}\} \subset I\{G(z); K_0, K_1, \cdots, K_{n-1}\}$. Следовательно $I\{G(z); K_0, K_1, \cdots, K_{n-1}\}$ — замкнутый идеал.

Примечание: если идеал не тривиальный, то множество K_0

удовлетворяет условию Берлинга-Карлесона. Как известно [6], это условие заключается в следующем:

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}\,dt < \infty,$$

где $\varphi(t)$ — мера замкнутого множества точек на окружности $|z|=1$, расстояние которых от множества K_0 не превышает t $(t>0)$.

Это условие, как показано в работе [6], эквивалентно такому условию: пусть $\{\delta_n\}$—последовательность длин дополнительных интервалов множества K_0, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \log \frac{1}{\delta_n} < \infty, \ \operatorname{mes} K_0 = 0.$$

Вопрос о том является ли всякий замкнутый идеал I алгебры H_n^2 идеалом $I\{G(z);\ K_0,\ K_1,\cdots,\ K_{n-1}\}$ остается открытым. (Как известно, для пространства H^2 ответ на аналогичный вопрос положительный [3]; при этом роль идеалов играют инвариантные подпространства пространства H^2).

Однако для главных идеалов, т. е. замкнутых идеалов, порожденных одним элементом $f \in H_n^2$, в случае, когда множества $K_0,\ K_1,\cdots,\ K_{n-1}$ совпадают ($K_0 = \cdots = K_{n-1} = K$) и K состоит из конечного числа точек*, справедлива

Теорема 6. *Пусть $f(z)$— произвольная функция из H_n^2 такая, что*

$$f(e^{i\theta_k}) = f'(e^{i\theta_k}) = \cdots = f^{(n-1)}(e^{i\theta_k}) = 0 \quad (k=1,\ 2,\cdots,\ m)$$

и

$$f(e^{i\theta}) \neq 0 \quad (\theta \neq \theta_k,\ k=1,\ 2,\cdots,\ m).$$

Пусть каноническая факторизация $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = B(z)\,S(z)\,F(z),$$

где $B(z)$—произведение Бляшке, а

$$S(z) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{e^{i\theta_k}+z}{e^{i\theta_k}-z}\right\} \quad (\alpha_k>0).$$

Тогда замкнутый идеал I_f, порожденный функцией $f(z)$ (т. е. множество fH_n^2) совпадает с идеалом $I_n\{G(z);\ K\}$, где

$$K = \{e^{i\theta_k}\}_1^m, \quad G(z) = B(z)\cdot S(z).$$

Доказательство. Для упрощения изложения рассмотрим случай, когда $n=1$, $m=1$, т. е. когда $f \in H_1^2$, множество K состоит из одной точки $e^{i\theta_1}$. Наметим сначала идею доказательства.

---

* В этом случае идеал $I\{G(z);\ K_0,\cdots,\ K_{n-1}\}$ будем кратко обозначать $I_n\{G(z);\ K\}$.

Пусть $g(z)$—произвольная функция из $I_1[G(z); K]$. Представим $g(z)$ в виде $g(z) = G(z)\cdot g_1(z)$.

В силу результата, установленного в работе [5] (см. введение)

$$g_1 \in H_1^2 \quad \text{и} \quad \|g_1\|_{H_1^2} \leqslant \|g\|_{H_1^2}.$$

Аналогично, $f(z) = G(z) F(z)$, где $F(z)$—внешняя функция:

$$F(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta + i\gamma\right\}, \quad F \in H_1^2.$$

Далее

$$g(z) = f(z)\cdot[F(z)]^{-1} g_1(z).$$

Если бы функция $[F(z)]^{-1}$ принадлежала пространству H_1^2, то из последнего равенства следовало бы $g \in I_f$. Но так как в действительности $[F(z)]^{-1}$ не принадлежит H_1^2, то мы строим некоторую аппроксимацию этой функции:

$$\varphi_{\varepsilon,\alpha} = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta - i\gamma\right\} \times$$

$$\times \Phi_\alpha(ze^{-i(\theta_1-\varepsilon)})\cdot\Phi_\alpha(ze^{-i(\theta_1+\varepsilon)}) \quad (\alpha > 0),$$

