ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 2, 1970 Математика

Г. С. МИКАЕЛЯН

О СИЛОВСКИХ БАЗАХ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП ОТНОСИТЕЛЬНО РАСЩЕПЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ СИЛОВСКИХ КЛАССОВ

Рассмотрим абстрактный непустой класс групп Σ, обладающий следующими свойствами:

I. Если $G \in \Sigma$, то любая подгруппа группы G также принадлежит Σ.

II. Если $G \in \Sigma$ и $\overline{G}$ — эпиморфный образ группы G, то $\overline{G} \in \Sigma$.

III. Если $G/A \simeq B$, $A \in \Sigma$ и $B \in \Sigma$, то $G \in \Sigma$.

IV. Если G обладает локальной системой из Σ-подгрупп, то $G \in \Sigma$.

Классы групп с этими свойствами рассматривались в [3] и [4]. Они называются силовскими. Силовскими классами являются, в частности, классы всех p-групп, всех локально конечных p-групп, всех П-групп, всех периодических групп.

В работе Б. И. Плоткина [4] доказана следующая

Теорема. Пусть K—класс групп, обладающий свойствами I и II, и пусть Σ—такой силовский класс, что в любой конечной K-группе имеет место сопряженность ее силовских (максимальных) Σ-подгрупп. Тогда, если K-группа G обладает силовской Σ-подгруппой с конечным числом сопряженных, то в ней любые две силовские Σ-подгруппы сопряжены. В дальнейшем эту теорему мы будем называть теоремой Плоткина. На случай произвольных силовских классов теорема Плоткина обобщает известные теоремы о сопряженности силовских p-подгрупп и П-подгрупп бесконечных групп.

Нашей целью является доказательство некоторых теорем о сопряженности силовских Σ баз (обобщение понятия силовской П-базы на случай произвольных силовских классов) бесконечных групп. Эти теоремы являются обобщениями некоторых известных теорем Бэра и П. А. Гольберга о силовских П-базах бесконечных групп.

Автор приносит искреннюю благодарность профессору А. Г. Курошу за руководство работой, за многочисленные ценные советы и замечания, за большую помощь при подготовке рукописи к печати.

1°. Под пересечением двух или нескольких силовских классов будем понимать их теоретико-множественное пересечение, которое также обладает свойствами I—IV и поэтому будет силовским классом.

С другой стороны, класс всех групп будет силовским и, следовательно, имеет смысл говорить о силовском классе, порожденном данным классом групп: это будет минимальный силовский класс, содержащий данный класс. Силовский класс, порожденный классом $\mathfrak{M}$,

будем обозначать через $\{\mathfrak{M}\}$. Для всякого класса Σ через $\overline{\Sigma}$ обозначим класс, состоящий из тех и только тех групп, которые или являются Σ-группами, или в порядке каждого элемента которых входят только те простые числа, которые встретятся в порядке некоторого элемента какой-либо Σ-группы. Обозначим далее через E — класс групп, состоящий только из единичной группы E. E будет силовским классом и следовательно, $\mathrm{E} = \{E\}$.

Лемма 1. *Пусть Σ_1 и Σ_2 — такие силовские классы, что $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \mathrm{E}$, и пусть задан эпиморфизм*

$$\{a\} \to \{\bar{a}\}, \text{ где } \{a\} \in \overline{\{\Sigma_1, \Sigma_2\}}, \{\bar{a}\} \in \Sigma_1.$$

Тогда существует такой прообраз a' элемента $\bar{a}$, что $\{a'\} \in \Sigma_1$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\Sigma_1 \neq \mathrm{E}$, $\Sigma_2 \neq \mathrm{E}$. Тогда из $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \mathrm{E}$ следует, что класс $\overline{\{\Sigma_1, \Sigma_2\}}$ не содержит групп без кручения. Действительно, если хотя бы один из классов Σ_1, Σ_2 содержит непериодическую группу, то содержит и бесконечную циклическую группу, а тогда и все конечные циклические группы и, следовательно, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \mathrm{E}$. Если же оба класса Σ_1, Σ_2 состоят лишь из периодических групп, то они содержатся в силовском классе всех периодических групп, откуда следует утверждение.

