ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 4, 1970 Математика

Л. Б. ГРАЙФЕР

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТОЧНЫХ И ПОЛУТОЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА ОТКРЫТЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть M—открытое ориентируемое n-мерное дифференцируемое многообразие с римановой метрикой [4]. Как и для римановых поверхностей [2] назовем $(n-1)$-мерный компактный цикл γ на M разделяющим, если $M-\gamma$ состоит из двух непересекающихся компонент. Тогда назовем исчерпание многообразия M относительно компактными n-мерными подмногообразиями V с гладкой $(n-1)$-мерной границей ∂V каноническим, если каждый контур границы является разделяющим $(n-1)$-мерным циклом на M и ограничивает одну из компонент $M-V$.

Как и в [3] обозначим через Γ гильбертово пространство действительных дифференциальных форм на M с конечной нормой $\|\varphi\|=(\varphi, \varphi)=$ $=\int\limits_M \varphi \wedge * \varphi < \infty$, через Γ^1-плотное в Γ подпространство форм класса C^∞, через Γ^1_e, Γ^1_c, Γ^1_R — подмножества Γ^1, состоящие соответственно из точных $(\varphi = d\psi)$, замкнутых $(d\varphi = 0)$ и гармонических в смысле Ходжа $(d\varphi = 0,\ \delta\varphi = 0)$ форм на M, $\Gamma^1_{he} = \Gamma^1_h \cap \Gamma^1_e$, Γ_x—замыкание Γ^1_x в Γ, Γ^*_x — множество форм вида $*\varphi$, где $\varphi \in \Gamma_x$. Для форм на V обозначим через Γ^1_0 подмножество, состоящее из форм Γ^1, обращающихся в 0 вдоль ∂V, тогда $\Gamma^1_{c0} = \Gamma^1_c \cap \Gamma^1_0$, $\Gamma^1_{h0} = \Gamma^1_h \cap \Gamma^1_{c0}$ и $d\Psi \in \Gamma^1_{e0}$, если $\Psi \in \Gamma^1_0$. Гармонической функцией на M назовем функцию u, удовлетворяющую обобщенному уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

которое с помощью операторов d и δ приводится к виду

$$\delta d u = 0.$$

Используемые выше операторы $d, \delta, \Delta, *$ определены в [4]. Там же доказана регулярность гармонических форм: $\Gamma_h = \Gamma^*_h = \Gamma^1_h$ ([4], § 29).

Отнесем к классу полуточных форм ${}_{n-1}\Gamma^1_{se}$ на V $(n-1)$-мерные однородные формы из Γ^1_c с нулевыми периодами вдоль контуров ∂V. Покажем, что ${}_{n-1}\Gamma^1_{se}$— ортогональное дополнение к ${}_1\Gamma^{1*}_{c0} \cap {}_1\Gamma^{1*}_e$, где ${}_1\Gamma^1_{c0}$ и ${}_1\Gamma^1_e$ — пространства пфаффовых форм, а ${}_1\Gamma^1_{c0} \cap {}_1\Gamma^1_e$ представляет собой пространство дифференциалов функций ψ с постоянными значениями на контурах ∂V. Пусть $\varphi \in {}_{n-1}\Gamma^1_{se}$ и $*d\psi \in {}_1\Gamma^{1*}_{c0}$, тогда

$$(\varphi, *d\Psi) = \int\limits_v \varphi\Lambda * * d\psi = (-1)^{n-1}\int\limits_v \varphi\Lambda d\psi =$$

$$= \int\limits_v d\psi\Lambda\varphi = \int\limits_{\partial v} \Psi\Lambda\varphi + \int\limits_v \psi\Lambda d\varphi = 0, \tag{1}$$

значит ${}_1\Gamma_{c0}^{1*} \cap {}_1\Gamma_e^{1*} \perp {}_{n-1}\Gamma_{se}^1$.

Пусть $\varphi \perp ({}_1\Gamma_{c0}^{1*} \cap {}_1\Gamma_e^{1*})$, тогда $\varphi \perp {}_1\Gamma_{e0}^{1*}$, так как $\Gamma_{e0}^1 \subset \Gamma_{c0}^1 \cap \Gamma_e^1$, отсюда в силу (1)

$$\int\limits_v \psi\Lambda d\varphi = 0,$$

но $deg\ \varphi = n-1$, поэтому $\int\limits_v \psi\Lambda d\varphi = \int\limits_v \psi\cdot\alpha d\sigma$, где ψ и α — функции, а $d\sigma$ — элемент объема V. Существование на V разбиения единицы [4] и произвол в выборе ψ позволяют заключить, что $\alpha=0$, т. е. $d\varphi$. Если же взять ψ, равную 1 на одном из контуров dV и 0—на остальных, то из (1) следует, что φ имеет нулевые периоды относительно всех граничных контуров, следовательно $\varphi \in {}_{n-1}\Gamma_{se}^1$.

