

HERBERT ZIEZOLD

ÜBER DIE ECKENANZAHL ZUFÄLLIGER KONVEXER  
 POLYGONE

§ 1. Einleitung

In den Arbeiten [2], [3] und [4] betrachten A. Rényi und R. Sulanke zufällige konvexe Polygone, die in [2] und [3] gleich der konvexen Hülle von  $n$  zufälligen Punkten (der euklidischen Ebene) sind, in [4] aber gleich demjenigen von  $n$  zufälligen Geraden erzeugten Polygon, das einen ausgezeichneten Punkt, zum Beispiel den Ursprung enthält. Sie erhalten in ihren asymptotischen Formeln für den Erwartungswert der Eckenanzahl der zufälligen konvexen Polygone in [2] und [4] bei analogen Wahrscheinlichkeitsverteilungen in erster Näherung im wesentlichen dasselbe Ergebnis. Diese Tatsache führte mich dazu, die Ergebnisse der Arbeit [4] mit Hilfe einer Korrelation direkt in Aussagen über die konvexe Hülle von  $n$  zufälligen Punkten zu transformieren, wie im Abschnitt 2.5 dieser Arbeit ausgeführt ist. Danach waren die Sätze des § 3 naheliegend, die zusammen mit dem Dualitätssatz erklären, warum sich in den Arbeiten [2] und [4] für entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilungen dieselben Anfangsglieder der asymptotischen Formeln ergeben müssen.

§ 2. Der Dualitätssatz

2.1 *Die Abbildung  $\alpha$ .* Diejenige Abbildung, die jedem Punkt  $(x_0, x_1, x_2)$  eines zweidimensionalen, reellen, projektiven Raumes  $\Pi^2$  die Gerade mit denselben projektiven Koordinaten zuordnet, ist bekanntlich eine Korrelation (G. Pickert [1], S. 309f.). Bezeichnen wir diese Abbildung mit  $\alpha$ !

Es seien  $j$  und  $j'$  Einbettungen des zweidimensionalen, euklidischen Raumes  $R^2$  in den  $\Pi^2$ , definiert durch  $j(x_1, x_2) = (1, x_1, x_2)$  bzw.  $j'(x_1, x_2) = (-1, x_1, x_2)$ . Diese Einbettungen induzieren Abbildungen des  $R^2$  auf die Geraden des  $\pi^2$  (ausschließlich der uneigentlichen Geraden), die wir mit denselben Symbolen  $j$  bzw.  $j'$  bezeichnen.

Im folgenden werden wir die Abbildung  $\alpha := (j')^{-1} \circ \alpha \circ j | R^2 - \{0\}$  betrachten. Sie bildet  $R^2 - \{0\}$  auf die Menge derjenigen Geraden des  $R^2$  ab, die nicht durch den Ursprung 0 gehen. Für  $(x_1, x_2) \in R^2 - \{0\}$  lautet die die Gerade  $\alpha(x_1, x_2)$  definierende Gleichung

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 = 1.$$

Die zugehörigen, sich aus der Hesseschen Normalform ergebenden Geradenkoordinaten  $p, \varphi$  sind

$$p(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} \operatorname{Arccot} \frac{x_1}{x_2} & \text{für } x_2 > 0 \\ \pi + \operatorname{Arccot} \frac{x_1}{x_2} & \text{für } x_2 < 0. \end{cases}$$

2.2 *Transformation des Lebesgue—bzw. des euklidisch invarianten Geradenmaßes.* Identifizieren wir die Geraden mit ihren Koordinatenpaaren  $(p, \varphi)$ , so ist also  $x$  eine Abbildung von  $R^2 - \{0\}$  auf  $]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[$ . Da  $x$  und  $x^{-1}$  stetig sind, in  $]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[$  sei die übliche Topologie (Oberfläche eines Zylinders!) betrachtet, sind sie meßbar und es gelten die Transformationsformeln

$$dx_1 dx_2 = p^{-3} dp d\varphi \quad (1)$$

$$dp d\varphi = (x_1^2 + x_2^2)^{-3/2} dx_1 dx_2. \quad (2)$$

2.3 *Abbildung konvexer Bereiche.* Mit  $H(g)$  oder auch  $H(p, \varphi)$ ,  $0 < p, 0 \leq \varphi < 2\pi$ , bezeichnen wir diejenige abgeschlossene Halbebene, die von  $g$  berandet wird und den Ursprung enthält.

Elementare Überlegungen zeigen, daß eine beschränkte, konvexe, abgeschlossene Menge  $K$  (bzw.  $K - \{0\}$ , wenn  $0 \in K$ ) auf die Menge aller Geraden abgebildet wird, die die Menge

$$K^\circ = \bigcap_{(x_1, x_2) \in K - \{0\}} H(x(x_1, x_2)) \cup \bigcap_{(x_1, x_2) \in K - \{0\}} H(x(x_1, x_2))^c \quad (3)$$

nicht schneiden, einschließlich der Tangenten.

Enthält  $K$  den Ursprung in seinem Innern, so gilt

$$K^\circ = \bigcap_{(x_1, x_2) \in K - \{0\}} H(x(x_1, x_2)) \quad (4)$$

und  $K^\circ$  ist eine beschränkte, konvexe, abgeschlossene Menge, die ebenfalls den Ursprung in ihrem Innern enthält. Ist obendrein  $K$  ein  $r$ -Eck, so ist auch  $K^\circ$  ein  $r$ -Eck und es gilt

$$K^\circ = \bigcap_{i=1}^r H(x(A_i)). \quad (5)$$

wobei  $A_1, \dots, A_r$  die Ecken von  $K$  bedeuten.

Liegt der Ursprung auf dem Rand oder gar außerhalb von  $K$ , so ist  $K^\circ$  unbeschränkt. Da eine geeignete projektive Abbildung diese Menge unter Berücksichtigung der uneigentlichen Punkte in eine konvexe Menge des  $R^2$  abbildet, nenne ich  $K^\circ$  einen projektiv konvexen Bereich. Ist obendrein  $K$  ein  $r$ -Eck,  $r > 3$ , so ist  $K^\circ$  ein projektiv konvexes  $r$ -Eck (Abb. 1) und es gilt

$$K^\circ = \bigcap_{i=1}^r H(x(A_i)) \cup \bigcap_{i=1}^r H(x(A_i))^c. \quad (6)$$

In der Theorie der topologischen Vektorräume nennt man  $K^\circ$ , falls  $0 \in K$ , die zu  $K$  polare Menge bezüglich der skalaren Multiplikation  $x_1 z_1 + \dots + x_n z_n$ .

