ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 3, 1970 Математика

О. П. ВИНОГРАДОВ, И. П. ЦАРЕГРАДСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОИСКА

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются некоторые задачи, связанные с оптимальным поиском плоских геометрических объектов, „случайно" распределенных в некоторой ограниченной выпуклой области. „Случайность" распределения объекта внутри области понимается в смысле, обычном в интегральной геометрии, т. е. предполагается равномерным вероятностное распределение в пространстве некоторых параметров, определяющих положение объекта в области ([1]).

Поиск производится кривой заданной длины L. Объект считается найденным, если он пересекает по меньшей мере один раз эту кривую. Оптимальность понимается в смысле получения наибольших или наименьших значений некоторых функционалов от кривых поиска.

2. Поиск „случайных" хорд

А. *Поиск хорды замкнутыми траекториями.* Сначала проанализируем обнаружение случайной хорды области G содержащимися в ней целиком траекториями C заданной длины L с началом и концом, совпадающими с некоторой точкой A границы области G. Будем предполагать, что поиск хорды осуществляется обходом области по заданной траектории C, проходимой в определенном направлении с постоянной скоростью $v = 1$. Основной характеристикой поиска ([1]) естественно считать вероятность обнаружения хорды, вычисляемую по формуле:

$$P_c = \frac{l_c}{L(G)}, \tag{1}$$

где l_c — длина выпуклой оболочки контура C, а $L(G)$ — длина границы области G.

Отсюда следует, что в смысле максимизации вероятности P_c наилучшими траекториями являются выпуклые траектории. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением совокупности выпуклых траекторий C поиска. Так как для всех них величина P_c одна и та же и равна по формуле (1) $\frac{L}{L(G)}$, то наряду с этой характеристикой поиска введем еще величину τ_c — время до первого обнаружения хорды при движении по траектории C. Если же обнаружения не происходит, то положим $\tau_c = \infty$.

Относительно (условного) закона распределения этой случайной величины легко доказывается

Лемма 1. Пусть в некоторой системе координат с центром в точке A выпуклый контур C задан уравнениями

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}, \quad 0 \leqslant s \leqslant L,$$

где s — длина контура C, отсчитываемая от A в направлении поиска. Тогда

$$\Phi_c(s) = P\left\{ \tau_c < s \Big/ \begin{matrix} \text{обнаружение} \\ \text{произошло} \end{matrix} \right\} = \frac{s + r_c(s)}{L}, \tag{2}$$

где $r_c(s) = \sqrt{x^2(s) + y^2(s)}$.

Заметим, что из этой леммы легко получить следующий результат. Предположим, что поиск по C производится таким образом, что при первом обнаружении хорды происходит возвращение в A кратчайшим (по прямой) путем. Обозначим через T_c полное время, затраченное на поиск при таком способе поиска. Как и раньше, если поиск не увенчался успехом, положим $T_c = \infty$. Тогда $\Phi_{T_c}(s) = P\{T_c < s/\text{обнаружение произошло}\} = \frac{s}{L}$, $0 \leqslant s \leqslant L$, т. е. закон распределения T_c не зависит от выбранной траектории C. Это утверждение является следствием нашей леммы и очевидного равенства

$$T_c = \tau_c + r_c(\tau_c). \tag{3}$$

Вернемся к нашей задаче оптимизации поиска, взяв за основу критерия оптимальности функционалы от траекторий C, связанные со случайной величиной τ_c. Пусть $d_A(G)$ — длина максимальной хорды области G, проходящей через точку A. В зависимости от соотношения между L, $L(G)$ и $d_A(G)$ возможны 3 случая:

$$1)\ 0 \leqslant L \leqslant 2d_A(G),\ 2)\ 2d_A(G) < L < L(G),\ 3)\ L = L(G).$$

Случай 3) неинтересен, поскольку здесь мы имеем единственную траекторию C, совпадающую с контуром области G. Рассмотрим случай 1). В качестве функционала оптимизации выберем (условную) функцию распределения $\Phi_c(s)$ и покажем, что существует такая траектория C_0, что для всех C и s, $0 \leqslant s \leqslant L$:

$$\Phi_{c_0}(s) \geqslant \Phi_c(s). \tag{4}$$

Из формулы (2), задающей $\Phi_c(s)$, следует, что поставленная задача сводится к максимизации величины $r_c(s)$ одновременно для всех s, $0 \leqslant s \leqslant L$. Легко видеть, что для $s \leqslant \frac{L}{2}$ максимальное значение $r_c(s)$ будет достигаться на прямолинейных (радиальных) участках