Применим этот результат к гармоническим формам. Пусть ${}_{n-1}\Gamma_{hse} = \Gamma_h \cap {}_{n-1}\Gamma_{se}^1$. Тогда ${}_{n-1}\Gamma_{hse}$ является ортогональным дополнением к пространству ${}_1\Gamma_{he0}^* = {}_1\Gamma_{h0}^* \cap {}_1\Gamma_{he}^*$. Пространство ${}_1\Gamma_{he0}$ представляет собой пространство дифференциалов гармонических функций с постоянными значениями на контурах ∂V, являющихся линейными комбинациями гармонических мер на V, равных 1 на одном из контуров ∂V и 0—на остальных.

Определим классы ${}_{n-1}\Gamma_{hse}$ и ${}_1\Gamma_{hm}$ на M. Отнесем к классу ${}_{n-1}\Gamma_{hse}(M)$ гармонические формы с нулевыми периодами вдоль всех разделяющих $(n-1)$-мерных циклов на M. Отметим, что всякий разделяющий цикл $\gamma \in M$ гомологичен контурам границы V из исчерпания M. При таком определении ограничение формы $\omega \in {}_{n-1}\Gamma_{hse}(M)$ на V принадлежит классу ${}_{n-1}\Gamma_{hse}(V)$. К классу ${}_1\Gamma_{hm}(M)$ отнесем те формы на M, которые можно аппроксимировать в среднем по исчерпанию формами из ${}_1\Gamma_{he0}(V)$. Покажем, что при таком определении классов справедлив следующий результат:

Теорема 1. *Пространства ${}_{n-1}\Gamma_{hse}$ и ${}_1\Gamma_{hm}^*(M)$ являются ортогональными дополнениями в ${}_{n-1}\Gamma_h(M)$.*

Пусть $\delta \in {}_{n-1}\Gamma_{hse}(M)$, $\omega \in {}_1\Gamma_{hm}(M)$, тогда $\delta \in {}_{n-1}\Gamma_{hse}(V)$, следовательно, если ω_{hmv} — ограничение формы ω на V, то $(\delta, *\omega_{hmv}) = 0$ и $(\delta, *\omega)_v = (\delta, *\omega - *\omega_{hmv})$, откуда $(\delta, *\omega) = 0$ и $\delta \perp \omega$. Пусть $\omega \perp {}_{n-1}\Gamma_{hse}^*(M)$, $\omega \in {}_1\Gamma_h$. Обозначим через ω_{he0} проекцию ω на ${}_1\Gamma_{he0}(V)$, тогда $\omega - \omega_{he0} \in \Gamma_{hse}^*(V)$ и для $V \subset V'$

$$\omega_{he0} - \omega'_{he0} \in {}_{n-1}\Gamma_{hse}^*(V).$$

Но отсюда $\omega_{he0}-\omega'_{he0}\perp\omega_{he0}$, следовательно

$$\|\omega_{he0}-\omega'_{he0}\|^2_v=\|\omega'_{he0}\|^2_v-\|\omega_{he0}\|^2_v\leqslant\|\omega'_{he0}\|^2_{v'}-\|\omega_{he0}\|^2_v.$$

Но $\|\omega_{he0}\|_v$ имеет конечный предел при $V\to M$ и $\|\omega_{he0}-\omega'_{he0}\|_{v_0}\to 0$, когда V и V' приближаются к M независимо друг от друга. Тогда по теореме Рисса-Фишера [5] существует $\omega_{hm}=\lim\limits_{v\to M}\omega_{he0}$ в смысле сходимости в среднем, т. е. $\omega_{hm}\in{}_1\Gamma_{hm}(M)$. Но тогда

$$\omega-\omega_{hm}\in{}_{n-1}\Gamma^{*}_{hse}(M),\quad \omega_{hm}\perp{}_{n-1}\Gamma^{*}_{hse}(M)$$

по доказанному выше и $\omega\perp{}_{n-1}\Gamma_{hse}(M)$ по предположению. Следовательно $\omega=\omega_{hm}$, а ${}_1\Gamma_{hm}$ —ортогональное дополнение к ${}_{n-1}\Gamma^{*}_{hse}$. По своему определению ${}_{n-1}\Gamma^{*}_{hse}$ замкнуто, поэтому ${}_{n-1}\Gamma^{*}_{hse}$ также будет ортогональным дополнением к ${}_1\Gamma_{hm}$.