где

$$\Phi_\alpha(z) = \left(\frac{z-1}{z-(\alpha+1)}\right)^2 \quad (\alpha > 0).$$

Доказывается, что $\varphi_{\varepsilon,\alpha} \in H_1^2$ $(\varepsilon > 0,\ \alpha > 0)$, откуда следует $f\cdot\varphi_{\varepsilon\alpha}\times \times g \in I_f$. Переходя к пределу в метрике H_1^2 сначала при $\varepsilon \to 0$, а затем при $\alpha \to 0$ и производя попутно необходимые оценки, мы получаем $g \in I_f$*.

Переходим теперь к подробному изложению доказательства теоремы 6. Пусть C обозначает окружность $|z|=1$, τ_ε $(\varepsilon > 0)$—дугу этой окружности $\theta_1 - \varepsilon < \arg z < \theta_1 + \varepsilon$.

Введем следующие обозначения:

$$F_{C/\tau_\varepsilon}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta + i\gamma\right\};$$

$$F_{\tau_\varepsilon}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta\right\};$$

$$\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z) = \Phi_\alpha(ze^{-i(\theta_1-\varepsilon)})\cdot\Phi_\alpha(ze^{-i(\theta_1+\varepsilon)}),$$

$$\varphi_{\varepsilon,\alpha}(z) = F_{C/\tau_\varepsilon}^{-1}(z)\cdot\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z) \quad (\varepsilon,\ \alpha > 0).$$

---

* Аналогичная идея впервые была применена Т. Карлеманом ([7], стр. 107—109) для доказательства известной теоремы, относящейся к алгебре A.

Докажем, что $\varphi_{\varepsilon,\alpha}\in H_1^2$ или, что то же самое, $\varphi'_{\varepsilon,\alpha}\in H^2$. Пусть $z=\rho e^{it}$ $(0<\rho<1)$. Тогда

$$\int_0^{2\pi}|\varphi_{\varepsilon\alpha}(\rho e^{it})|^2\,dt=\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}|\varphi_{\varepsilon\alpha}(\rho e^{it})|^2\,dt+\int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon}|\varphi_{\varepsilon,\alpha}(\rho e^{it})|^2\,dt. \tag{3.1}$$

1. Рассмотрим первый интеграл правой части (3.1). Оценим $\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(z)$ при $|\theta_1-t|<\varepsilon$ $(z=\rho e^{it},\ \rho<1)$, т. е. $\frac{z}{|z|}\in\tau_\varepsilon$.

$$\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(z)=-F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta\cdot\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)+$$
$$+F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)\cdot\Phi'_{\varepsilon,\alpha}(z)=L_1(z)+L_2(z). \tag{3.2}$$

Очевидно $L_2(z)$—регулярная и ограниченная функция в круге $|z|<1$, т. е.

$$|L_2(z)|\leqslant M\quad(|z|<1). \tag{3.3}$$

Имеем

$$|L_1(z)|\leqslant|F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)|\frac{M_2}{\rho^2(z)}\,\frac{|z-e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|^2\,|z-e^{i(\theta_1+\varepsilon)}|^2}{|z-(1+\alpha)e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|^2\,|z-(1+\alpha)e^{i(\theta_1+\varepsilon)}|^2},$$

где

$$M_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta,\quad\rho(z)=\min_{e^{i\theta}\in C/\tau_\varepsilon}|z-e^{i\theta}|.$$

Так как $\frac{z}{|z|}\in\tau_\varepsilon$, а $e^{i\theta}\in C/\tau_\varepsilon$, то, очевидно

$$\rho(z)=\min\{|z-e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|;\ |z-e^{i(\theta_1+\varepsilon)}|\}.$$

