ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 4, 1970 Математика

К. А. АБГАРЯН

ОДНО ФОРМАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. В статье указывается метод формального преобразования системы дифференциальных уравнений

$$A(\tau, \varepsilon)\frac{dx}{dt} = B(\tau, \varepsilon)\, x, \tag{1}$$

где $\tau = \varepsilon t$ (ε — параметр),

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k A_k(\tau), \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k B_k(\tau),$$
$$\det A_0(\tau) \neq 0 \quad (\tau \in [0, L]),$$

к системе, состоящей из несвязанных друг с другом линейных дифференциальных уравнений первого или более высокого порядка.

В принципе, такое преобразование можно было бы осуществить путем предварительного расщепления системы (1) на некоторое число независимых подсистем линейных дифференциальных уравнений первого порядка, используя известные методы формального расщепления систем вида (1)*, с последующим приведением каждой подсистемы к одному линейному дифференциальному уравнению соответствующего порядка. Способ, который предлагается ниже, позволяет непосредственно преобразовать систему (1) к расщепленной системе отдельных линейных дифференциальных уравнений.

2°. В этом пункте приводятся некоторые результаты теории матриц и линейных операторов в несколько своеобразной интерпретации, подчиненной интересам последующих разделов. Сформулированные здесь же леммы, легко следуют из общей теории, изложенной, например, в [3], но эти леммы содержат в себе ту информацию и в такой форме, в какой это необходимо для последующих разделов статьи. Расщепление системы (1) связано с возможностью разложения матрицы $U(\tau) = A_0^{-1}(\tau)\, B_0(\tau)$ на составляющие и с некоторыми свойствами матриц, участвующих в этом разложении.

---

* Расщеплению системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка на независимые подсистемы уравнений первого порядка посвящено большое количество работ. По этому вопросу см., например, монографии С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиля, Л. Д. Николенко „Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений", Киев, „Наукова думка", 1966 г. и В. Вазова „Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений", Москва, „Мир", 1968 г., которые, кстати, содержат обширные библиографии, а также цитируемую ниже статью автора [2].

Пусть собственные числа матрицы U (порядка n) разбиты на p групп $\lambda_1^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_k^{(\sigma)}$ $\left(\sigma = 1, \cdots, p; \sum_{\sigma=1}^{p} k_\sigma = n\right)$ так, что

$$|\lambda_i^{(\sigma)}(\tau) - \lambda_j^{(s)}(\tau)| > c > 0 \tag{2}$$

$$(\sigma \neq s;\ i = 1, \cdots, k_\sigma;\ j = 1, \cdots, k_s;\ \tau \in [0, L]).$$

Тогда (см. [1, 2]) могут быть построены матрицы $K_\sigma(\tau)$, $\Lambda_\sigma(\tau)$, $M_\sigma(\tau)$ типа соответственно $n \times k_\sigma$, $k_\sigma \times k_\sigma$, $k_\sigma \times n$ $(\sigma = 1, \cdots, p)$, дифференцируемые по τ столько же раз, сколько раз дифференцируема матрица $U(\tau)$, такие, что

$$U = \sum_{\sigma=1}^{p} U_\sigma,\ U_\sigma = K_\sigma \Lambda_\sigma M_\sigma, \tag{3}$$

$$M_\sigma K_s = \begin{cases} E_{k_\sigma} & (s = \sigma), \\ 0 & (s \neq \sigma) \end{cases} \tag{4}$$

(E_r — единичная матрица порядка r).

Собственными числами каждой матрицы Λ_σ служат собственные числа матрицы U, включенные в соответствующую группу σ.

Матрицы $P_\sigma = K_\sigma M_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, p)$ являются проекционными $(P_\sigma^2 = P_\sigma)$ и обладают свойствами

$$P_\sigma P_s = 0\ (\sigma \neq s),\ \sum_{\sigma=1}^{p} P_\sigma = E_n,\ P_\sigma U = U P_\sigma = U_\sigma, \tag{5}$$

$$P_\sigma U_s = U_s P_\sigma = 0 \quad (s \neq \sigma).$$

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение n-мерное векторное пространство $\mathbf{R}$ и действующие в нем линейные операторы $\mathbf{U}$, $\mathbf{P}_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, p)$, которым в некотором базисе $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \cdots, \mathbf{n}_n$ отвечают соответственно матрицы U, P_σ $(\sigma = 1, \cdots, p)$. Эти операторы и матрицы связаны соотношениями

$$\mathbf{U}\mathbf{E} = \mathbf{E}U,\ \mathbf{P}_\sigma \mathbf{E} = \mathbf{E} P_\sigma\ (\sigma = 1, \cdots, p), \tag{6}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \cdots, \mathbf{n}_n)$.