Из доказанной теоремы следует, что ортогональные разложения

$${}_{n-1}\Gamma_h={}_{n-1}\Gamma_{hse}\dotplus{}_1\Gamma^{*}_{hm}\quad\text{и}\quad {}_1\Gamma_h={}_{n-1}\Gamma^{*}_{hse}\dotplus{}_1\Gamma_{hm}$$

можно было бы взять за определение класса ${}_1\Gamma_{hm}(M)$. Из такого определения следовало бы, что ${}_1\Gamma_{hm}(M)$ состоит из форм, допускающих аппроксимацию в среднем формами из ${}_1\Gamma_{he0}$.

Отметим, что рассмотренные выше свойства точных и полуточных форм аналогичны свойствам соответствующих дифференциалов на римановых поверхностях [1], [2].

Укажем на связь классов точных и полуточных форм с одним классом открытых многообразий, являющимся аналогом класса O_{KD} (класса Сарио) римановых поверхностей [6]. Для дифференциальной формы ω на M норма Дирихле имеет вид

$$D(\omega)=(d\omega,\ d\omega)+(\delta\omega,\ \delta\omega).$$

Учитывая тот факт, что оператор δ понижает степень формы на единицу, для функции u получим

$$D(u)=(du,\ du)=\int\limits_M du\wedge *\,du.$$

Отнесем к классу O_{KD} такие многообразия M, на которых нет отличной от постоянной гармонической функции u с конечной нормой Дирихле и нулевым сопряженным периодом вдоль всякого разделяющего $(n-1)$-мерного цикла γ на M.

Теорема 2. *$M\in O_{KD}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1. ${}_1\Gamma_{he}\cap{}_{n-1}\Gamma^{*}_{hse}=\{0\}$;

2. ${}_1\Gamma_{he}={}_1\Gamma_{hm}$.

Необходимость и достаточность условия 1 следует из того, что класс ${}_1\Gamma_{he}$ состоит из дифференциалов гармонических функций. Действительно, если $\varphi=d\psi\in{}_1\Gamma_{he}$, то $\delta\varphi=\delta d\psi=0$. Тогда справедливость утверждения 2 вытекает из разложения

$$ {}_1\Gamma_{he} = {}_1\Gamma_{he} \cap {}_{n-1}\overset{*}{\Gamma}_{hse} + {}_1\Gamma_{hm}, $$

которое является следствием теоремы 1.

Пользуюсь случаем поблагодарить Л. И. Волковыского и С. Я. Гусмана за внимание к настоящей работе.

Пермский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило 10.VIII.1968

Լ. Բ. ԳՐԻՖԵՐ. Բաց բազմաձևություններում ճշգրիտ և կիսաճշգրիտ դիֆերենցիալ ձևերի մի քանի հատկությունների մասին (*ամփոփում*)

Դիտարկվում են բաց բազմաձևությունների վրա ճշգրիտ և կիսաճշգրիտ դիֆերենցիալ ձևերի մի քանի հատկություններ, որոնք հանդիսանում են Լարս Ալֆորսի կողմից ուսումնասիրված Ռիմանի բաց մակերևույթների վրա վերջավոր նորմայով դիֆերենցիալների հատկությունների անալոգը։ Այդպիսի ձևերի օգնությամբ տրվում է բազմաձևության O_{KD} դասին պատկանելու հայտանիշը։

L. B. GRIFER. *On some properties of exact and semiexact differential forms on the open manifolds* (summary)

Some properties of exact and semiexact differential forms on the open manifolds in nanlogy with differentials properties of the bounded norms on the open Riemann surface studied by L. V. Ahlfors are examined. These forms give the criteria for belonging of these manifolds to O_{KD} class.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. V. Ahlfors*. The method of orthogonal decomposition for differentials on open Riemann surfaces, Ann. Acad. Sci. Fenn., ser. AI, 249/7, 1958.
2. *L. V. Ahlfors* and *L. Sario*. Riemann surfaces, Princeton, 1960.
3. *С. Я. Гусман*. Формы Шоттки-Альфорса и некоторые экстремальные задачи на дифференцируемых многообразиях, ДАН СССР, 170, № 2, 1966.
4. *Ж. де Рам*. Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.
5. *Ф. Рисс* и *Б. Секефальви-Надь*. Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М. 1954.
6. *L. Sario*. Contribution to the theory of Riemann surfaces, Princeton, 1953, 63—76.