

Г. М. МУШЕГЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 1. В в е д е н и е

Пусть задана произвольная последовательность натуральных чисел $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$p_0 = 1, p_n > 2 \text{ при } n = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Нетрудно убедиться, что любое натуральное число $m > 2$ единственным образом можно представить в следующем виде:

$$m = m_n + r(p_{n+1} - 1) + s, \text{ где } \begin{cases} m_n = p_0 \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_n \\ r = 0, 1, 2, \dots, m_n - 1 \\ s = 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Обозначим через B множество чисел

$$\frac{l}{m_n}, l = 0, 1, 2, \dots, m_n, n = 1, 2, 3, \dots$$

Легко убедиться, что любое число t , удовлетворяющее условиям $0 < t < 1$ и $t \notin B$, единственным образом разлагается в ряд

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(t)}{m_k}, \text{ где } 0 < a_k(t) < p_k - 1. \quad (1.3)$$

Для заданной последовательности $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ система $\{\gamma_m(t)\}$ определяется следующим образом.

Положим

$$\gamma_1(t) \equiv 1 \text{ при } t \in [0, 1]$$

$$\gamma_m(t) = \gamma_{n,r}^{(s)}(t) \equiv \begin{cases} \sqrt{m_n} \exp \left\{ \frac{2\pi i a_{n+1}(t) \cdot s}{p_{n+1}} \right\}, & \text{при } t \in \left[\frac{r-1}{m_n}, \frac{r}{m_n} \right] \setminus B \\ 0, & \text{при } t \in \left[\frac{r-1}{m_n}, \frac{r}{m_n} \right], \end{cases} \quad (1.4)$$

где для $m > 2$ числа n , r и s определяются равенством (1.2).

Если $t \in B \cap \left[\frac{r-1}{m_n}, \frac{r}{m_n} \right]$, полагаем

$$\gamma_m(t) = \frac{\alpha(t) + \beta(t)}{2}, \text{ где } \alpha(t) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow t-0 \\ \tau \notin B}} \gamma_m(\tau), \beta(t) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow t+0 \\ \tau \notin B}} \gamma_m(\tau). \quad (1.5)$$

Заметим, что при $p_n = 2$ $n = 1, 2, \dots$ система $\{\gamma_m(t)\}$ совпадает с системой Хаара. Класс ортонормированных систем $\{\gamma_m(t)\}$ впервые был рассмотрен Н. Я. Виленкиным [1]. В работе [2] Голубовым было проведено исследование вопросов сходимости почти всюду и в метрике L_1 рядов по системам $\{\gamma_m(t)\}$ в зависимости от последовательности $\{p_n\}$.

Полное и глубокое исследование вопросов единственности рядов по системе Хаара $\{\gamma_m(x)\}$ (случай, когда $p_n = 2$; $n = 1, 2, \dots$) проведено в работах [3], [4], [5], [6]. При этом в работах [3]—[6] для системы Хаара установлен ряд теорем единственности, аналоги которых для тригонометрической системы до сих пор неизвестны.

В общем случае, когда $\{p_n\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию (1.1), для соответствующей системы $\{\gamma_m(t)\}$ Н. Я. Виленкиным [1] была установлена

Теорема 1. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k(x) \quad (1.6)$$

сходится к нулю во всех точках отрезка $[0, 1]$, то $a_k = 0$ при $k = 1, 2, \dots^*$.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. Для произвольной точки x_0 существует ряд по системе (1.4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k(x), \quad (1.7)$$

сходящийся к нулю всюду на множестве $[0, 1]$ кроме точки x_0 , и равенство $a_k = 0$ имеет место не для всех $k = 1, 2, \dots$.