траекторий, для которых $r_c(s) = s$. Пусть $s > \frac{L}{2}$. Положим $s = \frac{L}{2} + \Delta s$, $\Delta s > 0$. Тогда для любой траектории C

$$r_c\left(\frac{L}{2} + \Delta s\right) \leqslant \frac{L}{2} - \Delta s,$$

причем равенство достигается на прямолинейных (радиальных) участках возвращения в A. Отсюда следует, что искомым оптимальным путем C_0, удовлетворяющим соотношению (4), будет дважды проходимый прямолинейный отрезок длины $\frac{L}{2}$ с величиной

$$r_{c_0}(s) = \begin{cases} s, & s \leqslant \frac{L}{2} \\ L - s, & \frac{L}{2} < s \leqslant L. \end{cases} \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что в случае 2), когда $2d_A(G) < L < L(G)$, не существует такой траектории C_0, для которой выполняется соотношение (4) для всех s, $0 \leqslant s \leqslant L$. Поэтому, если имеется возможность выбора точки A, надо выбирать ее так, чтобы величина $d_A(G)$ была максимальной, т. е. в одном из концов диаметра $d(G)$ области G.

В этом случае в качестве функционала оптимизации мы выберем $M\tau_c$ — среднее значение момента первого обнаружения τ (при условии, что обнаружение произошло) и будем искать такую траекторию C_0, для которой

$$M\tau_{c_0} \leqslant M\tau_c \tag{6}$$

для всех траекторий C.

Замечание.

Интересно сравнить $M\tau_c$ для различных траекторий C в первом случае, когда $0 \leqslant L \leqslant 2d_A(G)$. Так, например, для дважды проходимого отрезка C_0 $M\tau_{c_0} = \frac{L}{4}$, а для окружности C длины L $M\tau_c = L\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\right)$. Поэтому почти на 20% в принятом нами смысле выгоднее искать хорду отрезком, нежели окружностью.

Согласно равенству (2), имеем:

$$M\tau_c = \int_0^L [1 - \Phi_c(s)]\, ds = \frac{L}{2} - \frac{1}{L}\int_0^L r_c(s)\, ds. \tag{7}$$

Полученная формула (7) сводит поставленную задачу к максимизации функционала

$$\int_0^L r_c(s)\, ds, \tag{8}$$

заданного для всех выпуклых контуров C, целиком содержащихся в выпуклой области G.

Ограничимся далее случаем, когда область G есть круг, хотя проведенные ниже рассуждения леммы 2 применимы для любой выпуклой области, а не только для круга.

Назовем „секториальным" контуром круга выпуклый контур, состоящий из двух хорд, проведенных из точки A до пересечения с окружностью, и дуги окружности между ними, не содержащей точки A. Обозначим через $r^*(s)$ соответствующий полярный радиус для этого контура (с полюсом в точке A). Тогда справедлива

Лемма 2. *Для любой траектории C периметра $L(L \geqslant 4R$, где R — радиус круга G) найдется „секториальный" контур того же периметра такой, что $r^*(s) \geqslant r_c(s)$ для всех s.*

Доказательство. Пусть AB проекция контура C на диаметр круга AD. Тогда точка B является образом либо

а) одной точки N контура C, либо

б) целого отрезка N_1N_2.

Возможны следующие случаи:

1а) точка N находится на границе круга,

1б) отрезок N_1N_2 имеет общую точку (либо N_1, либо N_2) с границей круга,

2а) точка N находится внутри круга,

2б) отрезок N_1N_2 находится внутри круга.