Операторы $\mathbf{P}_\sigma$ являются проекционными, и для любого $\mathbf{g}$ из $\mathbf{R}$, как это следует из (5),

$$\mathbf{P}_\sigma \mathbf{P}_s \mathbf{g} = 0 \quad (s \neq \sigma),\ \sum_{\sigma=1}^{p} \mathbf{P}_\sigma \mathbf{g} = \mathbf{g}.$$

В соответствии с последними соотношениями пространство $\mathbf{R}$ расщепляется на p подпространств:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \cdots + \mathbf{R}_p,\ \mathbf{R}_\sigma = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{R} \quad (\sigma = 1, \cdots, n).$$

Эти подпространства инвариантны относительно оператора $\mathbf{U}$. Действительно, пусть, например, $\mathbf{g} \in \mathbf{R}_\sigma$. Тогда, используя равенства (5) и (6) и учитывая, что вектор $\mathbf{g}$, как и любой другой вектор из R, можно представить в виде $\mathbf{g} = \mathbf{E}g$, где g — столбцевая матрица, составленная из координат вектора g в базисе $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \cdots, \mathbf{n}_n$, последовательно получим

$$\mathbf{U}g = \mathbf{U}\mathbf{P}_\sigma \mathbf{E} g = \mathbf{E} U P_\sigma g = \mathbf{E} P_\sigma U g = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{U}\mathbf{E} g \in \mathbf{R}_\sigma.$$

Следующая лемма устанавливает связь между аннулирующими многочленами* подпространств $\mathbf{R}_\sigma$ и матриц Λ_σ в разложении (3).

Лемма 1. *Всякий аннулирующий многочлен подпространства $\mathbf{R}_\sigma$ является аннулирующим многочленом и для матрицы Λ_σ; и обратно, всякий аннулирующий многочлен матрицы Λ_σ является аннулирующим многочленом и для подпространства $\mathbf{R}_\sigma$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_\sigma(\lambda)$ — некоторый многочлен от λ. Учитывая, что $U^k P_\sigma = K_\sigma \Lambda_\sigma^k M_\sigma$, для любого вектора $\mathbf{g}$ из $\mathbf{R}$ будем иметь

$$\varphi_\sigma(\mathbf{U})\, \mathbf{P}_\sigma \mathbf{g} = \varphi_\sigma(\mathbf{U})\, \mathbf{P}_\sigma \mathbf{E} g = \mathbf{E}\, \varphi_\sigma(U)\, P_\sigma g = \mathbf{E}\, K_\sigma \varphi_\sigma(\Lambda_\sigma)\, M_\sigma g. \tag{7}$$

Если $\varphi_\sigma(\lambda)$ — аннулирующий многочлен подпространства $\mathbf{R}_\sigma$, то

$$\varphi_\sigma(\mathbf{U})\, \mathbf{P}_\sigma \mathbf{g} = 0 \quad (\mathbf{g} \in \mathbf{R}), \tag{8}$$

и, значит, согласно равенству (7)

$$\mathbf{E} K_\sigma\, \varphi_\sigma(\Lambda_\sigma)\, M_\sigma\, g = 0.$$

Но последнее равенство может выполняться для любого $\mathbf{g}$ из $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi_\sigma(\Lambda_\sigma) = 0. \tag{9}$$

Поэтому $\varphi_\sigma(\lambda)$ является аннулирующим многочленом матрицы Λ_σ.

И обратно, если $\varphi_\sigma(\lambda)$ — аннулирующий многочлен матрицы Λ_σ, то имеет место равенство (9) и, в силу (7), равенство (8) для любого вектора $\mathbf{P}_\sigma \mathbf{g} \in \mathbf{R}_\sigma$ $(\mathbf{g} \in \mathbf{R})$.

Следствие. Минимальные аннулирующие многочлены подпространства $\mathbf{R}_\sigma$ и матрицы Λ_σ совпадают.