При этом, как будет видно из доказательства теоремы 2, коэффициенты ряда (1.7) будут удовлетворять условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{k_n}|}{|\gamma_{k_n}(x_0)|} > 0, \quad (1.8)$$

где $\{\gamma_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — множество всех тех функций из системы $\{\gamma_m(x)\}$, которые не равны нулю в точке $x = x_0$. Следовательно, равенство нулю предела (1.8) во всех точках отрезка $[0, 1]$ является необходимым условием на коэффициенты $\{a_k\}$ для того, чтобы одноточечные множества, а следовательно и счетные множества, были множествами единственности для соответствующего класса рядов. Достаточность этого требования вытекает из следующего утверждения.

* Предположение, что не все a_k равны нулю, влечет существование последовательности вложенных отрезков $[b_k, c_k]$, в общей точке которых ряд (1.6) не сходится к нулю. В работе [1] доказательство неполное, так как не учтен тот случай, когда построенная последовательность отрезков $[b_k, c_k]$ стягивается к точке вида $\frac{e}{m_n}$. Доказательство теоремы 1, как будет показано, легко следует из теоремы 3.

Теорема 3. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \gamma_n(x), \quad (1.9)$$

где $\{\gamma_n(x)\}$ — система (1.4), обладает свойствами:

А) некоторая последовательность $|S_{N_j}(x)|$ частных сумм ряда (1.9) сходится к суммируемой функции $f(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$, кроме, быть может, счетного множества точек;

В) для любой точки $x_0 \in [0,1]$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k}}{|\gamma_{n_k}(x_0)|} = 0$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ суть все те номера n , для которых $\gamma_n(x_0) \neq 0^*$. Тогда ряд (1.9) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе (1.4).

Отметим, что после доказательства некоторых вспомогательных лемм, доказательство теоремы 2 проводится по схеме, предложенной в [3].

§ 2. Вспомогательные леммы

Определение 1. Функции $\gamma_{m,r}(x) = \gamma_{n,r}^{(s)}(x)$, $m_n < m \leq m_{n+1}$ (см. (1.2) и (1.4)) назовем функциями n -ой группы системы, а для фиксированных n и r $1 \leq r \leq m_n - 1$ функции $\gamma_{n,r}^{(s)}(x)$, $1 \leq s \leq p_{n+1} - 1$ будем называть функциями (n, r) -подгруппы n -ой группы.

Определение 2. Интервал $\Delta_{n,r} = \left(\frac{r-1}{m_n}, \frac{r}{m_n} \right)$ будем называть основным интервалом функций $\gamma_{n,r}^{(s)}$, $s=1, \dots, p_{n+1}-1$.

Определение 3. Интервалы $\Delta_{n,r}^{(j)} = \left(\frac{r-1}{m_n} + \frac{j-1}{m_{n-1}}, \frac{r-1}{m_n} + \frac{j}{m_n} \right)$, $j=1, 2, \dots, p_{n+1}$ будем называть интервалами постоянства функций $\gamma_{n,r}^{(s)}$, $s=1, 2, \dots, p_{n+1}-1$.

Ясно, что на интервалах $\Delta_{n,r}^{(j)}$, $j=1, \dots, p_{n+1}$ все функции $\gamma_{n,r}^{(s)}$, $s=1, 2, \dots, p_{n+1}-1$ постоянны.

Определение 4. Если $t_0 \in [0, 1]$ и $t_0 \notin B$, то единственную последовательность интервалов $\{\Delta_{n,r_n}\}$, удовлетворяющую условию

$$\Delta_{0,0} \supset \Delta_{1,r_1} \supset \dots \supset \Delta_{n,r_n} \supset \dots, \text{ где } t_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_{n,r_n}, \quad (2.1)$$

будем называть основной последовательностью интервалов, соответствующей точке t_0 . Функции $\gamma_{n,r_n}^{(s)}$, $n=1, 2, \dots$; $s=1, 2, \dots, p_{n+1}-1$ будем называть основным множеством функций, соответствующим точке t_0 .

Если $t_0 \in B$, то можно указать две последовательности $\{\Delta_{n,r_n}\}$ и $\{\Delta_{n,r'_n}\}$ вложенных интервалов, которые удовлетворяют соотношению

* Для системы Хаара аналог условия (В) впервые был сформулирован в [3].