Рассмотрим случай 1а. Хорда AN делит круг на два, вообще говоря, неравных сегмента. Для определенности предположим, что в меньшем из них содержится начальная часть контура C, имеющая длину L_1. Для $0 \leqslant s \leqslant L_1$ построим вместо этой части контура C новую траекторию C^*, состоящую из дуги окружности $\overset{\smile}{NE}$ и отрезка AE, причем, длина $\overset{\smile}{NE}$ + длина AE равна L_1. Покажем, что ее полярный радиус $r^*(s)$ удовлетворяет соотношению

$$r^*(s) \geqslant r_c(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant L_1. \tag{9}$$

Пусть длина отрезка AE равна s_1. Тогда при $0 \leqslant s \leqslant s_1$ неравенство (9) очевидно. Если же предположить, что при некотором s_0

$$r^*(s_0) < r_c(s_0) \quad (s_1 < s_0 < L_1),$$

то, как нетрудно заметить, область, ограниченная 1) радиусом-вектором $\vec{r}_c(s_0)$ 2) частью траектории C, соединяющей конец радиуса-вектора $\vec{r}_c(s_0)$ и точку N, 3) отрезком NA, лежит внутри контура, образованного 1) радиусом $\vec{r}^*(s_0)$, 2) частью новой траектории, соединяющей конец радиуса-вектора $\vec{r}^*(s_0)$ и точку N; 3) отрезком AN.

В силу предположения $r^*(s_0) < (r_c(s_0)$ следует, что периметр второго контура больше периметра первого контура. Но известно ([2]): если одна выпуклая область содержится внутри другой, то ее периметр меньше, чем периметр области, ее содержащей. Отсюда следует, что неравенство $r^*(s_0) < r_c(s_0)$ невозможно.

Для другой части контура C, содержащейся в большем сегменте круга, доказательство можно провести следующим образом. Проведем хорду $NM \perp AD$ и построим новый контур $\bar{C}$, образованный хордой NM, частью дуги окружности $\bar{M}H$ и отрезком HA, причем, длина $NM +$ длина $\bar{M}H +$ длина HA равна $L - L_1$. Точно также, как и в предыдущем случае можно показать, что для полярного радиуса $\bar{r}(s)$ нового контура $\bar{r}(s) \geqslant r_c(s)$ $(L - L_1 \leqslant s < L)$. Наконец, этот контур $\bar{C}$ заменим контуром C^*, состоящим из дуги $\bar{N}F$ и отрезка AF, причем, длина $\bar{N}F +$ длина AF равна $L - L_1$. Нетрудно видеть, что для этого контура каждая точка далее удалена от A, чем соответствующая (для одного и того же значения s) точка для предыдущего. Таким образом, в случае 1а) лемма доказана. Доказательство леммы в случае 1б) полностью совпадает с предыдущим доказательством. Случаи 2а) и 2б) рассматриваются, как предыдущие с незначительными изменениями. Лемма доказана.

Лемма 3. Среди всех „секториальных" контуров заданного периметра L максимум $\int_0^L r_c(s)\,ds$ достигается для контура, симметричного относительно диаметра AD.

Доказательство. Рассмотрим „секториальный" контур периметра L, у которого угол между хордами, проведенными из точки A, равен 2α, а угол между биссектрисой этого угла и диаметром AD равен β. Для этого контура введем следующее обозначение

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^L r^*(s)\,ds.$$

Опуская утомительные выкладки, получим

$$J(\alpha, \beta) = 4R^2[(\sin\alpha + \cos\beta)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\beta],$$

причем, α и β связаны соотношением $\cos\alpha\cos\beta + \alpha = \frac{L}{4R}$.

Исследуя функцию $J(\alpha, \beta)$ обычными методами дифференциального исчисления, убеждаемся, что максимум достигается при $\beta = 0$, $\alpha = \alpha_0$, где α_0 определяется из уравнения

$$\alpha_0 + \cos\alpha_0 = \frac{L}{4R}.$$

Лемма доказана. Сохраняя введенные выше обозначения и резюмируя предыдущие результаты (включая результаты лемм 2 и 3) приходим к следующим выводам.