2.4 *Der Dualitätssatz für die Eckenanzahl zufälliger konvexer Polygone.* Wir betrachten nur Wahrscheinlichkeiten, die totalstetig bezüglich des Lebesgue- bzw. des euklidisch invarianten Geradenmaßes sind.

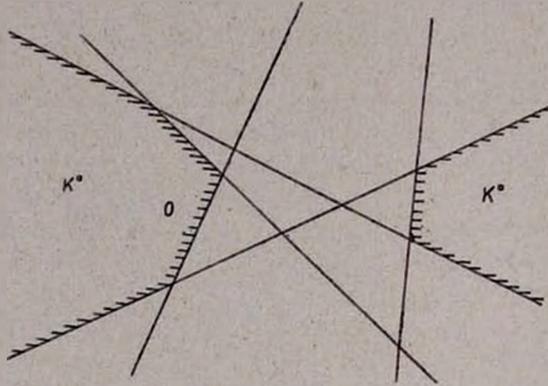


Abb. 1.

Es bezeichne  $\Pi(Q_1, \dots, Q_n)$  die konvexe Hülle der  $n$  Punkte  $Q_i \in R^2$ ,  $i=1, \dots, n$ , und  $\bar{\Pi}(g_1, \dots, g_n)$  (bzw.  $\bar{\Pi}^*(g_1, \dots, g_n)$ ) das von den  $n$  Geraden  $g_i$ ,  $0 \notin g_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , erzeugte, konvexe (bzw. projektiv konvexe) Polygon, das den Ursprung enthält, d. h.

$$\bar{\Pi}(g_1, \dots, g_n) = \bigcap_{i=1}^n H(g_i) \quad (7)$$

$$\bar{\Pi}^*(g_1, \dots, g_n) = \bigcap_{i=1}^n H(g_i) \cup \bigcap_{i=1}^n H(g_i)^c. \quad (8)$$

Die Eckenanzahlen dieser Polygone bezeichnen wir entsprechend mit

$$X_n(Q_1, \dots, Q_n), \tilde{X}(g_1, \dots, g_n), \tilde{X}_n^*(g_1, \dots, g_n).$$

Aus den Überlegungen des vorigen Abschnitts folgt unmittelbar, daß  $\pi(Q_1, \dots, Q_n)^\circ$  identisch ist mit  $\bar{\pi}^*(x(Q_1), \dots, x(Q_n))$ , und daher gilt  $X_n = \tilde{X}_n^\circ(x^n)$ . Damit folgt

$$E_{p^n} X_n = E_{(p^n-1)} \tilde{X}_n^*. \quad (9)$$

d. h. der

*Satz:* Der Erwartungswert der Eckenanzahl der konvexen Hülle von  $n$  unabhängigen, nach  $P$  verteilten Punkten ist gleich dem Erwartungswert der Eckenanzahl des (eventuell projektiv) konvexen Polygons, das von  $n$  unabhängigen nach  $P_{x^{-1}}$  verteilten Geraden erzeugt wird.

Renyi und Sulanke betrachten in [4] den Erwartungswert von  $\tilde{X}_n$  statt  $E\tilde{X}_n^*$ . Daher zeigen wir noch das

*Korollar:* Die im  $R^2$  definierte Wahrscheinlichkeit  $P$  besitze mindestens drei Dichtepunkte, deren konvexe Hülle der Ursprung im Innern enthält. Dann existiert ein positives  $\gamma < 1$ , so daß

$$E_{P^n} X_n = E_{(P_{\gamma^{-1}})^n} \tilde{X}_n + o(\gamma^n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

*Beweis:* Wegen (9) ist nur die Existenz eines positiven  $\gamma < 1$  zu zeigen, so daß

$$E_{(P_{\gamma^{-1}})^n} (\tilde{X}_n^* - \tilde{X}_n) = o(\gamma^n), \quad n \rightarrow \infty.$$

$\tilde{X}_n(g_1, \dots, g_n)$  ist nur für unbeschränkte Polygone  $\bar{\Pi}(g_1, \dots, g_n)$  von  $\tilde{X}_n(g_1, \dots, g_n)$  verschieden.  $\bar{\Pi}(x(Q_1), \dots, x(Q_n))$  ist aber nur dann unbeschränkt, wenn  $0 \in \text{int } \Pi(Q_1, \dots, Q_n)$  (int-interior of-Inneres von). Also folgt unter Berücksichtigung von

$$0 < \tilde{X}_n \leq \tilde{X}_n^* \leq n$$

$$0 \leq E_{(P_{\gamma^{-1}})^n} (\tilde{X}_n^* - \tilde{X}_n) \leq n P^n \{0 \in \text{int } \Pi(Q_1, \dots, Q_n)\}.$$

Es seien  $D_1, D_2, D_3$  drei verschiedene Dichtepunkte von  $P$ , deren konvexe Hülle den Ursprung im Innern enthält. Dann gibt es hinreichend kleine Umgebungen  $U_1, U_2, U_3$  von  $D_1, D_2, D_3$ , so daß aus  $(Q', Q'', Q''') \in U_1 \times U_2 \times U_3$  folgt  $0 \in \text{int } \Pi(Q', Q'', Q''')$ . Da  $D_1, D_2$  und  $D_3$  Dichtepunkte sind, ist  $\alpha = \min \{P(U_1), P(U_2), P(U_3)\} > 0$ .

Aus  $0 \in \text{int } \Pi(Q_1, \dots, Q_n)$  folgt, daß in wenigstens einer der drei Umgebungen  $U_1, U_2, U_3$  keiner der Punkte  $Q_i$  liegt. Also

$$E_{(P_{\gamma^{-1}})^n} (\tilde{X}_n^* - \tilde{X}_n) \leq \sum_{k=1}^3 P^n \sum_{i=1}^n |Q_i \notin U_k, i=1, \dots, n| \leq 3n(1-\alpha)^n$$

und hieraus folgt die Behauptung.

2.5 Anwendung des Dualitätssatzes. Mittels des eben bewiesenen Satzes lassen sich nun die Ergebnisse von Renyi und Sulanke in [2] und [4] dualisieren. Wir betrachten hier nur ein Beispiel, das den folgenden Paragraphen motivieren soll.

Es sei  $B$  ein beschränktes, konvexes, abgeschlossenes  $r$ -Eck mit Umfang  $b$ , das den Ursprung in seinem Innern enthält,  $G$  sei ein beschränktes, konvexes Gebiet mit Umfang  $l$ , das  $B$  enthält, und  $\tilde{P}$  sei die bedingte Wahrscheinlichkeit bezüglich des euklidisch invarianten Geradenmaßes in der Menge aller Geraden, die  $Q$  aber nicht  $B$  schneiden. Wir wollen diese Geradenmenge mit  $\mathcal{Q}$  bezeichnen. Renyi und Sulanke haben in [4] gezeigt, daß

$$E_{\tilde{P}^n} \tilde{X}_n = \frac{2}{3} r \log n + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Aus 2.3 folgt leicht, daß das Urbild von  $\mathcal{Q}$  vermöge  $x$  die Differenzmenge  $B^c - G^o$  der zu  $B$  bzw.  $G$  polaren Mengen  $B^o$  und  $G^o$  ist.