(2.1). При этом легко видеть, что точка t_0 , начиная с некоторого номера N , является левым концом интервалов одной из этих последовательностей и, начиная с того же номера N , является правым концом интервалов другой последовательности.

Первую последовательность будем называть правой основной последовательностью интервалов, соответствующей точке t_0 , а вторую последовательность будем называть левой основной последовательностью, соответствующей точке t_0 . Функции $\chi_{n,r}^{(s)}$ и $\bar{\chi}_{n,r}^{(s)}$, $n=1, 2, \dots$ будем называть соответственно правосторонним и левосторонним основным множеством функций, соответствующим точке t_0 .

Лемма 1. Если $f(x)$ — суммируемая функция, определенная на $[0, 1]$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x) \quad (2.2)$$

является ее рядом Фурье по системе (1.4), то

$$Q_{m_n}(x) = \sum_{k=1}^{m_n} a_k \chi_k(x) = \frac{1}{|\Delta_{n,r}|} \int_{\Delta_{n,r}} f(t) dt \quad \text{при } x \in \Delta_{n,r} \quad (2.3)$$

$$(r = 0, 1, 2, \dots, m_n - 1).$$

Доказательство. Справедливость утверждения при $n=0$ следует из равенства

$$Q_{m_0}(x) = a_1 \chi_1(x) = \int_0^1 \chi_1(t) f(t) dt \cdot \chi_1(x) = \int_0^1 f(t) dt. \quad (2.4)$$

Предположим, что утверждение верно для n и докажем его справедливость для $n+1$. Пусть r_0 — некоторое фиксированное число, $0 \leq r_0 \leq m_n - 1$. Так как $\chi_{n,r}^{(s)}(x) = 0$ при $x \in \Delta_{n,r}$ и $r \neq r_0$, то

$$Q_{m_{n+1}}(x) = Q_{m_n}(x) + \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k \chi_k(x) = Q_{m_n}(x) + \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} a_{n,r_0}^{(s)} \chi_{n,r_0}^{(s)}(x) \quad (2.5)$$

при $x \in \Delta_{n,r_0}$.

Учитывая (2.4), при $0 \leq j_0 < p_{n+1} - 1$ имеем

$$Q_{m_{n+1}}(x) = \frac{1}{|\Delta_{n,r_0}|} \int_{\Delta_{n,r_0}} f(t) dt + \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} a_{n,r_0}^{(s)} \chi_{n,r_0}^{(s)}(x) \quad \text{при } x \in \Delta_{n,r_0}^{(j_0)}. \quad (2.6)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} a_{n,r_0}^{(s)} \chi_{n,r_0}^{(s)}(x) &= \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} \int_{\Delta_{n,r_0}} f(t) \bar{\chi}_{n,r_0}^{(s)}(t) dt \cdot \chi_{n,r_0}^{(s)}(x) = \\ &= m_n \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} \sum_{j=0}^{p_{n+1}-1} \int_{\Delta_{n,r_0}^{(j)}} f(t) \exp \left\{ \frac{2\pi i (j_0 - j)}{p_{n+1}} \right\} dt \quad \text{при } x \in \Delta_{n,r_0}^{(j_0)}, \quad (2.7) \end{aligned}$$

откуда при $x \in \Delta_{n, r_0}^{(j_0)}$ будем иметь

$$\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} a_{n, r_0}^{(s)} \gamma_{n, r_0}^{(s)}(x) = m_n \sum_{j=0}^{p_{n+1}-1} \int_{\Delta_{n, r_0}^{(j)}} f(t) dt \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} \exp \left\{ \frac{2\pi i (j_0 - j) \cdot s}{p_{n+1}} \right\} dt. \quad (2.8)$$

Легко проверяется следующее соотношение:

$$\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} \exp \left\{ \frac{2\pi i (j_0 - j) \cdot s}{p_{n+1}} \right\} = \begin{cases} p_{n+1}-1 & \text{при } j = j_0 \\ -1 & \text{при } j \neq j_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Из соотношений (2.6), (2.8) и (2.9) получим