Из сказанного следует, что при $\Sigma_1 \neq \mathrm{E}$ и $\Sigma_2 \neq \mathrm{E}$ $|a| < \infty$. Пусть

$$\{a\}/\{a^k\} \simeq \{\bar{a}\}$$

и $|a| = mn$, где в n собраны степени тех простых чисел, которые входят в каноническое разложение числа k.

Произвольный элемент смежного класса $a\{a^k\}$ имеет вид $aa^{qk} = a^{qk+1}$, где q — некоторое целое число. Выберем q так, что $kq + mr = -1$. Это возможно, так как $(m, n) = 1$ и, следовательно, $(m, k) = 1$. Но тогда $qk + 1$ нацело делится на m, т. е. $(a^{qk+1})^n = 1$. Элемент $a' = a^{qk+1}$ является искомым элементом. Действительно, $a' \in a\{a^k\}$, т. е. его образом служит $\bar{a}$ и, так как $\{a^{\frac{mn}{k}}\} \in \Sigma_1$, то по I и III $\{a^m\} \in \Sigma_1$, и, следовательно, $\{a'\} \in \Sigma_1$.

Пусть теперь $\Sigma_1 = \mathrm{E}$. Тогда ясно, что искомым элементом будет единица групп $\{a\}$. Если же $\Sigma_2 = \mathrm{E}$, то искомым элементом будет a. Лемма доказана. Из нее сразу вытекает

Следствие 1. Если Σ_1 и Σ_2 — такие силовские классы, что $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \mathrm{E}$, $G \in \overline{\{\Sigma_1, \Sigma_2\}}$, $\bar{G}$ — эпиморфный образ группы G, $\bar{a} \in \bar{G}$ и $\{\bar{a}\} \in \Sigma_1$, то существует такой прообраз a' элемента $\bar{a}$ в G, что $\{a'\} \in \Sigma_1$.

Назовем систему классов групп $\Sigma = \langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ расщепляемой, если для любых α, $\beta \in M$, $\alpha \neq \beta$ $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta = \mathrm{E}$.

Лемма 2. *Если система силовских классов $\langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ расщепляемая, то $\Sigma_\beta \cap \{\Sigma_\alpha | \alpha \in M, \alpha \neq \beta\} = \mathrm{E}$.*

Действительно, так как мы имеем расщепляемую систему силовских классов и мощность M больше 1, то каждый класс Σ_α входит в класс

всех Π_α-групп, где Π_α — некоторое множество простых чисел, причем для различных α эти Π_α — различны. Ясно, что $\{\Sigma_\alpha | \alpha \in M,\ \alpha \neq \beta\}$ входит в класс $\bigcup\limits_{\alpha \in M,\ \alpha \neq \beta} \Pi_\alpha$-групп. Но из $\Pi_\beta \cap \Pi_\alpha = \varnothing$ для всех $\alpha \in M$, $\alpha \neq \beta$ следует, что $\Pi_\beta \cap (\bigcup\limits_{\alpha \neq \beta,\ \alpha \in M} \Pi_\alpha) = \varnothing$. Следовательно, $\Sigma_\beta \cap \{\Sigma_\alpha | \alpha \in M,\ \alpha \neq \beta\} = E$.

Из этой леммы и из следствия 1 непосредственно вытекает

Следствие 2. Пусть $\langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — расщепляемая система силовских классов, $G \in \overline{\{\Sigma_\alpha | \alpha \in M\}}$, $\overline{G}$ — эпиморфный образ группы G, $\bar{a} \in \overline{G}$ и $\{\bar{a}\} \in \Sigma_\beta$, $\beta \in M$. Тогда существует такой прообраз a' элемента $\bar{a}$ в G, что $\{a'\} \in \Sigma_\beta$.