Bezeichnet  $1_{B^{\circ}-G^{\circ}}$  die Indikatorfunktion zu  $B^{\circ}-G^{\circ}$ , so gilt wegen  $\tilde{P}(d(p, \varphi)) = \frac{1_{B^{\circ}-G^{\circ}}(p, \varphi)}{l-b} dpd\varphi$  und (2) für  $P = \tilde{P}_x$

$$P(d(x_1, x_2)) = \frac{1_{B^{\circ}-G^{\circ}}(x_1, x_2)}{(l-b)(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} dx_1 dx_2. \quad (12)$$

Aus (11) und dem Korollar zum Dualitätssatz, angewandt auf  $P = \tilde{P}_x$ , folgt demnach, daß für die durch (12) gegebene Wahrscheinlichkeit  $P$  ebenfalls

$$E_{P^n} X_n = \frac{2}{3} r \log n + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Man erhält demnach also dasselbe Ergebnis wie für den Fall der bedingten Wahrscheinlichkeit in  $B'$ , bzw. in einem beliebigen beschränkten, konvexen  $r$ -Eck, bezüglich des Lebesguemaßes (Renyi und Sulanke [2]). Dies führte mich zu den allgemeineren Sätzen des folgenden Paragraphen.

### § 3. Verallgemeinerung von Ergebnissen von Renyi und Sulanke

#### 3.1 Zufällige konvexe Polygone in einem $r$ -Eck.

**Satz:** Es sei  $K$  ein beschränktes, konvexes  $r$ -Eck und  $P$  eine Wahrscheinlichkeit auf  $K$  mit einer Dichte  $f$ , die den folgenden Bedingungen genüge:

(i) Es gibt eine im Innern von  $K$  enthaltene, kompakte Menge  $C$ , derart daß  $f$  in  $K-C$  beschränkt ist.

(ii)  $f$  ist in den Eckpunkten  $A_1, \dots, A_r$  von  $K$  stetig und nimmt dort positive Werte an, d. h.

$$\lim_{\substack{Q \rightarrow A_i \\ Q \in K}} f(Q) = f(A_i) > 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Dann gilt für den Erwartungswert der Eckenanzahl  $X_n$  des von  $n$  unabhängigen, nach  $P$  verteilten Punkten  $Q_1, \dots, Q_n$  erzeugten Polygons  $\Pi(Q_1, \dots, Q_n)$

$$EX_n \sim \frac{2}{3} r \log n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

d. h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{EX_n}{\frac{2}{3} r \log n} = 1$ ;  $\log$  bedeutet den natürlichen Logarithmus.

Für  $f = \frac{1}{F} 1_K$ ,  $F$ -Flächeninhalt von  $K$ , erhält man als Spezialfall

den entsprechenden Satz in der Arbeit [2] von Renyi und Sulanke, während sich für  $f = (1-b)^{-1} (x_1^2 + x_2^2)^{-3/2} 1_{B^{\circ}-G^{\circ}}$ ,  $B^{\circ}$  und  $G^{\circ}$  seien wie in 2.5 die zu  $B$  bzw.  $G$  polaren Mengen, der entsprechende Satz in [4]

ergibt. Allerdings muß hier betont werden, daß in diesen speziellen Sätzen die asymptotische Entwicklung von  $EX_n$  noch mehr Glieder umfaßt als in unserm allgemeinen Fall.

*Beweis des Satzes:* Wir folgen im wesentlichen dem Gedankengang von Renyi und Sulanke in [2].

Es sei für  $1 \leq i < j < n$   $\varepsilon_{ij}(Q_1, \dots, Q_n) = 1$ , falls  $\overline{Q_i Q_j}$  eine Seite von  $\Pi(Q_1, \dots, Q_n)$  ist, andernfalls 0. Damit gilt fast sicher

$$X_n = \sum_{1 < i < j < n} \varepsilon_{ij} \tag{14}$$

und also

$$EX_n = \sum_{1 < i < j < n} E\varepsilon_{ij}. \tag{15}$$

Wegen der Invarianz der Produktwahrscheinlichkeit  $P^n$  unter Permutationen der  $Q_i$  und wegen der Existenz von Permutationen  $\tau_{ij}$  mit  $\varepsilon_{ij} \circ \tau_{ij} = \varepsilon_{j2}$  gilt  $E\varepsilon_{ij} = E\varepsilon_{j2}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , und also

$$EX_n = \binom{n}{2} E\varepsilon_{12}. \tag{16}$$

Es sei  $C$  gemäß der Voraussetzung (1) des Satzes gewählt,  $\delta'$  sei der Abstand von  $C$  zum Rand  $\partial K$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß der Ursprung 0 in  $C$  liegt. Wir bezeichnen für  $Q_1 \neq Q_2$  mit  $g(Q_1, Q_2)$  die Gerade durch  $Q_1$  und  $Q_2$  mit  $H(Q_1, Q_2)$  die abgeschlossene Halbebene, die von  $g(Q_1, Q_2)$  berandet wird und 0 enthält.

$\varepsilon_{12}(Q_1, \dots, Q_n)$  ist genau dann von Null verschieden, wenn die Punkte  $Q_3, \dots, Q_n$  entweder alle in  $H(Q_1, Q_2)$  oder alle im Komplement  $H(Q_1, Q_2)^c$  liegen. Daher ergibt die Integration über  $Q_3, \dots, Q_n$

$$EX_n = \binom{n}{2} \iint (P(H(Q_1, Q_2))^{n-2} + (1 - P(H(Q_1, Q_2)))^{n-2}) P(dQ_1) P(dQ_2). \tag{17}$$

Da jede Halbebene  $H(Q_1, Q_2)$  die  $\delta'$ -Umgebung mindestens eines Eckpunktes von  $K$  enthält und jede dieser Umgebungen aufgrund der Voraussetzung (ii) des Satzes eine positive Wahrscheinlichkeit besitzt, existiert ein  $\alpha_1 > 0$  mit

$$P(H(Q_1, Q_2)) > \alpha_1, \text{ für alle } (Q_1, Q_2) \in K \times K. \tag{18}$$

Hiermit folgt für ein beliebiges positives  $\alpha_2 < \alpha_1$

$$EX_n = \binom{n}{2} \iint P(H(Q_1, Q_2))^{n-2} P(dQ_1) P(dQ_2) + o((1 - \alpha_2)^n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Zur Auswertung des ersten Summanden zerlegen wir den Integrationsbereich wie folgt:

Es bezeichne  $a_i$  die Länge der Seite  $\overline{A_i A_{i+1}}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $A_{r+1} = A_1$  usw. Ferner sei  $\delta'' > 0$  so klein, daß aus  $|A_i Q| < \delta''$ ,  $Q \in K$ , folgt

$|f(A_i) - f(Q)| < \frac{1}{2} f(A_i)$ . Wir setzen  $\gamma = \frac{1}{2} \min \{ \delta', \delta'', a_1, \dots, a_r \}$ .