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) = \frac{1}{|\Delta_{n, r_0}|} \sum_{j=0}^{p_{n+1}-1} \int_{\Delta_{n, r_0}^{(j)}} f(t) dt + m_n (p_{n+1} - 1) \cdot \int_{\Delta_{n, r_0}^{(j_0)}} f(t) dt - \\ - m_n \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_0}}^{p_{n+1}-1} \int_{\Delta_{n, r_0}^{(j)}} f(t) dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

при $x \in \Delta_{n, r_0}^{(j_0)}$.

Поскольку $|\Delta_{n, r_0}| = \frac{1}{m_n}$ и $|\Delta_{n, r_0}| = \frac{1}{m_{n+1}}$, из соотношения (2.10) получим

$$Q_{n+1}(x) = \frac{1}{|\Delta_{n, r_0}^{(j_0)}|} \int_{\Delta_{n, r_0}^{(j_0)}} f(t) dt \quad \text{при } x \in \Delta_{n, r_0}^{(j_0)}, \quad (2.11)$$

откуда следует справедливость утверждения леммы 1.

Отметим, что из леммы 1 следует сходимость частных сумм $\{\zeta_{m_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ряда (2.2) к $f(x)$ почти всюду и в метрике $L[0, 1]$.

Лемма 2. Пусть некоторая последовательность частных сумм $\{Q_{k_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k(x) \quad (2.12)$$

сходится к $f(x)$ всюду на множестве E . Тогда существует возрастающая последовательность целых чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$ и последовательность целых чисел $\{r_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, $0 \leq r_{n_j} \leq m_{n_j-1}$ таких, что если

$$h_j = m_{n_j} + r_{n_j} (p_{n_j+1} - 1), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Q_{h_j}(x) = f(x)$$

при всех $x \in E$, кроме, быть может, одной точки.

Доказательство. Согласно (1.2) числа k_l единственным образом можно представить в следующем виде:

$$k_l = m_{q_l} + r_l (p_{n_l+1} - 1) + s_l. \quad (2.14)$$

За счет выбора подпоследовательности из последовательности $\{k_l\}$, не нарушая общности доказательства леммы, можно считать, что числа $\{m_{q_l}\}$ строго возрастают.

Обозначим $T_l = m_{n_l} + r_{n_l} (p_{n_l+1} - 1)$, и рассмотрим частные суммы

$$Q_{k_l}(x) = \sum_{k=1}^{k_l} a_k \gamma_k(x), \quad (2.15)$$

$$Q_{T_l}(x) = \sum_{k=1}^{T_l} a_k \gamma_k(x). \quad (2.16)$$

Из определения системы (1.4) и основных интервалов $\Delta_{n,r}$ следует, что

$$Q_{k_l}(x) - Q_{T_l}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin \bar{\Delta}_{n_l, r_l}. \quad (2.17)$$

Рассмотрим следующее множество:

$$U = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{l=j}^{\infty} \bar{\Delta}_{n_l, r_{n_l}}.$$

Если U — пустое множество или содержит одну точку, то последовательность $h_l = T_l$ будет удовлетворять требованиям леммы. Допустим, что множество U содержит больше одной точки. Пусть $x_0 \in U$. Из последовательности $\{\Delta_{n_l, r_{n_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ выберем подпоследовательность $\{\Delta_{n_{l_i}, r_{n_{l_i}}}\}_{i=1}^{\infty}$ такую, чтобы имело место соотношение $x_0 \in \bar{\Delta}_{n_{l_i}, r_{n_{l_i}}}$, $i = 1, 2, \dots$. Учитывая соотношение (2.17), легко видеть, что последовательность $h_i = T_{l_i}$, $i = 1, 2, \dots$ удовлетворяет требованиям леммы 2.

§ 3. Доказательство теорем

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2, убедимся в справедливости следующего утверждения.