Пусть $\Sigma = \langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — расщепляемая система силовских классов.

Систему подгрупп $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$ группы G назовем ее силовской Σ-базой, если

1) для всякого $\alpha \in M$, A_α — силовская Σ_α-подгруппа группы G,

2) для всех $N \subseteq M$ $\{A_\beta | \beta \in N\} \in \overline{\{\Sigma_\beta | \beta \in N\}}$.

Если кроме этого имеет место еще

3) $\{A_\alpha | \alpha \in M\} = G$,

то эту систему назовем полной силовской Σ-базой группы G.

Примером силовских Σ-баз являются силовские Π-базы, когда для каждого $\alpha \in M$ в качестве Σ_α берется класс всех p_α-групп, где все p_α — простые числа и $p_\alpha \neq p_\beta$ при $\alpha \neq \beta$.

Под нормализатором силовской Σ-базы $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$ группы G будем понимать нормализатор подмножества $\bigcup\limits_{\alpha \in M} A_\alpha$ в G. Ясно, что он будет пересечением нормализаторов всех A_α, $\alpha \in M$. Силовский нормализатор силовской Σ-базы $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$ группы G — это пересечение всех подгрупп, сопряженных в G с нормализатором силовской Σ-базы $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$.

2°. В дальнейшем через K будем всегда обозначать класс групп, обладающий свойствами I и II.

Теорема 1. *Пусть $\Sigma = \langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — расщепляемая система силовских классов такая, что в любой конечной K-группе имеют место:*

а) *сопряженность силовских Σ_α-подгрупп для всех $\alpha \in M$;*

б) *сопряженность полных силовских Σ-баз, если такими она обладает.*

Тогда, если K-группа G обладает полной силовской Σ-базой $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$ с таким силовским нормализатором S, что $\overline{G} = G/S$ конечна и для всех $\alpha \in M$ все ее Σ_α-подгруппы нильпотентны, то любые две полные силовские Σ-базы группы G сопряжены.

Доказательство. Пусть имеют место предположения теоремы. Покажем, что при естественном гомоморфизме $G \to \overline{G}$ для всех $\alpha \in M$ силовские Σ_α-подгруппы отображаются на силовские.

Пусть G_α — некоторая силовская Σ_α-подгруппа группы G и $\overline{G}_\alpha$ — ее образ в $\overline{G}$. Ясно, что $\overline{G}_\alpha \in \Sigma_\alpha$. Предположим, что существует такое

$\bar{g} \in \bar{G}$, что $\{\bar{g}, \bar{G}_\alpha\} \in \Sigma_\alpha$ и $\bar{g} \in \bar{G}_\alpha$. По предположению $\{\bar{g}, \bar{G}\}$ нильпотентна. Поэтому существует такое $\bar{a} \in \{\bar{g}, \bar{G}_\alpha\}$, что $\bar{a}^{-1}\bar{G}_\alpha\bar{a} = \bar{G}_\alpha$ и $\bar{a} \in \bar{G}_\alpha$. Но $\{\bar{a}\} \in \Sigma_\alpha$. По следствию 2 существует в G такой прообраз a' элемента $\bar{a}$, что $\{a'\} \in \Sigma_\alpha$.