Далее, если k_σ-мерное подпространство $\mathbf{R}_\sigma$-циклическое относительно оператора $\mathbf{U}$, а $\mathbf{n} = \mathbf{E}e$—порождающий вектор этого подпространства, то система векторов $\mathbf{n}, \mathbf{U}\mathbf{n}, \cdots, \mathbf{U}^{k_\sigma - 1}\mathbf{n}$ линейно независима. Линейно независимой является также система столбцевых матриц $e, Ue, \cdots, U^{k_\sigma-1} e$. Можно показать, что существует такая матрица a_σ типа $k_\sigma \times 1$, что система $a_\sigma, \Lambda_\sigma a_\sigma, \cdots, \Lambda_\sigma^{k_\sigma-1} a_\sigma$ также линейно независима. Более того, справедлива следующая

Лемма 2. *Для того чтобы k_σ-мерное подпространство $\mathbf{R}_\sigma$, инвариантное относительно оператора $\mathbf{U}$, было циклическим необходимо и достаточно существование столбцевой матрицы a_σ типа $k_\sigma \times 1$, которой отвечает линейно независимая система столбцевых матриц*

$$a_\sigma,\ \Lambda_\sigma a_\sigma, \cdots, \Lambda_\sigma^{k_\sigma-1} a_\sigma. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$H = (U^{k_\sigma-1} e \quad U^{k_\sigma-2} e \cdots Ue \quad e) \quad (e = P_\sigma e).$$

---

* Терминология, принятая в этом пункте, соответствует книге [3].

Используя разложение (3) и учитывая, что $M_s e = M_s P_\sigma e = 0$ $(s \neq \sigma)$, эту матрицу можно представить в виде

$$H = K_\sigma H_\sigma, \tag{11}$$

где

$$H_\sigma = (\Lambda_\sigma^{k_\sigma - 1} M_\sigma e \ \Lambda_\sigma^{k_\sigma - 2} M_\sigma e \cdots \Lambda_\sigma M_\sigma e \quad M_\sigma e)$$

— квадратная матрица порядка k_σ.

Матрицы H и H_σ имеют один и тот же ранг, так как матрица K_σ состоит из линейно независимых столбцов. Используя это обстоятельство, лемма легко доказывается.

Необходимость. Пусть R_σ — циклическое подпространство, а $\mathfrak{n} = \mathrm{E}e$ — его порождающий вектор. Тогда столбцы матрицы H линейно независимы. Значит линейно независимы и столбцы матрицы H_σ. Если принять

$$a_\sigma = M_\sigma e, \tag{12}$$

то, очевидно, система (10) также будет линейно независимой.

Достаточность. Допустим, что система (10), где a_σ — некоторая матрица типа $k_\sigma \times 1$, линейно независима. Тогда столбцы матрицы H также будут линейно независимыми, если в качестве e принять какое-нибудь ненулевое решение матричного уравнения (12). Ясно, что такое решение всегда существует и соответствующий вектор $\mathfrak{n} = \mathrm{E}e$ принадлежит подпространству R_σ. Значит k_σ-мерное инвариантное подпространство R_σ является циклическим. Лемма доказана.

3°. Теорема. *Пусть на сегменте* $[0, L]$ а) *матрицы* $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ *имеют производные по* τ *всех порядков;* б) *собственные числа матрицы* $U = A_0^{-1} B_0$ *разбиты на* p *групп при условии* (2) *и* в) *соответствующие этим группам инвариантные подпространства* $\mathrm{R}_1, \cdots, \mathrm{R}_p$ *являются циклическими подпространствами n-мерного пространства* R. *Тогда формальное решение уравнения* (1) *может быть представлено в виде*

$$x = \sum_{\sigma=1}^{p} \left[\tilde{\xi}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma - 1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 1}} + \tilde{\xi}_{2\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma - 2} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 2}} + \cdots + \tilde{\xi}_{k_\sigma \sigma}(\tau, \varepsilon) q_\sigma \right], \tag{13}$$

где q_σ $(\sigma = 1, \cdots, p)$ — *скалярные функции, удовлетворяющие уравнениям*

$$\frac{d^{k_\sigma} q_\sigma}{dt^{k_\sigma}} + \tilde{\alpha}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma - 1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 1}} + \cdots + \tilde{\alpha}_{k_\sigma - 1\, \sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{dq_\sigma}{dt} + \tilde{\alpha}_{k_\sigma \sigma}(\tau, \varepsilon) = 0 \tag{14}$$

$$(\sigma = 1, 2, \cdots, p),$$

а $\tilde{\xi}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon)$, $\tilde{\alpha}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon)$ — *соответственно столбцевые матрицы и скалярные функции, представляемые формальными рядами*

$$\tilde{\xi}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi_{j\sigma}^{[k]}(\tau), \quad \tilde{\alpha}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_{j\sigma}^{[k]}(\tau). \tag{15}$$