Утверждение а). Пусть

$$Q_{m_{n+1}}(x) = \sum_{k=1}^{m_{n+1}} a_k \gamma_k(x) = c \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{n, r_n}^{(j)}, \quad (3.1)$$

где $\Delta_{n, r_n}^{(j)}$ — интервал постоянства некоторой функции из группы n .

Для интервала $\Delta_{n+1, r_{n+1}}^{(j')}$, где $\Delta_{n+1, r_{n+1}}^{(j')}$ — интервал постоянства некоторой функции из группы $n+1$ и $\Delta_{n+1, r_{n+1}}^{(j')} \subset \Delta_{n, r_n}^{(j)}$, существует поли-

ном $\sum_{k=m_{n+1}+1}^{m_{n+2}} a_k \gamma_k(x)$, удовлетворяющий условиям

$$1) Q_{m_{n+2}}(x) = Q_{m_{n+1}}(x) + \sum_{k=m_{n+1}+1}^{m_{n+2}} a_k \gamma_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \Delta_{n, r_n}^{(j)} - \bar{\Delta}_{n+1, r_{n+1}}^{(j')} \\ c \cdot p_{n+2} & \text{при } x \in \Delta_{n+1, r_{n+1}}^{(j')} \end{cases} \quad (3.2)$$

2) Для тех номеров k $m_{n+1} < k \leq m_{n+2}$, при которых $\gamma_k(x) \neq 0$ на множестве $\Delta_{n+1, r_{n+1}}^{(j')}$, справедливо соотношение

$$\frac{|a_k|}{|\gamma_k(x)|} = \frac{|c|}{m_{n+1}}, \quad (3.3)$$

где $x \in \Delta_{n+1, r_{n+1}}^{(j')}$.

Доказательство. Рассмотрим функции $\{\gamma_k(x), \mu \leq k \leq \nu\}$, где $\mu = m_{n+1} + (r_{n+1} - 1)(p_{n+2} - 1) + 1$; $\nu = m_{n+1} + r_{n+1}(p_{n+2} - 1)$. Очевидно это совокупность всех тех функций, для которых $\Delta_{n, r_n}^{(j)}$ является основным интервалом. Рассмотрим полином

$$\sum_{k=\mu}^{\nu} a_k \gamma_k(x) = \sum_{s=1}^{p_{n+2}-1} a_{n+1, r_{n+1}}^{(s)} \gamma_{n+1, r_{n+1}}^{(s)}(x), \quad (3.4)$$

где

$$a_{n+1, r_{n+1}}^{(s)} = \frac{c}{\sqrt{m_{n+1}}} \exp \left\{ -2\pi i \frac{j'-1}{p_{n+2}} s \right\}. \quad (3.5)$$

В силу (2.9) получим

$$\sum_{k=\mu}^{\nu} a_k \gamma_k(x) = \begin{cases} -c & \text{при } x \in \Delta_{n, r_n}^{(j)} - \bar{\Delta}_{n+1, r_{n+1}}^{(j')} \\ (p_{n+2}-1) \cdot c & \text{при } x \in \Delta_{n+1, r_{n+1}}^{(j')} \\ 0 & \text{при } x \in \bar{\Delta}_{n, r_n}^{(j)}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Из соотношений (3.6) и из определения системы (1.4) для произвольных a_k , при $m_n + 1 < k < \mu$ и $\nu < k \leq m_{n+1}$ имеем

$$Q_{m_{n+2}}(x) = Q_{m_{n+1}}(x) + \sum_{k=m_{n+1}+1}^{m_{n+2}} a_k \gamma_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \Delta_{n, r_n}^{(j)} - \bar{\Delta}_{n+1, r_{n+1}}^{(j')} \\ c \cdot p_{n+2} & \text{при } x \in \Delta_{n+1, r_{n+1}}^{(j')} \end{cases} \quad (3.7)$$

С другой стороны, из (3.5) при $\mu \leq k \leq \nu$ будем иметь

$$\frac{|a_k|}{|\gamma_k(x)|} = \frac{c}{m_{n+1}}, \quad (3.8)$$

где $x \in \Delta_{n+1, r_{n+1}}^{(j')}$.