Mit  $A_i$  (bzw.  $A_i'$ ) bezeichnen wir denjenigen Punkt auf  $\overline{A_{i-1}A_i}$  (bzw.  $\overline{A_iA_{i+1}}$ ), der den Abstand  $\gamma$  von  $A_i$  hat (Abb. 2). Für  $i=1, \dots, r$  definieren wir:

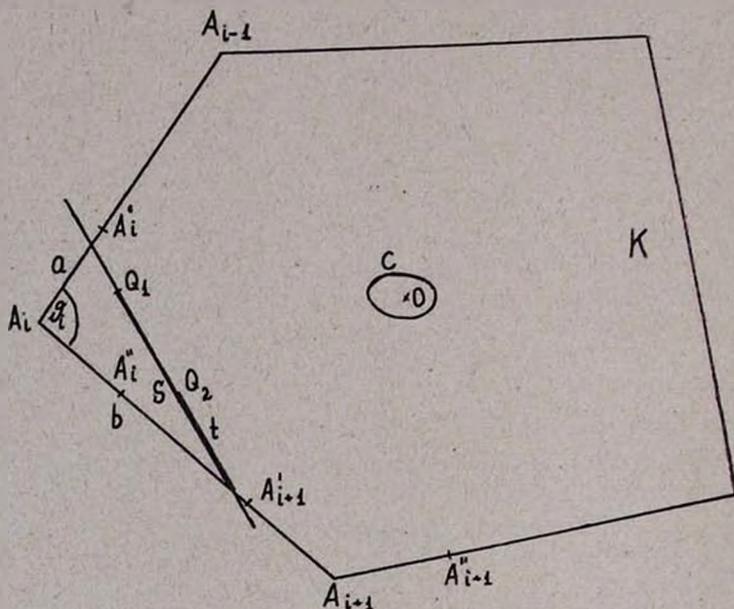


Abb. 2.

$$C_i = \{(Q_1, Q_2) \in K \times K : g(Q_1, Q_2) \text{ trifft } \overline{A_{i-1}A_i} \text{ und } \overline{A_iA_{i+1}} \text{ oder } \overline{A_{i-1}A_i'} \text{ und } \overline{A_iA_i''}\}$$

$$D_i = \{(Q_1, Q_2) \in K \times K : g(Q_1, Q_2) \text{ trifft } \overline{A_iA_i'} \text{ und } \overline{A_{i+1}A_{i+1}''}\}.$$

Für ein Punktepaar  $(Q_1, Q_2) \in K \times K - \sum_{i=1}^r (C_i \cup D_i)$  gilt aufgrund elementarer Überlegungen  $P(H(Q_1, Q_2)) > 1 - \alpha_3$ , wobei  $\alpha_3 = \min_{i=1, \dots, r} P(\Pi(A_i, A_i', A_i'')) > 0$ . Daher folgt für ein beliebiges positives  $\alpha_3 < \min \{ \alpha_2, \alpha_3' \}$  aus (19)

$$E \chi_n = \binom{n}{2} \sum_{i=1}^r \iint_{C_i} P(H(Q_1, Q_2))^{n-2} P(dQ_1) P(dQ_2) + \binom{n}{2} \sum_{i=1}^r \iint_{D_i} P(H(Q_1, Q_2))^{n-2} P(dQ_1) P(dQ_2) + o((1 - \alpha_3)^n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Wir untersuchen zunächst die Integrale über  $C_i$ ,  $i=1, \dots, r$ . Bei vorgegebenem  $i$  sei für  $Q_1 \neq Q_2$  a (bzw. b, s, t) der Abstand des

Schnittpunktes von  $g(Q_1, Q_2)$  mit  $\overline{A_i A_{i-1}}$  (bzw.  $\overline{A_i A_{i+1}}$ ) von  $A_i$  (bzw.  $A_i, Q_1, Q_2$ ) (Abb. 2). Jedem  $(Q_1, Q_2) \in C_i$  ist so eindeutig ein Quadrupel  $(a, b, s, t)$  zugeordnet, das wir mit  $T(Q_1, Q_2)$  oder auch  $T(x_1, y_1, x_2, y_2)$  bezeichnen. Die Funktionaldeterminante dieser Transformation ergibt sich zu

$$\frac{\partial (x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial (a, b, s, t)} = \frac{ab(t-s) \sin^2 \vartheta_i}{l^3},$$

wobei  $\vartheta_i$  der Winkel bei  $A_i$  bedeutet und  $l = (a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta_i)^{1/2}$ . Setzen wir schließlich noch  $\bar{f}(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_1, y_1) f(x_2, y_2)$ , so folgt

$$\begin{aligned} & \iint_{C_i} P(H(x_1, y_1, x_2, y_2))^{n-2} f(x_1, y_1) f(x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \\ &= \iint_{T(C_i)} P(H(T^{-1}(a, b, s, t)))^{n-2} \bar{f} \circ T^{-1}(a, b, s, t) \frac{ab|t-s| \sin^2 \vartheta_i}{l^3} dadb ds dt \\ &= \iint_{\substack{[0, \gamma] \times [0, a_i] \\ \cup [7, a_{i-1}] \times [0, \gamma]}} P(H'(a, b))^{n-2} \frac{ab \sin^2 \vartheta_i}{l^3} \int_0^1 \int_0^1 \bar{f} \circ T^{-1}(a, b, s, t) |t-s| ds dt dadb \end{aligned}$$

wobei wir  $H'(a, b) = H(T^{-1}(a, b, s, t))$  setzen können, da diese Halbebenen von  $s$  und  $t$  unabhängig sind.