Доказательство. Подставим выражение (13) в (1), исключив

$\frac{d^{k_\sigma} q_\sigma}{dt^{k_\sigma}}$ — с помощью (14), и приравняем коэффициенты при q_σ, $\frac{dq_\sigma}{dt}$, ...
..., $\frac{d^{k_\sigma-1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma-1}}$ $(\sigma = 1, \cdots, p)$. Получим

$$A\left(\varepsilon \frac{d\widetilde{\xi}_{j\sigma}}{d\tau} - \widetilde{\alpha}_{j\sigma}\widetilde{\xi}_{1\sigma} + \widetilde{\xi}_{j+1\sigma}\right) = \widetilde{B}\xi_{j\sigma} \tag{16}$$

$$(j = 1, \cdots, k_\sigma;\ \sigma = 1, \cdots, p;\ \widetilde{\xi}_{k_\sigma+1\sigma} \equiv 0).$$

Подставляя далее в (16) разложения матриц A и B по степеням ε и формальные ряды (15), получим, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε

$$\begin{gathered}
\xi^{[0]}_{j+1\sigma} = U\xi^{[0]}_{j\sigma} + \alpha^{[0]}_{j\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma},\\
\xi^{[1]}_{j+1\sigma} = U\xi^{[1]}_{j\sigma} + \alpha^{[1]}_{j\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} + \alpha^{[0]}_{j\sigma}\,\xi^{[1]}_{1\sigma} + d^{[0]}_{j\sigma},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi^{[k]}_{j+1\sigma} = U\xi^{[k]}_{j\sigma} + \alpha^{[k]}_{j\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} + \alpha^{[0]}_{j\sigma}\,\xi^{[k]}_{1\sigma} + d^{[k-1]}_{j\sigma},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{17}$$

$$(j = 1, \cdots, k_\sigma;\ \xi^{[k]}_{k_\sigma+1\sigma} \equiv 0).$$

Здесь

$$d^{[0]}_{j\sigma} = A_0^{-1}\,[B_1\,\xi^{[0]}_{j\sigma} + A_1\,(\alpha^{[0]}_{j\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} - \xi^{[0]}_{j+1\sigma})] - \frac{d\xi^{[0]}_{j\sigma}}{d\tau},$$

$$d^{[1]}_{j\sigma} = A_0^{-1}\Big[B_1\,\xi^{[1]}_{j\sigma} + B_2\,\xi^{[0]}_{j\sigma} + A_2\,(\alpha^{[0]}_{j\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} - \xi^{[0]}_{j+1\sigma}) +$$
$$A_1\left(\alpha^{[1]}_{j\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} + \alpha^{[0]}_{j\sigma}\xi^{[1]}_{1\sigma} - \xi^{[1]}_{j+1\sigma} - \frac{d\xi^{[0]}_{j\sigma}}{d\tau}\right)\Big] + \alpha^{[1]}_{j\sigma}\,\xi^{[1]}_{1\sigma} - \frac{d\xi^{[1]}_{j\sigma}}{d\tau},$$

и вообще

$$d^{[k-1]}_{j\sigma} = A_0^{-1}\Big[B_1\,\xi^{[k-1]}_{j\sigma} + \cdots + B_k\,\xi^{[0]}_{j\sigma} + A_k\,(\alpha^{[0]}_{j\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} - \xi^{[0]}_{j+1\sigma}) +$$
$$+ A_{k-1}\left(\alpha^{[1]}_{j\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} + \alpha^{[0]}_{j\sigma}\,\xi^{[1]}_{1\sigma} - \xi^{[1]}_{j+1\sigma} - \frac{d\xi^{[0]}_{j\sigma}}{d\tau}\right) + \cdots$$
$$\cdots + A_1\left(\alpha^{[k-1]}_{j\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} + \cdots + \alpha^{[0]}_{j\sigma}\,\xi^{[k-1]}_{1\sigma} - \xi^{[k-1]}_{j+1\sigma} - \frac{d\xi^{[k-2]}_{j\sigma}}{d\tau}\right)\Big] +$$
$$+ \alpha^{[k-1]}_{j\sigma}\,\xi^{[1]}_{1\sigma} + \cdots + \alpha^{[1]}_{j\sigma}\,\xi^{[k-1]}_{1\sigma} - \frac{d\xi^{[k-1]}_{j\sigma}}{d\tau}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при соответствующем выборе членов рядов (15), матричные соотношения (17) выполняются тождественно.