Из соотношений (3.7) и (3.8) следует справедливость утверждения а).

Доказательство теоремы 2. Пусть задана произвольная точка $x_0 \in [0, 1]$. Пусть

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots \quad (3.9)$$

— основная последовательность интервалов точки x_0 . Если $x_0 \in B$, то за (3.9) возьмем или левостороннюю, или правостороннюю последовательность интервалов точки x_0 . Положим $a_1 = c \neq 0$. Тогда согласно утверждению а) для интервала Δ_1 существует полином

$$\sum_{k=2}^{m_1} a_k \gamma_k(x),$$

удовлетворяющий соотношениям

$$Q_{m_1}(x) = a_1 \gamma_1(x) + \sum_{k=2}^{m_1} a_k \gamma_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \bar{\Delta}_1 \\ c \cdot p_1 & \text{при } x \in \Delta_1 \end{cases} \quad (3.10)$$

и

$$\frac{|a_k|}{|\gamma_k(x)|} = \frac{|c|}{1} = |c| \text{ при } x \in \Delta_1, 1 \leq k \leq m_1. \quad (3.11)$$

Допустим, что для интервала Δ_n построен полином, удовлетворяющий условиям

$$Q_{m_n}(x) = \sum_{k=1}^{m_n} a_k \gamma_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \bar{\Delta}_n \\ c \cdot m_n & \text{при } x \in \Delta_n \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\frac{|a_k|}{|\gamma_k(x)|} = |c|, x \in \Delta_n \quad (3.13)$$

при всех $k \leq m_n$, для которых $\gamma_k(x) \neq 0$ на множестве Δ_n .

Полагая $a_k = 0$ для тех $m_n < k \leq m_{n+1}$, при которых $\gamma_k(x) = 0$ на интервале Δ_{n+1} и применяя утверждение а), можно определить полином

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k \gamma_k(x), \quad (3.14)$$

удовлетворяющий условиям

$$Q_{m_{n+1}}(x) = Q_{m_n}(x) + \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k \gamma_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \bar{\Delta}_{n+1} \\ c \cdot m_n & \text{при } x \in \Delta_{n+1} \end{cases} \quad (3.15)$$

и

$$\frac{|a_k|}{|\gamma_k(x)|} = \frac{|c \cdot m_{n+1}|}{m_{n+1}} = |c|, x \in \Delta_{n+1} \quad (3.16)$$

при тех $m_n < k \leq m_{n+1}$, для которых $\gamma_k(x) \neq 0$ на множестве Δ_{n+1} .

Поскольку из определения полинома (3.14) следует соотношение

$$\sum_{k=m_n+1}^l a_k \gamma_k(x) = 0 \text{ при } x \in \bar{\Delta}_n \text{ для всех } m_n < l \leq m_{n+1},$$

легко убедиться, что, продолжая указанный процесс построения полиномов, получим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k(x),$$

который удовлетворяет требованиям теоремы 2.

При доказательстве теоремы 3 нам понадобятся некоторые утверждения:

Утверждение в). Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(x) \quad (3.17)$$

является рядом Фурье некоторой функции $f(x) \in L[0, 1]$, то коэффициенты c_k удовлетворяют условию В).

Доказательство. Пусть $x_0 \in [0, 1]$. Если $x_0 \notin B$, то обозначим через

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots \quad (3.18)$$

основную последовательность интервалов точки x_0 . Если $x_0 \in B$, то в (3.18) берется или левосторонняя, или правосторонняя основная последовательность интервалов точки x_0 .