Теорема. 1°. Замкнутые траектории длины L, принадлежащие целиком области G и максимизирующие вероятность P_c обнаружения случайной хорды этой области, представляют собой множество выпуклых траекторий;

2°. В случае $0 \leqslant L \leqslant 2\,d_A(G)$ траекторией, максимизирующей для любого $s\,(0 \leqslant s \leqslant L)$ функцию распределения $\Phi_c(s)$, будет дважды проходимый отрезок длины $\frac{L}{2}$;

3°. Для круга G радиуса R и $4R \leqslant L \leqslant 2\pi R$ контуром длины L, минимизирующим среднее значение $M\tau_c$, будет симметричный „секториальный“ контур.

Найденные нами оптимальные траектории поиска хорды представляют интерес с точки зрения рассмотрения некоторых других функционалов от траекторий C.

Так, например, случайная хорда делит область G на две части. Обозначим через G_1 ту часть, которая не содержит точку A. Будем интерпретировать задачу, рассмотренную выше, как поиск области G_1. Естественно предполагать, что обнаружение области G_1 происходит с большей надежностью, когда время, проведенное внутри области G_1 будет максимально возможным. Для выбора оптимальной в этой смысле траектории рассмотрим две случайные величины τ_c^+ и τ_c^- — моменты первого обнаружения хорды при обходе контура C, соответственно, против и по часовой стрелке.

Поскольку ξ_c — время пребывания в области G_1 равно

$$\xi_c = L - (\tau_c^+ + \tau_c^-),$$

то траектории, найденные выше и „минимизирующие“ величину τ_c, будут „максимизировать“ величину ξ_c. Отметим, что нетрудно найти функцию совместного распределения величин τ_c^+ и τ_c^-.

Б. *Поиск хорды незамкнутыми траекториями.* Рассмотрим теперь случай, когда поиск хорды, случайно расположенной в выпуклой области G, ведется по траекториям $\overset{\smile}{AB}$ длины L с началом и концом на границе области G. По соображениям, приведенным в пункте А, ограничимся классом выпуклых (вогнутых) траекторий $\overset{\smile}{AB}$. Легко заметить, используя формулу (1), что вероятность пересечения $\overset{\smile}{AB}$ со „случайной“ хордой области G будет равна величине

$$P_{\overset{\smile}{AB}} = \frac{L(\overset{\smile}{AB}) + z}{L(G)}, \tag{10}$$

где z — длина хорды AB, стягивающей дугу $\overset{\smile}{AB}$.

Поэтому в смысле максимума вероятности оптимальными траекториями будут хорды AB длины L, если $L \leqslant d(G)$, и дуги $\overset{\smile}{AB}$, совпадающие с частью контура области G и выбранные так, что хорды AB, их стягивающие, имеют максимально возможную величину z — в случае, если $L > d(G)$ (здесь, как и раньше, $d(G)$ — диаметр области G). В дальнейшем будем рассматривать только такие траектории.

Представим себе процедуру поиска такую, что по обнаружении хорды происходит возвращение кратчайшим путем (по прямой) в ближайший из концов A или B. Введем величину T — суммарное время, затраченное на поиск хорды. Тогда, очевидно,

$$T = \begin{cases} \tau + r^A(\tau) & \tau \leqslant s_0 \\ \tau + r^B(\tau) & \tau > s_0, \end{cases} \tag{11}$$

где τ — момент первого обнаружения „случайной“ хорды $r^A(s)$, $r^B(s)$ — расстояния точки $M(s)$ соответственно от начала $A(0)$ и конца $B(L)$, $0 \leqslant s \leqslant L$ и s_0 — координата точки $M_0(s_0)$ такой, что $r^A(s_0) = r^B(L - s_0)$. Из равенства (11) можно получить преобразование Лапласа величины T для $L > d(G)$ и при условии обнаружения хорды

$$\varphi_T(u) = Me^{-uT} = \int_0^{s_0} e^{-u(x + r^A(x))}\, d\Phi_c(x) + \int_{s_0}^{L} e^{-u(x + r^B(x))}\, d\Phi_c(x), \tag{12}$$

где $\Phi_c(x)$ определяется равенством (2).