Первое соотношение (17) в развернутом виде представляется так:

$$\begin{gathered}
\xi^{[0]}_{2\sigma} = U\xi^{[0]}_{1\sigma} + \alpha^{[0]}_{1\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma},\\
\xi^{[0]}_{3\sigma} = U\,\xi^{[0]}_{2\sigma} + \alpha^{[0]}_{2\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi^{[0]}_{k_\sigma} = U\xi^{[0]}_{k_\sigma-1\sigma} + \alpha^{[0]}_{k_\sigma-1}\,\xi^{[0]}_{1\sigma},
\end{gathered} \tag{18}$$

$$0 = U\xi_{k_\sigma\sigma}^{[0]} + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]}.$$

Равенства (18) умножим слева соответственно на $U^{k_\sigma-1}$, $U^{k_\sigma-2}, \cdots$ $\cdots$, U, E_n и сложим. Получим

$$(U^{k_\sigma} + \alpha_{1\sigma}^{[0]}\,U^{k_\sigma-1} + \cdots + \alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[0]}\,U + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[0]}\,E_n)\,\xi_{1\sigma}^{[0]} = 0. \tag{19}$$

Заменив последнее равенство системы (18) равенством (19), далее вместо этой системы будем рассматривать эквивалентную ей систему

$$\varphi_\sigma(U)\,\xi_{1\sigma}^{[0]} = 0, \tag{20}$$

$$\xi_{j+1\sigma}^{[0]} = U\xi_{j\sigma}^{[0]} + \alpha_{j\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} \quad (j = 1,\ 2, \cdots, k_\sigma - 1),$$

где

$$\varphi_\sigma(\lambda) = \lambda^{k_\sigma} + \alpha_{1\sigma}^{[0]}\,\lambda^{k_\sigma-1} + \cdots + \alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[0]}\,\lambda + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[0]}.$$

Тем же путем преобразуем $k+1$-ое соотношение (17), которое в развернутом виде представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\xi_{2\sigma}^{[k]} &= U\xi_{1\sigma}^{[k]} + \alpha_{1\sigma}^{[k]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} + \alpha_{1\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[k]} + d_{1\sigma}^{[k-1]},\\
\xi_{3\sigma}^{[k]} &= U\,\xi_{2\sigma}^{[k]} + \alpha_{2\sigma}^{[k]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} + \alpha_{2\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[k]} + d_{2\sigma}^{[k-1]},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad\qquad (21)\\
\xi_{k_\sigma\sigma}^{[k]} &= U\xi_{k_\sigma-1\sigma}^{[k]} + \alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[k]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} + \alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[k]} + d_{k_\sigma-1\sigma}^{[k-1]},\\
0 &= U\,\xi_{k_\sigma\sigma}^{[k]} + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[k]} + d_{k_\sigma\sigma}^{[k-1]}.
\end{aligned}$$

Умножим эти равенства слева соответственно на $U^{k_\sigma-1}$, $U^{k_\sigma-2}, \cdots$ $\cdots$, U, E_n и сложим. Будем иметь

$$(U^{k_\sigma} + \alpha_{1\sigma}^{[0]}\,U^{k_\sigma-1} + \alpha_{2\sigma}^{[0]}\,U^{k_\sigma-2} + \cdots + \alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[0]}\,U + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[0]}\,E_n)\,\xi_{1\sigma}^{[k]} =$$

$$= -(\alpha_{1\sigma}^{[k]}\,U^{k_\sigma-1} + \alpha_{2\sigma}^{[k]}\,U^{k_\sigma-2} + \cdots + \alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[k]}U + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]}\,E_n)\,\xi_{1\sigma}^{[0]} + D_\sigma^{[k-1]},$$

где

$$D_\sigma^{[k-1]} = -\sum_{\nu=1}^{k_\sigma} U^{k_\sigma-\nu}d_{\nu\sigma}.$$

Таким образом, вместо системы (21) можем рассматривать эквивалентную ей систему

$$\varphi_\sigma(U)\,\xi_{1\sigma}^{[k]} = -(\alpha_{1\sigma}^{[k]}\,U^{k_\sigma-1} + \alpha_{2\sigma}^{[k]}\,U^{k_\sigma-2} + \cdots + \alpha_{k_\sigma-1}^{[k]}\,U + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]}\,E_n)\,\xi_{1\sigma}^{[0]} +$$

$$+ D_\sigma^{[k-1]}, \quad \xi_{j+1\sigma}^{[k]} = U\xi_{j\sigma}^{[k]} + \alpha_{j\sigma}^{[k]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} + \alpha_{1\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[k]} + d_{j\sigma}^{[k-1]} \tag{22}$$

$$(j = 1,\ 2, \cdots, k_\sigma - 1).$$

Покажем, как, используя полученные соотношения, построить члены рядов (15).