Wir setzen kürzshalber  $\eta = f(A_i)$  und wählen zu positivem  $\varepsilon \leq \frac{\eta}{2}$  ein positives  $\delta \leq \gamma$ , so daß aus  $|QA_i| < \delta$ ,  $Q \in K$ , folgt  $|\eta - f(Q)| < \varepsilon$ . Wir zerlegen in (21) die Integration über  $a$  und  $b$  folgendermaßen

$$I = \int_0^\gamma \int_0^{a_i} + \int_\gamma^{a_{i-1}} \int_0^\gamma = \int_0^\delta \int_0^\delta + \int_0^\delta \int_\delta^\gamma + \int_\delta^{a_{i-1}} \int_0^\gamma + \int_0^\gamma \int_\gamma^{a_i} \tag{22}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Zunächst schätzen wir  $I_1$  ab.

Für  $a \leq \delta, b \leq \delta$  gilt  $P(H'(a, b)) \leq 1 - \frac{\eta - \varepsilon}{2} ab \sin \vartheta_i$  und  $f \circ T^{-1}(a, b, s, t) \leq (\eta + \varepsilon)^2$ , also folgt unter Beachtung von  $\int_0^1 \int_0^1 |t-s| ds dt = \frac{1}{3} l^3$

$$I_1 \leq \int_0^\delta \int_0^\delta \left(1 - \frac{\eta - \varepsilon}{2} ab \sin \vartheta_i\right)^{n-2} (\eta + \varepsilon)^2 \frac{ab}{3} \sin^2 \vartheta_i dadb =$$

$$= \left(\frac{\eta + \varepsilon}{\eta - \varepsilon}\right)^2 \frac{4}{3} \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} (1 - xy)^{n-2} xy dx dy,$$

wobei  $x_0 = y_0 = \delta \left(\frac{\eta - \varepsilon}{2} \sin \vartheta_i\right)^{1/2}$ .

Analog zeigt man

$$I_1 \geq \left( \frac{\eta - \varepsilon}{\eta + \varepsilon} \right)^2 \frac{4}{3} \int_0^{\bar{x}_0} \int_0^{\bar{y}_0} (1 - xy)^{n-2} xy dx dy,$$

wobei  $\bar{x}_0 = \bar{y}_0 = \delta \left( \frac{\eta + \varepsilon}{2} \sin \vartheta_l \right)^{1/2}$ .

Nach Ausführung der Integration folgt asymptotische Beziehung

$$\left( \frac{\eta - \varepsilon}{\eta + \varepsilon} \right)^2 \left( \frac{2}{3} \log n + 0(1) \right) < \binom{n}{2} I_1 \leq \left( \frac{\eta + \varepsilon}{\eta - \varepsilon} \right)^2 \left( \frac{2}{3} \log n + 0(1) \right), \quad (23)$$

$n \rightarrow \infty.$

Darin sind die beiden Terme  $0(1)$  von  $\varepsilon$  abhängig und werden unendlich groß, wenn  $\varepsilon$  gegen 0 strebt.

Um  $I_2$ ,  $I_3$  und  $I_4$  abzuschätzen, sei  $d = \max |a_{i-1}, a_i|$  gesetzt und  $L = \sup_{Q \in K-C} f(Q)$ . Aufgrund der Voraussetzung (i) ist  $L < \infty$ . Elementargeometrische Betrachtungen zeigen, daß für alle Punktepaare, die zum Integrationsbereich von  $I_2$ ,  $I_3$  und  $I_4$  gehören, gilt

$$1 - P(H'(a, b)) > \frac{\eta}{2} \frac{ab \sin \vartheta_l}{2} \frac{\gamma}{d}.$$

Damit folgt zum Beispiel für  $I_2$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_0^{\bar{x}} \int_0^{\bar{y}} \left( 1 - \frac{\eta \gamma}{4d} ab \sin \vartheta_l \right)^{n-2} L^2 \frac{ab}{3} \sin^2 \vartheta_l da db \\ &= \frac{16}{3} \left( \frac{Ld}{\eta \gamma} \right)^2 \int_0^{\bar{x}_c} \int_0^{\bar{y}_c} (1 - xy)^{n-2} xy dx dy, \quad c = \left( \frac{\eta \gamma \sin \vartheta_l}{4d} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} 0(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

das heißt

$$\binom{n}{2} I_2 \leq 0(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Analog ergeben sich dieselben asymptotischen Beziehungen für  $I_3$  und  $I_4$ .

Diese Ergebnisse zusammenfassend folgt also für  $l = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$  ebenfalls die Beziehung (23), also

$$\left( \frac{\eta - \varepsilon}{\eta + \varepsilon} \right)^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2} l}{\frac{2}{3} \log n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2} l}{\frac{2}{3} \log n} \leq \left( \frac{\eta + \varepsilon}{\eta - \varepsilon} \right)^2$$

Da dies für jedes positive  $\varepsilon \leq \frac{\eta}{2}$  gilt und  $I$  nicht von  $\varepsilon$  abhängt, folgt hieraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2} I}{\frac{2}{3} \log n} = 1,$$

das heißt

$$\binom{n}{2} \iint_{c_1} P(H(Q_1, Q_2))^{n-2} P(dQ_1) P(dQ_2) \sim \frac{2}{3} \log n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Somit sind in (20) nur noch die Integrale über  $D_i$  abzuschätzen. Für diese erhält man mit Methoden, die den obigen bis auf geringfügige Modifikationen analog sind,

$$\binom{n}{2} \iint_{D_i} P(H(Q_1, Q_2))^{n-2} P(dQ_1) P(dQ_2) \leq O(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (26)$$

(20), (25) und (26) haben zur Folge

$$EX_n \sim \frac{2}{3} r \log n, \quad n \rightarrow \infty.$$

was zu beweisen war.

**3.2 Zufällige konvexe Polygone in einem konvexen Bereich mit glattem Rand.** Analog zum vorigen Satz lassen sich aus dem folgenden Satz die entsprechenden Spezialfälle in den Arbeiten [2] und [4] von Reny und Sulanke ableiten. Man hat sich im wesentlichen nur zu überlegen, wie die Krümmung unter der Korrelation  $\times$  transformiert wird (siehe 3.3).