Возьмем теперь некоторое $g_\alpha \in G_\alpha$. Тогда $a'^{-1} g_\alpha a' = g_\alpha' s$, где $g_\alpha' \in G_\alpha$, $s \in S$. Покажем, что $G_\alpha^{g_\alpha' s} = G_\alpha$. Действительно, по теореме Плоткина все силовские Σ_α-подгруппы группы G сопряжены. Поэтому $S \subseteq N_G(G_\alpha)$ для всех силовских Σ_α-подгрупп G_α группы G и поэтому $G_\alpha^{g_\alpha' s} = G_\alpha$ или $G_\alpha^{a'^{-1} g_\alpha a'} = G_\alpha$. Мы получили, что $a'^{-1} g_\alpha a' \in N_G(G_\alpha)$. Но $\{a'^{-1} g_\alpha a'\} \in \Sigma_\alpha$ и G_α — силовская Σ_α-подгруппа в G, а поэтому и в $N_G(G_\alpha)$. С другой стороны, силовская Σ_α-подгруппа содержит все Σ_α-подгруппы своего нормализатора. Следовательно, $a'^{-1} g_\alpha a' \in G_\alpha$ или $G_\alpha^{a'} = G_\alpha$. Отсюда $a' \in N_G(G_\alpha)$. Но $\{a'\} \in \Sigma_\alpha$ и как прежде получим, что $a' \in G_\alpha$, то есть $\bar{a} \in \bar{G}_\alpha$, что противоречит нашему предположению. Мы видим, что действительно $\bar{G}_\alpha$ — силовская Σ_α-подгруппа в $\bar{G}$.

Пусть теперь $\langle A_\alpha' | \alpha \in M \rangle$ — другая полная силовская Σ-база группы G. Системы подгрупп $\langle \bar{A}_\alpha | \alpha \in M \rangle$ и $\langle \bar{A}_\alpha' \alpha \in M \rangle$, где $\bar{A}_\alpha$ и $\bar{A}_\alpha'$ соответственно гомоморфные образы подгрупп A_α и A_α' при естественном гомоморфизме $G \to \bar{G}$, будут полными силовскими Σ-базами для конечной K-группы $\bar{G}$. По предположению б) эти базы сопряжены, то есть существует такое $\bar{g} \in \bar{G}$, что для всех $\alpha \in M$ $\bar{A}_\alpha'^{\bar{g}} = \bar{A}_\alpha$.

Если $\bar{g} = gS$, $g \in G$ и a_α' — произвольный элемент из A_α', то $g^{-1} a_\alpha g = a_\alpha s$, где $a_\alpha \in A_\alpha$, $s \in S$. Отсюда получаем, что $g^{-1} a_\alpha g \in N_G(A_\alpha)$. Но $\{g^{-1} a_\alpha g\} \in \Sigma_\alpha$, и A_α — силовская Σ_α-подгруппа в G и значит в $N_G(A_\alpha)$. Поэтому $g^{-1} a_\alpha' g \in A_\alpha$ или $A_\alpha'^{g} = A_\alpha$ для всех $\alpha' \in M$, что и требовалось доказать.

Взяв в качестве K класс всех групп и для каждого $\alpha \in M$ в качестве Σ_α — класс всех p_α-групп, где все p_α — простые числа и $p_\alpha \neq p_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, мы получим

Следствие 3. (Бэр [7]). Если группа G обладает полной силовской базой с конечным числом сопряженных, то любые две ее полные силовские базы сопряжены.

Взяв в качестве K — класс локально разрешимых групп и для каждого $\alpha \in M$ в качестве Σ_α — класс всех Π_α-групп, где Π_α — некоторое множество простых чисел и $\Pi_\alpha \cap \Pi_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$, мы, используя лемму 2.2 работы [6], получим

Следствие 4. Если локально разрешимая группа G обладает полной силовской $\theta = \langle \Pi_1, \Pi_2, \cdots \rangle$-базой $\langle A_1, A_3, \cdots \rangle$ с силовским нормализатором S такой, что G/S конечна и для всех $i = 1, 2, \cdots$ все ее Π_i-подгруппы нильпотентны, то любые две полные силовские θ-базы группы G сопряжены.