Формулой (12) практически трудно воспользоваться, но для круговой области G она дает возможность вычислить через элементарные функции все моменты случайной величины T. Действительно, в случае круга радиуса R и $L > 2R$ преобразование Лапласа $\varphi_T(u)$ величины T, как легко подсчитать, преобразуется к виду:

$$\varphi_T(u) = \frac{1}{L + 2R\sin\frac{L}{2R}} \cdot \left[\frac{1}{u}\left(1 - e^{-u\left(\frac{L}{2} + 2R\sin\frac{L}{4R}\right)}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{L}{2}}^{L} e^{-u\left(x + 2R\sin\frac{L-x}{2R}\right)} \left(1 + \cos\frac{x}{2R}\right) dx \right].$$

3°. *Поиск отрезка.* Теперь рассмотрим поиск ориентированного отрезка длины l замкнутыми выпуклыми контурами C длины L. Будем предполагать, что отрезок „случайно“ распределен в некоторой об-

ласти G и имеет с ней хотя бы одну общую точку. Как и раньше „случайность" понимается в смысле, обычном в интегральной геометрии, т. е. вероятность того, что выбранная внутри G выпуклая траектория C пересечет отрезок будет равна

$$P_c = \frac{\mu(\mathfrak{M}_c)}{\mu_G}, \tag{13}$$

где $\mu(\mathfrak{M}_c)$ — кинематическая мера множества $\mathfrak{M}_c$ отрезков длины l, пересекающих контур C, а μ_G — кинематическая мера отрезков, имеющих хотя бы одну общую точку с областью G.

Известно, что $\mu_G = 2\pi F + 2 \cdot l \cdot L(G)$, где F и $L(G)$ — площадь и периметр области G соответственно. Нетрудно также показать, что

$$\mu_c = \mu(\mathfrak{M}_c) = \int\limits_{\mathfrak{M}_c^*} |l + \min(l, \sigma)| \, d\vec{\Pi}, \tag{14}$$

где $\vec{\Pi}(p, \varphi)$ — ориентированная прямая, на которой лежит отрезок, σ — длина хорды, отсекаемой на этой прямой контуром C, а $\mathfrak{M}_c^*$ — соответствующая область параметров p и φ.

Наша задача ставится следующим образом. Среди всех выпуклых контуров C длины L найти такой контур C_0, для которого

$$P_{c_0} > P_c.$$

Заметим, что так как в формуле (13) знаменатель не зависит от выбора C, то для решения поставленной задачи нужно минимизировать числитель. В случае, если длина отрезка l не менее диаметра $d(C)$ фигуры C, соотношение (14) приводит к известной формуле ([2]):

$$\mu_c = 2lL + 2\pi F_c. \tag{15}$$

В силу изопериметрического свойства круга отсюда следует, что для $l \geqslant d(G)$ окружность является оптимальной траекторией. Рассмотрим другой крайний случай малых l ($l \to 0$). Ниже мы хотим показать, что и в этом случае окружность будет максимизировать вероятность обнаружения P_c. Используя известные результаты интегральной геометрии ([2] и [3]), кинематическую меру μ_c (14) можно преобразовать к виду:

$$\mu_c = 4\left[l \cdot L - \int\limits_0^{2\pi} S_c(\varphi)\, d\varphi\right], \tag{16}$$

где $S_c(\varphi)$ — площадь заштрихованной фигуры W (рис. 1), определяемой следующим построением. Проводятся две ориентировочные прямые $\vec{\Pi}(p_1, \varphi)$ направления φ таким образом, чтобы хорды $AB = A_1B_1 = l$, и одна из опорных прямых к контуру C, параллельная им; затем проводятся прямые AA_1 и BB_1 до пересечения с этой опорной прямой. Фигура, заключенная между опорной прямой, прямыми AA_1,