**Satz:** Es sei  $K$  ein beschränkter, konvexer Bereich, dessen Rand  $\partial K$  eine stetige und überall positive Krümmung  $k$  besitzt. Ferner sei auf  $K$  eine Wahrscheinlichkeit  $P$  mit einer Dichte  $f$  gegeben, die in den Randpunkten von  $K$  stetig und positiv ist. Dann gilt mit  $f_0(s) = f(Q(s))$ ,  $Q(s)$  sei der zum Bogenparameter  $s$ ,  $0 \leq s \leq l$ ,  $l = \text{Umfang von } K$ , gehörende Randpunkt von  $K$ ,

$$EX_n \sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \int_0^l (f_0(s) k(s))^{1/3} ds n^{1/3}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (27)$$

**Beweis:** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir wieder voraussetzen, daß der Ursprung  $O$  im Innern von  $K$  liegt. Zudem kann die Herleitung der Gleichung (17) im vorigen Beweis wörtlich übernommen werden. Wegen  $\alpha_1 = \inf_{Q_1, Q_2} P(H(Q_1, Q_2)) > 0$  folgt hieraus für ein beliebiges positives  $\alpha_2 < \alpha_1$

$$EX_n = \binom{n}{2} \iint P(H(Q_1, Q_2))^{n-2} P(dQ_1) P(dQ_2) + o((1-\alpha_2)^n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Die Funktionaldeterminante der durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_i &= p \cos \varphi - t_i \sin \varphi & i=1, 2 \\ y_i &= p \sin \varphi - t_i \cos \varphi \end{aligned}$$

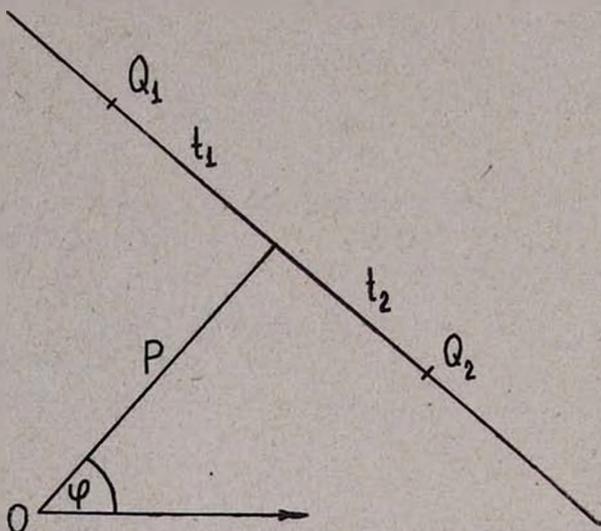


Abb. 3.

definierten Transformation  $(Q_1, Q_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) = T(p, \varphi, t_1, t_2)$  ist gleich  $t_2 - t_1$ . Also

$$EX_n = \binom{n}{2} \iint P(H'(p, \varphi))^{n-2} \iint \bar{f} \circ T(p, \varphi, t_1, t_2) |t_1 - t_2| dt_1 dt_2 + o((1-\alpha_2)^n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (29)$$

wobei wieder  $\bar{f}(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_1, y_1) f(x_2, y_2)$  und  $H'(p, \varphi) = H(T(p, \varphi, t_1, t_2))$  gesetzt sei.

Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt

$$\beta = \inf_{0 < s < 1} f_0(s) > 0 \quad \text{und} \quad r_M = \sup_{0 < s < 1} \frac{1}{k(s)} < \infty.$$

Wir wählen ein positives  $\beta < \varepsilon$ . zu einem solchen  $\varepsilon$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für Punkte  $Q \in \partial K$  und  $Q' \in K$  mit  $|QQ'| < \delta$  gilt  $|f(Q) - f(Q')| < \varepsilon$ .

Es sei  $p(\varphi)$  die Stützfunktion von  $K$ ,  $g(p(\varphi), \varphi)$  also die Tangente an  $K$  mit zweiter Koordinate  $\varphi$ , und  $Q(\varphi)$  sei der Berührungspunkt dieser Tangente. Ferner bezeichne  $S(r, \varphi)$  denjenigen Kreis mit Radius  $r > 0$ , der die Gerade  $g(p(\varphi), \varphi)$  im Punkt  $Q(\varphi)$  berührt und einen nichtleeren Durchschnitt mit dem Innern von  $K$  besitzt.  $M(r, \varphi)$  sei sein Mittelpunkt (Abb. 4),

Für  $p(\varphi) - \frac{\delta^2}{2r_M} \leq p \leq p(\varphi)$  ist die Sehne  $g(p, \varphi) \cap K$  enthalten in der Sehne  $g(p, \varphi) \cap S(r_M, \varphi)$  und daher haben die Punkte der ersteren Sehne alle einen Abstand kleiner als  $\delta$  von  $Q(\varphi)$ .

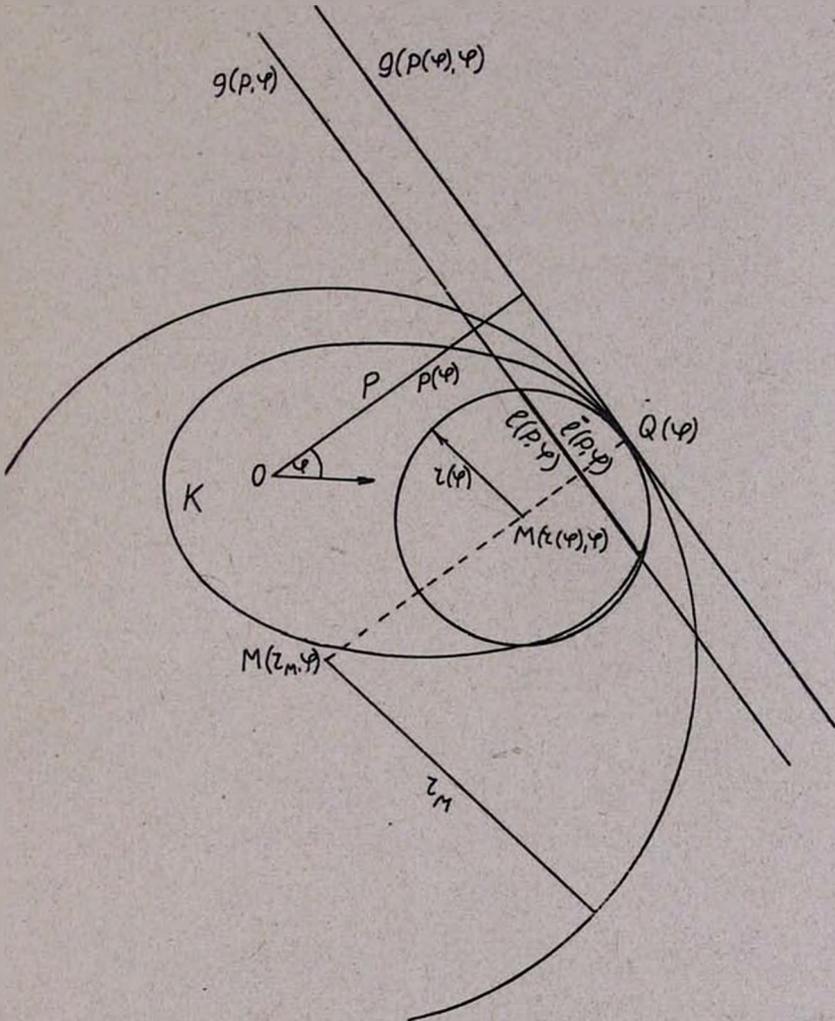


Abb. 4.