3°. Пусть $\Sigma = \langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — расщепляемая система силовских (или произвольных) классов. Назовем группу G Σ-о т д е л и м о й, если она обладает конечным нормальным рядом, в каждый фактор которого могут входить нетривиальные Σ_α-подгруппы не более, чем для одного $\alpha \in M$. Это обобщение известного понятия П-отделимости конечных групп.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\Sigma = \langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — такая расщепляемая система силовских классов, что в любой конечной K-группе имеют место:*

а) *перестановочность подгрупп любой ее силовской Σ-базы (если она обладает такими);*

б) *сопряженность силовских Σ_α-подгрупп для всех $\alpha \in M$;*

в) *сопряженность полных силовских Σ-баз (если она обладает такими).*

Пусть K-группа G обладает силовской Σ-базой $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$ с силовским нормализатором S такой, что группа G/S конечна, Σ-отделима и для всех $\alpha \in M$ все ее Σ_α-подгруппы нильпотентны.

Тогда любые силовские Σ-базы группы G сопряжены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Берем две силовские Σ-базы группы G, заданную $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$ и произвольную $\langle Q_\alpha | \alpha \in M \rangle$. Докажем теорему индукцией по порядку $|G/S|$ группы G/S. При $|G/S| = 1$ утверждение очевидно. Пусть $|G/S| > 1$. Тогда в G существует нормальный делитель H такой, что $H \supseteq S$ и G/H содержит неединичные подгруппы не более, чем из одного класса Σ_α. Если G/H не содержит ни одной такой подгруппы, то заданные базы будут базами и для H и, так как $|H/S| < |G/S|$, то в этом случае теорема верна по индукции.

Пусть теперь в G/H содержится неединичная подгруппа из класса Σ_{α_1}.

Как и в книге А. Г. Куроша [1] (§ 54), можно доказать следующую лемму.

Л е м м а 3. Пусть Σ_α—силовский класс. Если A—нормальный делитель произвольной группы G и все силовские Σ_α-подгруппы группы G сопряжены, то пересечение A с любой силовской Σ_α-подгруппой группы G является силовской Σ_α-подгруппой в A.

В нашей группе G по теореме Плоткина имеет место сопряженность силовских Σ_{α_1}-подгрупп. Следовательно, по лемме 3 $H \cap A_{\alpha_1} = A'_{\alpha_1}$ и $H \cap Q_{\alpha_1} = Q'_{\alpha_1}$ — силовские Σ_{α_1}-подгруппы группы H, а $\langle A'_{\alpha_1}, A_\alpha | \alpha \in M, \alpha \neq \alpha_1 \rangle$ и $\langle Q'_{\alpha_1}, Q_\alpha | \alpha \in M, \alpha \neq \alpha_1 \rangle$ — ее силовские Σ-базы. Силовский нормализатор S' первой базы в H содержит S и порядок H/S' меньше порядка G/S. По индукции эти базы сопряжены, то есть существует такой $a \in H$, что

$$A'_{\alpha_1} = a^{-1} Q'_{\alpha_1} a = H \cap a^{-1} Q_{\alpha_1} a, \quad A_\alpha = a^{-1} Q_\alpha a, \text{ где } \alpha \in M, \ \alpha \neq \alpha_1.$$

Таким образом, если $\overline{Q}_{\alpha_1} = a^{-1} Q_{\alpha_1} a$, то $\langle \overline{Q}_{\alpha_1}, A_\alpha | \alpha \in M, \alpha \neq \alpha_1 \rangle$ является силовской Σ-базой группы G, сопряженной с $\langle Q_\alpha | \alpha \in M \rangle$ и

$$A'_{\alpha_1} = H \cap \overline{Q}_{\alpha_1} = H \cap A_{\alpha_1} \cdots. \tag{1}$$

Обозначим через $A=\{A_\alpha|\alpha\in M\}$, $B=\{\overline{Q}_{\alpha_1},\ A_\alpha|\alpha\in M,\ \alpha\neq\alpha_1\}$.

Докажем, что

$$A\cap H=B\cap H.$$

Доказательство этого утверждения вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 4. *Пусть имеют место все предположения теоремы 2, кроме в), которое может и не иметь места. Тогда любые две подгруппы силовской Σ-базы $\langle A_\alpha\alpha\in M\rangle$ перестановочны.*

Возьмем две произвольные подгруппы A_α и A_β заданной базы $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$. Докажем, что $\overline{A}_\alpha=A_\alpha S/S$ и $\overline{A}_\beta=A_\beta S/S$ соответственно силовские Σ_α и Σ_β-подгруппы группы $A_{\alpha\beta}=A_{\alpha\beta}S/S$, где $A_{\alpha\beta}=\{A_\alpha,\ A_\beta\}$.