Для определенности положим, что $\rho(z)=|z-e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|$. Тогда

$$|L_1(z)|\leqslant|F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)|\,\frac{4M_2}{\alpha^4}\leqslant C<\infty. \tag{3.4}$$

В самом деле, функция $F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)$ ограничена в круге $|z|<1$, так как пользуясь известными свойствами интеграла Пуассона, находим

$$|F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)|=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\max\{1,\max_{\theta_1+\varepsilon<\theta<2\pi+\theta_1-\varepsilon}|f(e^{i\theta})|^{-1}\}.$$

В силу (3.3) и (3.4) имеем

$$\sup_{0<\rho<1}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}|\varphi(\rho e^{it})|^2\,dt<\infty. \tag{3.5}$$

Таким образом, первый интеграл правой части (3.1) равномерно ограничен при $0<\rho<1$.

II. Рассмотрим теперь второй интеграл правой части (3.1). Оценим $\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(z)$ при $\frac{z}{|z|}\in C/\tau_\varepsilon$, предварительно представив $\varphi_{\varepsilon,\alpha}(z)$ в виде

$$\varphi_{\varepsilon\alpha}(z)=F_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot F^{-1}(z)\cdot\Phi_{\varepsilon\alpha}(z).$$

Тогда

$$\varphi'_{\varepsilon\alpha}(z)=-\frac{F'(z)}{[F(z)]^2}\cdot F_{\tau_\varepsilon}(z)\,\Phi_{\varepsilon\alpha}(z)+\frac{1}{\pi}\frac{F_{\tau_\varepsilon}(z)}{F(z)}\cdot\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\times$$
$$\times\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta+\frac{F_{\tau_\varepsilon}(z)}{F(z)}\cdot\Phi'_{\varepsilon,\alpha}(z).$$

Так как функция $F(z)$, будучи непрерывной, не обращается в нуль на замкнутом множестве $\left\{z\colon |z|\leqslant 1,\ \frac{z}{|z|}\in C/\tau_\varepsilon\right\}$, то

$$\min_{\substack{|z|<1\\ \frac{z}{|z|}\in C/\tau_\varepsilon}}|F(z)|=\delta>0.$$

Функции $F_{\tau_\varepsilon}(z)$, $\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)$, $\Phi'_{\varepsilon,\alpha}(z)$ регулярны и ограничены в круге $|z|<1$.

Отсюда

$$|\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(z)|\leqslant\frac{|F'(z)|}{\delta^2}\cdot M_3+\frac{M_4}{\delta\rho_1^2(z)}\,\frac{|z-e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|^2}{|z-(1+\alpha)\,e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|^2}\times$$
$$\times\frac{|z-e^{i(\theta_1+\varepsilon)}|^2}{|z-(1+\alpha)\,e^{i(\theta_1+\varepsilon)}|^2}+\frac{M_2}{\delta},$$

где $\rho_1(z)=\min\limits_{e^{i\theta}\in\tau_\varepsilon}|z-e^{i\theta}|$.

Повторяя все ранее сказанное о $\rho(z)$, но применительно к $\rho_1(z)$, находим

$$|\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(z)|\leqslant\frac{|F'(z)|}{\delta^2}\,M_3+\frac{M_6}{\delta\alpha^4}+\frac{M_5}{\delta}\quad\left(\frac{z}{|z|}\in C/\tau_\varepsilon\right).\tag{3.6}$$

Следовательно

$$\sup_{0<\rho<1}\int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon}|\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(\rho e^{it})|^2\,dt<\infty.\tag{3.7}$$

Из (3.5) и (3.7) ясно, что

$$\sup_{0<\rho<1}\int_0^{2\pi}|\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(\rho e^{it})|^2\,dt<\infty.$$

Следовательно $\varphi_{\varepsilon,\alpha}\in H_1^2$.

Функция $K(z)=f(z)\cdot\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)$ принадлежит идеалу I_f. Так как $g_1\in H_1^2$, то функция $K(z)\cdot g_1(z)$ также принадлежит I_f.