Setzen wir schließlich noch  $l(p, \varphi)$  für die Länge der Sehne  $g(p, \varphi) \cap K$  und  $F(p, \varphi)$  für den Flächeninhalt von  $H(p, \varphi) \cap K$ , so erhalten wir aus (29) für ein genügend klein gewähltes  $\alpha_3 > 0$  für  $n \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{n}{2}\right) \int_0^{2\pi} (f(Q(\varphi)) - \varepsilon)^2 \int_{p(\varphi) - \frac{\delta^2}{2r_M}}^{p(\varphi)} (1 - F(p, \varphi)(f(Q(\varphi)) + \varepsilon))^{n-2} \times \frac{l(p, \varphi)^3}{3} dp d\varphi + o((1 - \alpha_3)^n)$$

$$\ll EX_n \ll \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \binom{n}{2} \int_0^{2\pi} (f(Q(\varphi)) + \varepsilon)^2 \int_{p(\varphi) - \frac{r^2}{2r_M}}^{p(\varphi)} (1 - F(p, \varphi)(f(Q(\varphi)) - \varepsilon))^{n-2} \times \\ & \times \frac{l(p, \varphi)^2}{3} dp d\varphi + o((1 - \alpha_3)^n) \end{aligned}$$

Vergleich der Größen  $F(p, \varphi)$  und  $l(p, \varphi)$  mit den entsprechenden Größen  $\bar{F}(p, \varphi)$  und  $\bar{l}(p, \varphi)$  des Krümmungskreises  $S(r(\varphi), \varphi)$  führt mittels elementaren differentialgeometrischen Methoden zu

$$\begin{aligned} l - \bar{l} &= o((p(\varphi) - p)^{1/2}), \quad F - \bar{F} = o((p(\varphi) - p)^{3/2}), \\ & \text{für } (p(\varphi) - p) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (31)$$

gleichgradig für alle  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Führt man den Zentriwinkel  $\psi$  ein, unter dem die Sehne  $\bar{l}(p, \varphi)$  vom Krümmungsmittelpunkt  $M(r(\varphi), \varphi)$  aus erscheint, so folgt

$$\bar{l} = 2r(\varphi) \sin \frac{\psi}{2}, \quad \bar{F} = \frac{1}{2} (\psi - \sin \psi) r(\varphi)^2$$

und gleichgradig für alle  $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$p(\varphi) - p = r(\varphi) \left(1 - \cos \frac{\psi}{2}\right) = o(\psi^2), \quad \text{für } \psi \rightarrow 0,$$

also

$$l - \bar{l} = o(\psi), \quad F - \bar{F} = o(\psi^3), \quad \text{für } \psi \rightarrow 0. \quad (32)$$

Wegen  $dp = -\frac{1}{2} r(\varphi) \sin \frac{\psi}{2} d\psi$  folgt zum Beispiel für den letzten Term der obigen Beziehung (30) für hinreichend kleine  $\psi_0 > 0$  und  $\alpha_4 > 0$

$$\begin{aligned} & \binom{n}{2} \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (f(Q(\varphi)) + \varepsilon)^2 \int_0^{\psi_0} \left(1 - \frac{\psi^3}{12} r(\varphi)^2 (f(Q(\varphi)) - \varepsilon) + o(\psi^3)\right)^{n-2} \times \\ & \times \frac{1}{4} (r(\varphi)^4 \psi^4 + o(\psi^4)) d\psi d\varphi \\ & + o((1 - \alpha_4)^n), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (33)$$

Darin gelten die Beziehungen  $o(\psi^3)$  und  $o(\psi^4)$  wieder gleichgradig in  $\varphi$ . Wir substituieren im Integral

$$I_n(\varphi) = \int_0^{\psi_0} \left(1 - \frac{\psi^3}{12} r(\varphi)^2 (f(Q(\varphi)) - \varepsilon) + o(\psi^3)\right)^{n-2} (\psi^4 + o(\psi^4)) d\psi$$

$$\frac{\psi^2}{12} r(\varphi)^2 (f(Q(\varphi)) - \varepsilon) = \frac{x}{n} \text{ und erhalten mit}$$

$$\lambda(\varphi) = \frac{\psi_0^3}{12} r(\varphi)^2 (f(Q(\varphi)) - \varepsilon)$$

$$I_n(\varphi) = \int_0^{nX(\varphi)} \left(1 - \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n-2} \left(\frac{12}{nr(\varphi)^2(f(Q(\varphi)) - \varepsilon)}\right)^{5/3} \frac{x^{2/3}}{3} (1 + o(1)) dx$$

also

$$n^{5/3} I_n(\varphi) = \frac{1}{3} \left(\frac{12}{r(\varphi)^2(f(Q(\varphi)) - \varepsilon)}\right)^{5/3} \times \\ \times \int_0^{nX(\varphi)} 1_{[0, nX(\varphi)]}(x) \left(1 - \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n-2} x^{2/3} (1 + o(1)) dx.$$

$\psi_0$  können wir nachträglich noch so klein wählen, daß für  $x \leq nX(\varphi)$  gilt  $\left|o\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2n}$ . Danach ist der Integrand kleiner als  $\text{const.} \cdot e^{-x/2} x^{2/3}$

Da dies integrierbar ist, läßt sich der Lebesguesche Satz aus der Maßtheorie anwenden:

$$n^{5/3} I_n(\varphi) \rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{12}{r(\varphi)^2(f(Q(\varphi)) - \varepsilon)}\right)^{5/3} \int_0^\infty e^{-x/2} x^{2/3} dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dies gilt wieder gleichgradig für alle  $\varphi$ , so daß also (33) übergeht in

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \int_0^{2\pi} r(\varphi)^{2/3} \frac{(f(Q(\varphi)) + \varepsilon)^2}{(f(Q(\varphi)) - \varepsilon)^{5/3}} d\varphi n^{1/3} + o(n^{1/3}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Hiermit und mit (30) folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{EX_n}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \int_0^{2\pi} f(Q(\varphi))^{1/3} r(\varphi)^{2/3} d\varphi n^{1/3}} \leq \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)^2}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{5/3}}.$$

Da dies für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, kann die rechte Seite durch 1 ersetzt werden.

Analog folgt, daß der  $\liminf$  größer als 1 ist und also gilt unter Beachtung von  $d\varphi = k(s) ds$  und  $r(\varphi(s)) = \frac{1}{k(s)}$

$$EX_n \sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \int_0^l f_0(s)^{1/3} k(s)^{1/3} ds n^{1/3}, \quad n \rightarrow \infty,$$

was zu beweisen war.