BB_1 и частью контура C, отсекаемого этими прямыми, та фигура W, о которой идет речь в формуле (16). Из равенств (13) и (16) выте-

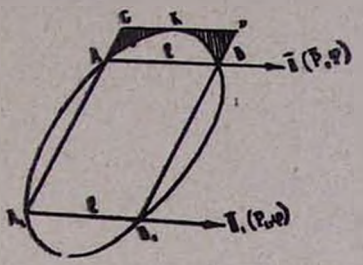

Рис. 1.

кает, что задача максимизации вероятности P_c свелась к минимизации интеграла

$$I_c = \int_0^{2\pi} S_c(\varphi)\, d\varphi. \tag{17}$$

Рассмотрим сначала класс $R[C]$ гладких кривых C с касательной во всех точках и с определенной везде кривизной $\varkappa$. Для каждого фиксированного φ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ в соответствии с изложенным выше построением определяется фигура W площади $S_c(\varphi)$ и точка $K(\varphi)$ на контуре C (рис. 1). Выберем прямоугольную систему координат xKy с началом в точке K и осью x, идущей по опорной прямой CKD. Поскольку мы предполагаем, что $l \to 0$, то в этой системе координат можно задать кривую C в виде однозначной функции $y = f_c(x)$, определенной для $|x| \leqslant l$. Тогда, обозначая через x_1 и x_2 — абсциссы точек A и B $(x_1 \leqslant 0 \leqslant x_2,\ x_2 - x_1 = l)$, нетрудно получить, что

$$S_c(\varphi) = \int_{x_1}^{x_2} f_c(x)\, dx. \tag{18}$$

Разлагая $f_c(x)$ по формуле Маклорена и учитывая, что $f_c(0) = f_c'(0) = 0$, а $f_c''(0) = \varkappa_c(\varphi)$, где $\varkappa_c(\varphi)$ — кривизна кривой C в точке $K(\varphi)$, мы получим из равенства (18) следующее асимптотическое выражение для $S_c(\varphi)$:

$$S_c(\varphi) = \frac{1}{6}\varkappa_c(\varphi)(x_2^3 - x_1^3) + 0(l^3),\ l \to 0,$$

которое вместе с равенством (17) очевидным образом приводит к следующему результату: для любого выпуклого контура C справедливо соотношение

$$J_c = l^3 \int_0^{2\pi} \varkappa_c(\varphi)\, \lambda_c(\varphi, l)\, d\varphi + 0(l^3), \tag{19}$$

где $\lambda_c(\varphi, l) = \dfrac{x_2^3 - x_1^3}{6l^3}$,

причем

$$J_c \geqslant \frac{l^2}{24} \int_0^{2\pi} \chi_c(\varphi)\, d\varphi + 0(l^3), \tag{20}$$

где знак равенства достигается в случае окружности.

Найдем теперь минимум функционала

$$I_c = \int_0^{2\pi} \chi_c(\varphi)\, d\varphi.$$

Прежде чем это сделать, отметим следующее обстоятельство. Зададим контур C параметрически, выбрав в качестве параметра длину дуги s, отсчитываемую от некоторой точки контура. Тогда угол φ, задающий направление касательной в каждой точке кривой, можно представить как функцию этой дуги $\varphi = \varphi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, такую, что, $\dfrac{d\varphi(s)}{ds} = k_c(s)$, где $k_c(s)$ кривизна кривой C в точке, отвечающей значению параметра s. Поэтому функционал I_c можно преобразовать к виду:

$$I_c = \int_0^L \chi_c(\varphi(s))\, d\varphi(s) = \int_0^L k_p^2(s)\, ds. \tag{21}$$

При этом для выпуклого контура C должно выполняться очевидное условие

$$\int_0^L k_c(s)\, ds = 2\pi. \tag{22}$$

Мы пришли к простейшей вариационной задаче на условный экстремум. Ее решением, дающим минимальное значение функционала (21), будет постоянная:

$$k_c(s) \equiv \text{const}\left(= \frac{2\pi}{L}\right),\ 0 \leqslant s \leqslant L. \tag{23}$$