Положим

$$\xi_{1\sigma}^{[0]} = K_\sigma a_\sigma, \tag{23}$$

где a_σ — некоторая столбцевая матрица типа $k_\sigma \times 1$. Тогда первое равенство (20) с помощью (3) и (4) можно преобразовать к виду

$$K_\sigma \varphi_\sigma(\Lambda_\sigma) a_\sigma = 0. \tag{24}$$

Так как инвариантное подпространство R_σ, соответствующее группе σ собственных чисел матрицы U—циклическое, то минимальный аннулирующий многочлен этого подпространства является многочленом степени K_σ, коэффиценты которого определяются по формулам Вьета:

$$\psi_\sigma(\lambda) = \lambda^{k_\sigma} + \alpha_{1\sigma}\lambda^{k_\sigma-1} + \cdots + \alpha_{k_\sigma-1\sigma}\lambda + \alpha_{k_\sigma\sigma},$$

$$\alpha_{1\sigma} = -(\lambda_1^{(\sigma)} + \cdots + \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}),$$

$$\alpha_{2\sigma} = \lambda_1^{(\sigma)}\lambda_2^{(\sigma)} + \cdots + \lambda_{k_\sigma-1}^{(\sigma)}\lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{k_\sigma\sigma} = (-1)^{k_\sigma}\lambda_1^{(\sigma)}\cdot\ldots\cdot\lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}.$$

Примем

$$\alpha_{j\sigma}^{[0]} \equiv \alpha_{j\sigma}.$$

Тогда $\varphi_\sigma(\lambda) \equiv \psi_\sigma(\lambda)$ и, значит, согласно лемме 1 $\varphi_\sigma(\Lambda_\sigma) = \psi_\sigma(\Lambda_\sigma) = 0$. В этих условиях равенство (24) выполняется тождественно.

Допустим ,что уже найдены $\xi_{j\sigma}^{[i]}$, $\alpha_{j\sigma}^{[i]}$ ($j=1,\cdots,k_\sigma$; $i=0,1,\cdots,k-1$). Определим $\xi_{j\sigma}^{[k]}$, $\alpha_{j\sigma}^{[k]}$ ($j=1,\cdots,k_\sigma$).

Пользуясь равенствами (3) и (23) и введя в рассмотрение блочные матрицы

$$K = (K_1 \cdots K_p),\ \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_p \end{pmatrix},\quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix},$$

первое равенство (22) можно представить в виде

$$K\varphi_\sigma(\Lambda) M\xi_{1\sigma}^{[k]} = -K_\sigma(\alpha_{1\sigma}^{[k]}\Lambda_\sigma^{k_\sigma-1} + \alpha_{2\sigma}^{[k]}\Lambda_\sigma^{k_\sigma-2} + \cdots$$
$$+ \alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[k]}\Lambda_\sigma + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]}E_{k_\sigma}) a_\sigma + D_\sigma^{[k-1]}.$$

Отсюда

$$\varphi_\sigma(\Lambda) Q_\sigma^{[k]} = -MK_\sigma(\alpha_{1\sigma}^{[k]}\Lambda_\sigma^{[k_\sigma-1]} + \alpha_{2\sigma}^{[k]}\Lambda_\sigma^{k_\sigma-2} + \cdots \tag{25}$$
$$+ \alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[k]}\Lambda_\sigma + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]}E_{k_\sigma}) a_\sigma + MD_\sigma^{[k-1]}.$$

Здесь

$$Q_\sigma^{[k]} = M\xi_{1\sigma}^{[k]} = \begin{pmatrix} Q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ Q_{p\sigma}^{[k]} \end{pmatrix},\quad Q_{s\sigma}^{[k]} = M_s\xi_{1\sigma}^{[k]}. \tag{26}$$