Обозначим $A^*_{\alpha\beta}=A_{\alpha\beta}/A_{\alpha\beta}\cap S$. Тогда $\overline{A}_{\alpha\beta}\simeq A^*_{\alpha\beta}$. При изоморфизме $\overline{A}_{\alpha\beta}\to A^*_{\alpha\beta}$ образом $\overline{A}_\alpha$ будет $A^*_\alpha=A_\alpha(A_{\alpha\beta}\cap S)/A_{\alpha\beta}\cap S$. Покажем, что A^*_α — силовская Σ_α-подгруппа в $A_{\alpha\beta}$. Пусть $a^*\overline{\in}A^*_\alpha$, $a^*\in A^*_{\alpha\beta}$ и $\{A^*_\alpha,\ a^*\}\in\Sigma_\alpha$. Так как Σ_α-подгруппы группы $\overline{A}_{\alpha\beta}$ нильпотентны, то и Σ_α-подгруппы $A^*_{\alpha\beta}$ нильпотентны. Значит существует $b^*\overline{\in}A^*_\alpha$ и $A^{*b^*}_\alpha=A^*_\alpha$. Лемма 1 здесь применима и, следовательно, элемент $b\in A_{\alpha\beta}$ можно считать таким, что $\{b\}\in\Sigma_\alpha$. Но тогда для всякого $a_\alpha\in A_\alpha$ существует такое $a'_\alpha\in A_\alpha$, что $a_\alpha^b=a'_\alpha s$, где $s\in S\cap A_{\alpha\beta}$.

Но $a'_\alpha s\in N_{A_{\alpha\beta}}(A_\alpha)$, следовательно, $b^{-1}a_\alpha b\in N_{A_{\alpha\beta}}(A_\alpha)$. С другой стороны, A_α — силовская Σ_α-подгруппа в $A_{\alpha\beta}$. Поэтому $b^{-1}a_\alpha b\in A_\alpha$, то есть $b\in N_{A_{\alpha\beta}}(A_\alpha)$. Таким же путем мы покажем, что $b\in A_\alpha$. Однако этого быть не может, так как $b^*\overline{\in}A^*_\alpha$. Таким образом, мы получили, что A^*_α — силовская Σ_α-подгруппа в $A^*_{\alpha\beta}$.

Но при изоморфизме сохраняется свойство подгруппы быть силовской. Следовательно, $\overline{A}_\alpha$ — силовская Σ_α-подгруппа в $\overline{A}_{\alpha\beta}$.

Подгруппы $\overline{A}_\alpha$ и $\overline{A}_\beta$ образуют полную силовскую $\langle\Sigma_\alpha,\ \Sigma_\beta\rangle$-базу в конечной K-группе $\overline{A}_{\alpha\beta}$. По предположению леммы $\overline{A}_\alpha\overline{A}_\beta=\overline{A}_\beta\overline{A}_\alpha$. Берем $a_\alpha\in A_\alpha$, $a_\beta\in A_\beta$. Из последнего равенства следует, что существуют такие элементы $a'_\alpha\in A_\alpha$, $a'_\beta\in A_\beta$ и $s\in S$, что $a_\alpha a_\beta=a'_\beta a'_\alpha s$. Отсюда $s=a'^{-1}_\alpha a'^{-1}_\beta a_\alpha a_\beta$ и значит $s\in A_{\alpha\beta}$.

Докажем, что $\{s\}=(\{s\}\cap A_\alpha)\times(\{s\}\cap A_\beta)$.