Далее

$$f(z)=G(z)\cdot F(z),\quad g(z)=G(z)\,g_1(z).$$

Поэтому

$$K(z)\cdot g_1(z) = F(z)\cdot \varphi_{\varepsilon,\alpha}(z)\, g(z) = F_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot g(z).$$

Обозначим

$$\Psi_{\varepsilon,\alpha}(z) = F_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)$$

и докажем, что $\Psi_{\varepsilon,\alpha} \in H_1^2$,

причем

$$\|\Psi_{\varepsilon,\alpha}(z) - \Phi_\alpha^2(z\,e^{-i\theta_1})\|_{H_1^2} \to 0 \tag{3.8}$$

при $\varepsilon \to 0$ и каждом фиксированном $\alpha > 0$.

а) Очевидно при каждом $d > 0$

$$\sup_{\varepsilon>0,\,|z|<1} |\Psi_{\varepsilon,\alpha}(z)| < \infty, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_{\varepsilon,\alpha}(z) = \Phi_\alpha^2(ze^{-i\theta}).$$

Отсюда следует, что

$$\|\Psi_{\varepsilon,\alpha}(z) - [\Phi_\alpha(ze^{-i\theta_1})]^2\|_{H^2} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

б) Аналогичное соотношение докажем и для производной

$$\Psi'_{\varepsilon,\alpha}(z) = F'_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z) + F_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot\Phi'_{\varepsilon,\alpha}(z).$$

Легко проверяется, как и выше, что

$$\|F_{\tau_\varepsilon}(z)\,\Phi'_{\varepsilon,\alpha}(z) - [\Phi_\alpha^2(ze^{-i\theta_1})]'\|_{H^2} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{3.9}$$

Докажем теперь, что

$$\infty > \|\Phi_{\varepsilon,\alpha}\cdot F'_{\tau_\varepsilon}\|_{H^2} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{3.10}$$

Так как

$$\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z) F'_{\tau_\varepsilon}(z) = \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot E_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot \frac{1}{\pi}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta =$$

$$= \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot[F(z)\cdot F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)]' = \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\,[F'(z)\cdot F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z) -$$

$$-F(z)\,F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)\cdot \frac{1}{\pi}\int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon} \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta] =$$

$$= \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\left[F'(z)\cdot F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z) - F_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot \frac{1}{\pi}\int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon} \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta\right],$$

то, разбивая круг $|z| < 1$ на два сектора $\frac{z}{|z|} \in \tau_\varepsilon$ и $\frac{z}{|z|} \in C/\tau_\varepsilon$ и повторяя рассуждения, приведенные выше (см. пункты I и II), мы легко убедимся, что функция $\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot F'_{\tau_\varepsilon}(z)$ принадлежит пространству H^2, а ее граничные значения на окружности $z = e^{it}$ удовлетворяют оценкам (следует при этом принять во внимание, что $|F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(e^{it})| = 1$, если $e^{it} \in \tau_\varepsilon$):

а) Если $z = e^{it} \overline{\in} \tau_\varepsilon$, то

$$|\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot F'_{\tau_\varepsilon}(z)|\leqslant M,$$

где M не зависит от ε.

б) Если $z=e^{it}\in\tau_\varepsilon$, то почти везде

$$|\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot F'_{\tau_\varepsilon}(z)|\leqslant M_1|F'(z)|+C, \tag{3.11}$$

где M_1 и C не зависят от ε.