Равенство (25) распадается на p независимых матричных равенств

$$\varphi_\sigma(\Lambda_s) Q_{s\sigma}^{[k]} = -M_sK_\sigma(\alpha_{1\sigma}^{[k]}\Lambda_\sigma^{k_\sigma-1} + \alpha_{2\sigma}^{[k]}\Lambda_\sigma^{k_\sigma-2} + \cdots$$
$$+ \alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[k]}\Lambda_\sigma + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]}E_{k_\sigma}) a_\sigma + M_sD_\sigma^{[k-1]} \quad (s=1,\cdots,p). \tag{27}$$

При $s \neq \sigma$ $M_s K_\sigma = 0$, а $\varphi_\sigma(\Lambda_s)$, в силу условия (2),—невырожденная матрица. Поэтому

$$Q_{s\sigma}^{[k]} = \varphi_\sigma^{-1}(\Lambda_s)\, M_s D_\sigma^{[k-1]} \qquad (s \neq \sigma). \tag{28}$$

При $s = \sigma$ $M_\sigma K_\sigma = E_{k_\sigma}$, а $\varphi_\sigma(\Lambda_\sigma) = 0$. Поэтому

$$(\alpha_{1\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma^{k_\sigma - 1} + \alpha_{2\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma^{k_\sigma - 2} + \cdots + \alpha_{k_\sigma - 1, \sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma + \alpha_{k_\sigma \sigma}^{[k]} E_{k_\sigma})\, a_\sigma = M_\sigma D_\sigma^{[k-1]}$$

или

$$H_\sigma \alpha_\sigma^{[k]} = M_\sigma D_\sigma^{[k-1]}, \tag{29}$$

где

$$H_\sigma = (\Lambda_\sigma^{k_\sigma - 1} a_\sigma \Lambda_\sigma^{k_\sigma - 2} a_\sigma \cdots a_\sigma), \qquad \alpha_\sigma^{[k]} = \begin{pmatrix} \alpha_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ \alpha_{k_\sigma \sigma}^{[k]} \end{pmatrix}.$$

Так как подпространство R_σ — циклическое, то согласно лемме 2 при соответствующем выборе столбцевой матрицы a_σ, столбцы матрицы H_σ будут линейно независимы. Пусть a_σ выбрана из этого условия и столбцы матрицы H линейно независимы. Тогда H_σ как квадратная матрица с линейно независимыми столбцами — невырожденная матрица. Учитывая это, из (29) находим

$$\alpha_\sigma^{[k]} = H_\sigma^{-1} M_\sigma D_\sigma^{[k-1]} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{30}$$

Неопределенной осталась лишь субматрица $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ матрицы $Q_\sigma^{[k]}$. Из вышеизложенного ясно, что в качестве $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ может быть взята произвольная нужное число раз дифференцируемая квадратная матрица порядка k_σ. В частности, можно принять $Q_{\sigma\sigma}^{[k]} = 0$.

Зная $Q_\sigma^{[k]}$, легко получить $\xi_{1\sigma}^{[k]}$ по формуле

$$\xi_{1\sigma}^{[k]} = K Q_\sigma^{[k]}. \tag{31}$$

Остальные столбцевые матрицы $\xi_{j\sigma}^{[k]}$ $(j = 2, 3, \cdots, k_\sigma)$ определяются соответствующими равенствами (22).

Итак, указанным путем можно последовательно определить члены рядов (15), с помощью которых представляется формальное решение уравнения (1) в форме (13), (14). Теорема доказана.

Ниже рассмотрим некоторые частные случаи.

4°. Случай простых собственных чисел матрицы U. Если в промежутке $[0, L]$ все собственные числа матрицы U остаются простыми, то, оставляя в каждой группе по одному собственному числу, будем иметь

$$|\lambda_\sigma(\tau) - \lambda_s(\tau)| > c > 0 \quad (s \neq \sigma;\ s, \sigma = 1, \cdots, n).$$

В соответствии с теоремой п. 3 решение системы (1) может быть представлено равенствами

$$x = \sum_{\sigma=1}^{n} \tilde{\xi}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon)\, q_\sigma, \quad \frac{dq_\sigma}{dt} + \tilde{\alpha}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon)\, q_\sigma = 0 \quad (\sigma = 1, \cdots, n).$$

В формуле (23) в данном случае a_σ—скалярная величина. Положив $a_\sigma = 1$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$, будем иметь

$$\xi_{\sigma}^{[0]} = K_\sigma \quad (\sigma = 1, \cdots, n).$$

Далее, так как теперь $\varphi_\sigma(\lambda) = \lambda - \lambda_\sigma$, то

$$Q_{s\sigma}^{[k]} = \frac{1}{\lambda_s - \lambda_\sigma} M_s D_\sigma^{[k-1]} \quad (s \neq \sigma; \quad k=1, 2, \cdots),$$

и

$$\xi_{\sigma}^{[k]} = \sum_{s \neq \sigma} \frac{P_s}{\lambda_s - \lambda_\sigma} D_\sigma^{[k-1]} + K_\sigma Q_{\sigma\sigma}^{[k]}.$$

Наконец $\lambda_{1\sigma}^{[0]} = -\lambda_\sigma$ и, поскольку $H_\sigma = a_\sigma = 1$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$, $\alpha_\sigma^{[k]} = M_\sigma D_\sigma^{[k-1]}$.