Действительно, пусть $\overline{\{s\}}=\{s\}/\{s\}\cap A_\alpha)\times(\{s\}\cap A_\beta)\neq E$. Тогда из $\{s\}\in\overline{\{\Sigma_\alpha,\ \Sigma_\beta\}}$ следует, что $\overline{\{s\}}\in\overline{\{\Sigma_\alpha,\ \Sigma_\beta\}}$. Следовательно, существует $\overline{s'}\in\overline{\{s\}}$ такой, что $\{\overline{s'}\}\in\Sigma_\alpha$ (или $\{\overline{s'}\}\in\Sigma_\beta$).

По лемме 1 можно считать прообраз s' элемента $\overline{s'}$ в $\{s\}$ таким, что $\{s'\}\in\Sigma_\alpha$. Но тогда $s'\overline{\in}\{s\}\cap A_\alpha$ и, так как $s'\in\{s\}$, то $s'\overline{\in}S\cap A_\alpha$. С другой стороны, $\{s'\}(S\cap A_\alpha)\in\Sigma_\alpha$ и $\{s'\}(S\cap A_\alpha)\supset(S\cap A_\alpha)$. Однако этого быть не может, так как по лемме 2 $S\cap A_\alpha$ — силовская Σ_α-подгруппа в S и $S\cap A_\alpha\lhd S$. Значит действительно $\{s\}=(\{s\}\cap A_\alpha)\times(\{s\}\cap A_\beta)$.

Пусть теперь $s = s_1 s_2$, где $s_1 \in S \cap A_\alpha$, $s_2 \in S \cap A_\beta$. Тогда $a_\alpha a_\beta = a_\beta' a_\alpha' s = a_\beta' a_\alpha' s_2 s_1 = a_\beta' s_2 s_2^{-1} a_\alpha' s_2 s_1 = (a_\beta' s_2) \cdot (s_2^{-1} a_\alpha' s_2 s_1)$, где $a_\beta' s_2 \in A_\beta$ и $s_2^{-1} a_\alpha' s_2 s_1 \in A_\alpha$, так как $s_2 \in S$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *В условиях леммы 4 подгруппы произвольной силовской Σ-базы группы G перестановочны.*

Пусть $\langle Q_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — любая силовская Σ-база группы G и T — ее силовский нормализатор в G. Так как существует конечное число силовских Σ-баз, сопряженных с $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$, то для всякого $\alpha \in M$ существует конечное число подгрупп, сопряженных с A_α. По теореме Плоткина любые две силовские Σ_α-подгруппы группы G сопряжены. Следовательно $T = S$. Но тогда по лемме 4 любые две подгруппы из $\langle Q_\alpha | \alpha \in M \rangle$ перестановочны. Лемма 5 доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Мы должны показать, что

$$A \cap H = B \cap H.$$

Пусть $x \in A \cap H$. По лемме 5 $x = x_1 x_2$, где $x_1 \in A_{\alpha_1}$, $x_2 \in \{A_\alpha, \alpha \in M, \alpha \neq \alpha_1\}$. Следовательно, $x_1 = x x_2^{-1} \in H \cap A_{\alpha_1}$. Из (1) $x_1 \in B \cap H$ и также $x_2 \in B \cap H$. Следовательно, $x \in B \cap H$. Точно так же $A \cap H \supseteq B \cap H$.

Обозначим теперь через $L = A \cap H = B \cap H$. L — нормальна в A и в B. Значит $A \subseteq N_G(L)$, $B \subseteq N_G(L)$. Однако $A = \{L, A_{\alpha_1}\}$, $B = \{L, \overline{Q}_{\alpha_1}\}$. Согласно теореме Плоткина в группе $N_G(L)$ существует элемент a такой, что $a^{-1} A_{\alpha_1} a = \overline{Q}_{\alpha_1}$. Но $L \triangleleft N_G(L)$, следовательно, $a^{-1} A a = B$. При этом полная силовская Σ-база $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$ группы A переходит на некоторую полную силовскую Σ-базу группы B, которая обладает конечным числом сопряженных в B. По теореме 1 эта база сопряжена с полной силовской Σ-базой $\langle \overline{Q}_{\alpha_1}, A_\alpha | \alpha \in M, \alpha \neq \alpha_1 \rangle$ группы G. Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть имеют место условия а), б), в) теоремы 2. Тогда, если K-группа G обладает такой силовской Σ-базой с силовским нормализатором S, что G/S конечна и нильпотентна, то в G любые силовские Σ-базы сопряжены.