Таким образом

$$|\Phi_{\varepsilon,\alpha}(e^{it})\,F'_{\tau_\varepsilon}(e^{it})\leqslant \max\{C, M\}+M_1|F'(e^{it})| \quad (п.\ в.).$$

Так как в каждой точке окружности $|z|=1$ $(z\neq e^{i\theta_1})$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot F'_{\tau_\varepsilon}(z)=0,$$

то, в силу известной теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега при наличии мажоранты, мы получаем соотношение (3.10). Из (3.9) и (3.10) следует (3.8). Так как $g\in H_1^2$, то

$$\|g\Phi^2_{\varepsilon,\alpha}(z)-g\Phi^2(ze^{-i\theta_1})\|_{H_1^2}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Обозначим

$$g_\alpha(z)=g(z)\,\Phi^2_\alpha(ze^{-i\theta_1}).$$

Из доказанного следует, что $g_\alpha\in I_f$. Покажем, что

$$\|g_\alpha(z)-g(z)\|_{H_1^2}\to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0. \tag{3.12}$$

а) Так как

$$|g_\alpha(z)\leqslant|g(z)| \text{ и } \lim_{\alpha\to 0} g_\alpha(z)=g(z),$$

то

$$\|g_\alpha(z)-g(z)\|_{H^2}\to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0. \tag{3.13}$$

б)

$$g'_\alpha(z)=g'(z)\,\Phi^2_\alpha(ze^{-i\theta_1})-4g(z)\,[\Phi_\alpha(ze^{-i\theta_1})]^{1/2}\frac{\alpha e^{i\theta_1}}{[z-(1+\alpha)\,e^{i\theta_1}]^2}.$$

Очевидно $\|g'(z)\,\Phi^2_\alpha(ze^{-i\theta_1})-g'(z)\|_{H^2}\to 0$ $(\alpha\to 0)$. Так как $|\Phi_\alpha(z)|<1$ $(|z|\leqslant 1,\ \alpha>0)$, то остается доказать, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{2\pi}|g(e^{it})|^2\frac{\alpha^2\,dt}{|e^{it}-(1+\alpha)\,e^{i\theta_1}|^4}=0. \tag{3.14}$$

Произведя замену $t-\theta=\tau$, интеграл (3.14) перепишем так:

$$\alpha^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau})|^2\,d\tau}{|e^{i\tau}-(1+\alpha)|^4}.$$

Покажем, что

$$g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau})=o\left(|\tau|^{\frac{1}{2}}\right) \quad (\tau\to 0).$$

В самом деле, согласно неравенству Коши-Буняковского

$$|g(e^{i\theta_1}e^{i\tau})| < \int_0^\tau |g'(e^{i\theta_1}e^{i\tau})|\, d\tau \leqslant \sqrt{\int_0^\tau |g'(e^{i\theta_1}e^{i\tau})|^2\, d\tau}\, [\tau]^{1/2},$$

$$g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau}) = o\left(|\tau|^{\frac{1}{2}}\right) \quad (\tau \to 0).$$

Следовательно

$$\varphi(\tau) = \frac{|g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau})|^2}{|\tau|} \leqslant M \text{ и } \lim_{\tau\to 0}\varphi(\tau) = 0. \tag{3.15}$$

Далее

$$|e^{i\tau} - (1+\alpha)| = \sqrt{1+(1+\alpha)^2 - 2(1+\alpha)\cos\tau} = \sqrt{4(1+\alpha)\sin^2\frac{\tau}{2} + \alpha^2}.$$

Использовав неравенство

$$\frac{\tau}{\pi} \leqslant \sin\frac{\tau}{2} \leqslant \frac{\tau}{2} \quad (0 \leqslant \tau \leqslant \pi),$$

получим

$$\alpha^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(e^{i\theta_1}e^{i\tau})|^2\, d\tau}{\left[4(1+\alpha)\sin^2\frac{\tau}{2} + \alpha^2\right]^2} \leqslant \alpha^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau})|^2\, d\tau}{\left(\frac{4}{\pi^2}\tau^2 + \alpha^2\right)^2} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{|\tau|}{\alpha}\, \frac{|g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau})|^2}{|\tau|}\cdot\frac{d\tau}{\alpha}}{\left[\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^2 + 1\right]^2} = \int_{-\frac{\pi}{\alpha}}^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{|\tau|\,\varphi(\alpha\tau)\, d\tau}{\left(1+\frac{4}{\pi^2}\tau^2\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|\,\varphi(\alpha\tau)}{\left(1+\frac{4}{\pi^2}\tau^2\right)^2}\, d\tau.$$

В силу (3.15) последний интеграл стремится к нулю при $\alpha \to 0$.