5°. **Система уравнений с постоянными коэффициентами.** Если коэффициенты системы (1) не зависят от τ, то изложенный метод приводит к точному расщеплению системы (1) на независимые линейные дифференциальные уравнения меньшего порядка. Действительно, рассматривая систему

$$A \frac{dx}{dt} = Bx, \tag{32}$$

где A и B — постоянные матрицы порядка n ($\det A \neq 0$), будем иметь следующее.

В данном случае $U = A^{-1}B$ — постоянная матрица с постоянными собственными числами. Поэтому K, Λ, M — также постоянные матрицы. Следовательно постоянными будут и величины исходного приближения $\alpha_{j\sigma}^{[0]}$ и $\xi_{j\sigma}^{[0]}$. Учитывая это и полагая $Q_{\sigma\sigma}^{[k]} = 0$ $(\sigma = 1, \cdots, p;\ k=1,2,\cdots)$, из (28) и (30) последовательно при $k = 1, 2, \cdots$ получим

$$Q_{s\sigma}^{[k]} = 0, \quad \xi_{j\sigma}^{[k]} = 0, \quad \alpha_{j\sigma}^{[k]} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Таким образом

$$\bar{\xi}_{j\sigma} = \xi_{j\sigma}^{[0]}, \quad \bar{\alpha}_{j\sigma} = \alpha_{j\sigma}^{[0]} = \alpha_{j\sigma} \quad (\sigma = 1, \cdots, p;\ j = 1, \cdots, k_\sigma),$$

и поэтому решение системы (32) представляется в виде

$$x = \sum_{\sigma=1}^{p} \left(\xi_{1\sigma}^{[0]} \frac{d^{k_\sigma - 1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 1}} + \xi_{2\sigma}^{[0]} \frac{d^{k_\sigma - 2} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 2}} + \cdots + \xi_{k_\sigma \sigma}^{[0]} q_\sigma \right), \tag{33}$$

$$\frac{d^{k_\sigma} q_\sigma}{dt^{k_\sigma}} + \alpha_{1\sigma} \frac{d^{k_\sigma - 1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 1}} + \cdots + \alpha_{k_\sigma - 1\sigma} \frac{dq_\sigma}{dt} + \alpha_{k_\sigma \sigma} q_\sigma = 0. \tag{34}$$

Как видим, в данном случае преобразование (33) приводит к точному расщеплению системы (32) на независимые линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (34).

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило 15.II.1969

Կ. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ. Գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի մի ֆորմալ ձևափոխություն *(ամփոփում)*

Հոդվածում նկարագրվում է մի ձևական պրոցես, որը առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմը բերում է ճեղքված տեսքի։

Ի տարբերություն ճեղքման հայտնի մեթոդներից այստեղ բերվում է մի մեթոդ, որը հնարավորություն է տալիս դիտարկվող սիստեմը բերել առաջին կամ ավելի բարձր կարգի իրարից անկախ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի, ընդ որում դրանցից յուրաքանչյուրը համապատասխանում է նախնական սիստեմի գործակիցների մատրիցի սեփական արժեքների մի որևէ մեկուսացված խմբի։

K. A. ABGARIAN. *A formal transformation of the system of linear differential equations* (summary)

A process of transforming the system of linear differential equations at the first order to the splitted form is described. In contrast with the known methods of splitting of such systems the method proposed here permits to transform the system considered to a system of independent linear differential equations of the first or higher order corresponding to isolated groups of eigenvalues of the matrix of coefficients of the original system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. А. Абгарян.* Приведение квадратной матрицы к квазидиагональному виду и разложение ее на составляющие, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 2, 1965.
2. *К. А. Абгарян.* Метод асимптотического расщепления системы линейных дифференциальных уравнений, Известия АН АрмССР, серия „Математика", 1, № 2, 1966.
3. *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц, Москва, „Наука", 1966.