Вместе с (20) равенство (23) утверждает асимптотическую оптимальность окружности в классе кривых C с определенной везде кривизной. Если же в некоторой точке касания $K(\varphi)$ кривизна $\chi_c(\varphi)$ не определена, формула Маклорена для функции $f_c(x)$ дает лишь представление

$$f_c(x) = \varepsilon_c(x, \varphi) \cdot x,$$

где $\varepsilon_c(x, \varphi) \to 0$, $x \to 0$. Введя $\beta_c(x) = \dfrac{\varepsilon_c(x, \varphi)}{x}$, получим $f_c(x) =$

$=\beta_c(x)\cdot x^2$, где в силу выпуклости кривой C, всегда $\beta_c(x)>0$. Поэтому, учитывая дискретный характер таких точек, можем сказать, что они не могут „улучшить" кривую в смысле вероятности P_c ее пересечения с отрезком, — „ухудшить" могут, — если

$$\beta_c(x)\to+\infty \qquad \text{при } x\to 0.$$

Дальнейшее ухудшение гладкости кривой C ведет к дальнейшеми „ухудшению" кривой в смысле максимизациивероятностей P_c. Так, можно показать, что если контур C имеет m угловых точек с углами $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ между соответствующими односторонними касательными, то вероятность P_c будет равна

$$P_G=\frac{1}{\mu_G}\left[4lL-\frac{l^2}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(1-\frac{\alpha_j}{\operatorname{tg}\alpha_j}\right)+O(l^3)\right]. \tag{24}$$

Для кривых же класса $R\{C\}$, как это следует из формул (13), (16) и (19), эта вероятность равна

$$P_c=\frac{4}{\mu_G}\left[l\cdot L-l^3\int_0^{2\pi}\chi_c(\varphi)\lambda_c(\varphi,\ l)\,d\varphi+0(l^3)\right], \tag{25}$$

где

$$\frac{1}{24}\leqslant\lambda_c(\varphi,\ l)\leqslant\frac{1}{6}\cdot$$

В полученных формулах (24) и (25) интересно отметить следующий факт: первый член разложения определяется размером L кривой C, второй же член — ее формой, представленной соответственно параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ в (24) и $\chi_c(\varphi)$, $\lambda_c(\varphi,\ l)$ $0\leqslant\varphi<2\pi$, в (25).

Для произвольных l нам не удалось максимизировать вероятность P_c. Однако, в связи с полученными выше результатами для частных случаев „больших" и „малых" l, можно высказать гипотезу, что среди выпуклых контуров C длины L оптимальной будет окружность C_0, т. е. $P_{c_0}>P_c$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило 2.III.1970

Օ. Գ. ՎԻՆՈԳՐԱԴՈՎ և Ի. Գ. ՑԱՐԵԳՐԱԴՍԿԻ. Երկրաչափական հավանականություններ և օպտիմալ որոնման տեսությունը (ամփոփում)

Դիտարկվում են ուռուցիկ տիրույթներում պատահական ձևով տեղավորված օբյեկտների օպտիմալ որոնման խնդիրները։ Լարերի և ինտերվալների որոնման խնդրի համար ստացված են օպտիմալ հետագծերը։

O. P. VINOGRADOV and I. P. ZAREGRADSKI. *Geometrical probabilities in the theory of optimal search* (summary)

The problems of optimal search for geometrical objects, randomly placed in a convex domain, are discussed.

Optimal trajectories for search for chords and intervals in convex domaines are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. G. Kendall, P. A. P. Moran.* Geometrical Probability, Charles Griffin, London, 1963.
2. *Л. А. Сантало.* Введение в интегральную геометрию, М., Издательство „ИЛ", 1956.
3. *L. A. Santaló.* Sur quelques problémes de probabilités géométriques, Tohoku Math. J., 47, 1940, 159—171.