3.3 *Dualisierung*. Mittels des Korollars zum Dualitätssatz lassen sich die eben bewiesenen Sätze dualisieren. Wir wollen nur den zweiten Fall näher ausführen.

*Satz:* Es sei  $\bar{K}$  ein beschränktes, konvexes Gebiet, dessen Rand eine stetige und überall positive Krümmung  $\bar{k}$  besitzt, und  $\Omega$  sei die Menge der Geraden, die  $\bar{K}$  nicht scheiden. Auf  $\Omega$  sei eine Wahrscheinlichkeit  $\bar{P}$  mit einer Dichte  $\bar{f}$  bezüglich des euklidisch invarianten Geradenmaßes definiert.  $\bar{f}$  sei in den Randgeraden von  $\Omega$ , d. h. in den Tangenten an  $\bar{K}$ , stetig und positiv. Mit  $\bar{f}_0(s)$  bezeichnen wir den Wert von  $\bar{f}$  für diejenige Tangente an  $\bar{K}$  deren Berührungspunkt die Bogenkoordinate  $s$  besitzt. Dann gilt für die Eckenanzahl  $\bar{X}_n$  des von  $n$  unabhängigen, nach  $\bar{P}$  verteilten Geraden erzeugten Polygons, das  $\bar{K}$  enthält,

$$E\bar{X}_n \sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \int_0^l \bar{f}_0(s)^{1/3} \bar{k}(s)^{2/3} ds n^{1/3}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (34)$$

*Beweis:* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $0 \in \bar{K}$  angenommen werden. Die Dichte der auf  $K = x^{-1}(\Omega)$  definierten Wahrscheinlichkeit  $\bar{P}_x$  ist gemäß 2.2 gegeben durch  $f(x_1, x_2) = \bar{f} \circ x(x_1, x_2)(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}$  und erfüllt die Voraussetzungen des Satzes in 3.2, insbesondere ist  $K$  ein beschränkter, konvexer Bereich, dessen Rand eine stetige Krümmung  $k$  besitzt. Aufgrund des Satzes in 3.2 und des Korollars zum Dualitätssatz gilt für genügend kleine, positive  $\gamma$

$$E_{\bar{P}} \bar{X}_n = E_{\bar{P}_x} X_n + o((1-\gamma)^n) \quad (35)$$

$$\sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \int_0^l f_0(\sigma)^{1/3} k(\sigma)^{1/3} d\sigma n^{1/3}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bedeutet  $p(\varphi)$  die Stützfunktion von  $\bar{K}$ , so sind die Polarkoordinaten der Randpunkte von  $K$  gegeben durch  $\left(\varphi, \frac{1}{p(\varphi)}\right)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , die Ableitung der Bogenlänge nach  $\varphi$  ist in diesen Punkten also

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \left(\frac{1}{p(\varphi)^2} + \frac{p'(\varphi)^2}{p(\varphi)^4}\right)^{1/2}$$

und die Krümmung

$$k(\sigma(\varphi)) = \frac{p(\varphi)^3(p(\varphi) + p''(\varphi))}{(p(\varphi)^2 + p'(\varphi)^2)^{3/2}}.$$

Also läßt sich das in (35) auftretende Integral folgendermaßen umwandeln

$$\begin{aligned} & \int_0^l f_0(\sigma)^{1/\beta} k(\sigma)^{1/\beta} d\sigma = \\ & = \int_0^{2\pi} (\tilde{f}_0(s(\varphi)) p(\varphi)^3)^{1/\beta} \left( \frac{p(\varphi)^3(p(\varphi) + p''(\varphi))}{(p(\varphi)^2 + p'(\varphi)^2)^{3/2}} \right)^{1/\beta} \left( \frac{1}{p(\varphi)^2} + \frac{p'(\varphi)^2}{p(\varphi)^4} \right)^{1/2} d\varphi \\ & = \int_0^{2\pi} \tilde{f}_0(s(\varphi))^{1/\beta} (p(\varphi) + p''(\varphi))^{1/\beta} d\varphi \\ & = \int_0^{\tilde{l}} \tilde{f}_0(s)^{1/\beta} \tilde{k}(s)^{2/\beta} ds, \end{aligned}$$

womit bereits alles bewiesen ist.

Für  $\tilde{f}_0 = \frac{1}{l-b}$  folgt aus (34) das entsprechende Ergebnis von Renyli und Sulanke in [4].

Institut für Angewandte Mathematic  
Universität Heidelberg

Поступило 10.X.1970

2. ՅԻՑՈՒԴ. Պատահական ուսուցիկ բազմանկյունների զարգացման փուլերի (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում են պատահական ուսուցիկ բազմանկյունների կառուցման երկու եղանակները: Պատահական ուսուցիկ բազմանկյունը սահմանվում է որպես  $\omega$  հարթության վրա անկախ ձևով գծած  $n$  կետերի ուսուցիկ թաղանթ, կամ  $p$  սկզբնակետը պարունակող բազմանկյուն, որը ստացված է հարթության  $n$  պատահական ուղիղների հատումից:

Առաջարկված է երկակիության մի թեորեմ, որը թույլատրում է  $\omega$  բազմանկյունների կողմերի միջին թվի ասիմպտոտական բանաձևերից ստանալու արդյունքներ  $p$  բազմանկյունների համար և հակադարձը, էպպես ընդհանրացված են [2], [3] և [4] աշխատանքների արդյունքները:

Г. ЦИЦОЛЬД. О числе вершин случайных выпуклых многоугольников (резюме)

В работе рассматриваются два способа построения случайных выпуклых многоугольников. Случайный выпуклый многоугольник определяется как а) выпуклая оболочка  $n$  точек, независимо брошенных на плоскость или б) содержащий начало координат многоугольник, порожденный пересечением  $n$  случайных прямых на плоскости.

Предложена теорема дуальности, которая позволяет из асимптотических формул для среднего числа сторон многоугольников а) получать результаты для многоугольников б), и наоборот. Значительно обобщены результаты работ [2], [3] и [4].

## L I T E R A T U R

1. *G. Ptokert*. Analytische Geometrie. 4. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1961.
2. *A. Rengt*, und; *R. Sulanke*. Über die konvexe Hülle von  $n$  zufälligen gewählten Punkten I. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 2 (1963), 75—84.
3. *A. Rengt* und *R. Sulanke*. Über die konvexe Hülle von  $n$  zufällig gewählten Punkten II. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 3 (1964), 138—147.
4. *A. Rengt*, und *R. Sulanke*. Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 9 (1968), 146—157.