Таким образом, соотношение (3.14), а вместе с ним и (3.12) выполняются. Из всего сказанного следует, что

$$g(z) \in I_f.$$

Для случая произвольного $n > 1$ доказательство совершенно аналогично, только вместо функции $\Phi_\alpha(z)$ надо взять функцию $\Phi_\alpha^n(z)$. Теорема 6 доказана.

Черкасский ОТФ Киевского
инженерно-строительного института

Поступило 17.III.1969

Վ. Ս. ԿՈՐՈԼԵՎԻՉ. Անալիտիկ ֆունկցիաների մի քանի Բանախի ալգեբրաներ *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում են $|z|<1$ շրջանում անալիտիկ այնպիսի ֆունկցիաների $H_n^2 (n>0)$ Բանախի տարածությունները, որոնց $f^{(n)}(z) \in H^2$. H_n^2 տարածությունում նորման սահմանվում է այսպես՝

$$\|f\|_{H_n^2} = \max_{0\le k\le n} \{\|f^{(k)}(z)\|_{H^2}\}.$$

Միաժամանակ դիտարկվում են $A_n \subset H_n^2$ բանախի տարածությունները, որոնք կազմված են այնպիսի $f(z)$ ֆունկցիաներից, որոնց համար $f^{(n)}(z)$-ը անընդհատ է $|z|\le 1$-ում։

Ցույց է տրված, որ $H_n^2 (n>1)$ ինչպես նաև $A_n (n>0)$ տարածությունները հանդիսանում են բանախի տարածություններ սովորական արտադրյալով։ Հիմնական արդյունքը կայանում է H_n^2-ի որոշ փակ իդեալների, հատկապես միակ էլեմենտով առաջացած իդեալներ (այսպես կոչված գլխավոր իդեալների) նկարագրելում։ Քննարկվում է H_n^2-ի փակ իդեալների և «ներքին» ֆունկցիաների միջև եղած կապը։

V. S. KOROLEVITCH. *Some banach algebras of analytic functions* (summary)

Banach spaces H_n^2 $(n>0)$ consisting of analytic functions $f(z)(|z|<1)$ such that $f^{(n)}(z) \in H^2$ are studied. The norm in the space H_n^2 is defined as follows

$$\|f\|_{H_n^2} = \max_{0<k<n} \{\|f^{(k)}(z)\|_{H^2}\}.$$

ncidentally under consideration are the Banach spaces $A_n \subset H_n^2$ consisting of functions $f(z)$ such that $f^{(n)}(z)$ is continuous in $|z|<1$.

The spaces H_n^2 $(n>1)$ as well as A_n $(n>0)$ are shown to be banach algebras with usual multiplication.

The principal result is the description of some closed ideals of H_n^2 especially those generated by a single element, the so-called main ideals. The connection between the closed ideals of H_n^2 and „inner" functions is discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов.* Коммутативные нормированные кольца, Москва, Изд. Ф.—М. лит., 1960.
2. *A. Beurling.* On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math., 81, № 3—4, 1949, 239—255.
3. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, Москва, ИИЛ, 1963.
4. *W. Rudin.* The closed ideals in an Algebra of continuous functions, Can. J. Math., 9, № 3, 1957, 426—434.
5. *Б. И. Коренблюм, В. С. Королевич.* О функциях, регулярных в круге и гладких на его границе, Математические заметки, 7, вып. 2, 1970, 165—172.
6. *L. Carleson.* Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle, Acta Math., 87, № 3—4, 1952, 325—345.
7. *T. Carleman.* Les fonctions quasi-analytiques, Paris, 1926, 107—109.