Взяв в качестве K — класс всех групп, и для каждого $\alpha \in M$ в качестве Σ_α — класс всех p_α — групп, где p_α — простое число и $p_\alpha \neq p_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, мы получим

Следствие 6. (П. А. Гольберг [5]). Если группа G обладает силовской Π-базой с силовским нормализатором S такой, что группа G/S конечна и Π-отделима, то в G любые две силовские Π-базы сопряжены.

Взяв в качестве K — класс локально разрешимых групп и для каждого $\alpha \in M$ в качестве Σ_α — класс всех Π_α-групп, где Π_α — некоторое множество простых чисел и $\Pi_\alpha \cap \Pi_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$, мы получим

Следствие 7. Если локально разрешимая группа G обладает силовской $\theta = \langle \Pi_1, \Pi_2, \cdots \rangle$-базой с силовским нормализатором S такой, что группа G/S конечна, θ-отделима и для всех $i = 1, 2, \cdots$ все

ее Π_i-подгруппы нильпотентны, то в G любые силовские ϑ-базы сопряжены.

Действительно, в этом случае все требования теоремы 2 выполняются очевидным образом, кроме в), а условие в) следует из того, что силовская ϑ-база конечных разрешимых групп превращается в холловскую ϑ-базу этой группы (см. [6]), и по лемме 2.2 работы [6] в ней имеет место сопряженность таких ϑ-баз.

Ереванский армянский государственный
педагогический институт

Поступило 1.XI.1969

Հ. Ս. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Անվերջ խմբերի չհատվող սիլովյան դասերի համախմբության նկատմամբ սիլովյան բազաների մասին *(ամփոփում)*

Կամավոր չհատվող սիլովյան դասերի Σ համախմբության համար հոդվածում մտցվում է սիլովյան Σ -բազայի գաղափարը, որը հանդիսանում է սիլովյան Π-բազաների ընդհանրացումը, որտեղ Π-ն պարզ թվերի որևէ բազմություն է։

Ապացուցվում են սիլովյան Σ -բազաների համալուծության վերաբերյալ թեորեմներ, որոնք հանդիսանում են Բերի և Գոլբերգի թեորեմների ընդհանրացումները։

G. S. MIKAELIAN. *On Silov bases of infinite groups with respect to splittable system of Silov classes* (summary)

The concept of Silov Σ-base, which is a generalisation of the familiar concept of Silov Π-base (Π—a set of simple numbers) is introduced for every splittable system of classes Σ. Two results, generalising the known theorems of Bar and Holberg, for Silov Π-bases, are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Курош.* Теория групп, Издание 3, М., 1967.
2. *А. П. Дицман, А. Г. Курош, А. И. Узков.* Sylowische Untergruppen von unendlichen Gruppen, Мат. сб., 3, 1938, 179—185.
3. *W. Specht.* Gruppentheorie, Berlin—Götingen—Heidelberg, 1956.
4. *Б. И. Плоткин.* Абстрактные силовские свойства, Тр. Уральск. Эл.-мех. института инж. ж/д. транспорта, вып. 2, 1959, 7—14.
5. *П.* А. *Гольберг.* Об одном признаке сопряженности силовских П-баз произвольной группы, Мат. сб., 36, 1955, 335—340.
6. *П. А. Гольберг.* Холловские базы некоторых классов групп, Ст. матем. ж., 1, 1960, 14—44.
7. *R. Baer.* Sylow theorems for infinite groups, Duke Math. J., 6, 1940, 598—614.