Пусть $\{\chi_n^{(s)}(x)\}$ ($s = 1, 2, \dots, p_{n+1}-1$) — все те функции, для которых Δ_n является основным интервалом (см. определение 2) и $\{\Delta_n^{(j)}\}$ ($1 \leq j \leq p_{n+1}$) — все интервалы постоянства этих функций (см. определение 3). Если $x_0 \notin B$, то из определения системы (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\left| \int_{\Delta_n} f(t) \overline{\chi_n^{(s)}}(t) dt \right|}{|\chi_n^{(s)}(x_0)|} &\leq \frac{V \overline{m_n} \sum_{j=1}^{p_{n+1}} \int_{\Delta_n^{(j)}} f(t) \exp\left(-2\pi i \frac{j-1}{p_{n+1}} s\right) dt}{V \overline{m_n}} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{p_{n+1}} \int_{\Delta_n^{(j)}} |f(t)| dt = \int_{\Delta_n} |f(t)| dt, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

Если $x_0 \in B$, то существует число $N > 0$ такое, что при $n > N$ имеет место соотношение

$$\frac{\left| \int_{\Delta_n} f(t) \overline{\chi_n^{(s)}}(t) dt \right|}{|\chi_n^{(s)}(x_0)|} \leq \frac{1}{2} \int_{\Delta_n} |f(t)| dt. \quad (3.20)$$

Справедливость утверждения в) следует из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta_n} |f(t)| dt = 0$.

Утверждение с). Пусть задан ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \chi_k(x).$$

Множества Δ_1 и Δ_2 , являющиеся соответственно интервалами постоянства частных сумм $Q_{m_n}(x)$ и $Q_{m_{n+1}}(x)$, таковы, что имеют место условия

$$Q_{m_n}(x) = c \neq 0 \quad \text{при } x \in \Delta_1 \quad (3.21)$$

и

$$Q_{m_{n+1}}(x) = 0 \quad \text{при } x \in \Delta_1 - \Delta_2, \Delta_2 \subset \Delta_1.$$

Тогда для тех значений k , $m_n < k \leq m_{n+1}$, при которых $\gamma_k(x) = 0$ $x \in \Delta_2$, коэффициенты d_k определяются однозначно.

Действительно, пусть

$$Q_{m_n} + \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}-1} a_k \gamma_k(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta_2 - \Delta_2. \quad (3.22)$$

Тогда

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} (d_k - a_k) \gamma_k(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta_1 - \Delta_2. \quad (3.23)$$

Так как $\int_{\Delta_1} \gamma_k(x) dx = 0$ при $k > m_n$, то

$$\int_{\Delta_1} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} (d_k - a_k) \gamma_k(x) dx = - \int_{\Delta_1 - \Delta_2} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} (d_k - a_k) \gamma_k(x) dx = 0.$$

Отсюда следует, что $\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} (d_k - a_k) \gamma_k(x) = 0$ при $x \in \Delta_1$ возможно

лишь при условии $d_k - a_k = 0$ для всех $m_n < k \leq m_{n+1}$.

Утверждение d). Пусть $h_l = m_{n_l} + r_{n_l} (p_{n_l} - 1)$ и частная сумма $Q_{h_l}(x)$ ряда (3.17) удовлетворяет соотношению

$$Q_{h_l}(x) = c \text{ при } x \in \Delta_0,$$

где Δ_0 является интервалом постоянства суммы $Q_{m_{n_0}}(x)$. Тогда для произвольных $k > h_l$ существует множество Δ_k , являющееся интервалом постоянства частной суммы $Q_k(x)$, которая удовлетворяет соотношению

$$Q_k(x) = \text{const} \neq 0 \text{ при } x \in \Delta_k \subset \Delta_{n_0}. \quad (3.24)$$

Это утверждение легко следует из равенства $\int_{\Delta_0} \gamma_k(x) dx = 0$ при $k > h_l$.

Утверждение e). Пусть последовательность $\{Q_{h_l}(x)\}_{l=0}^{\infty}$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \gamma_k(x) \quad (3.25)$$

сходится к нулю почти всюду на отрезке $[0, 1]$, где

$$h_l = m_{n_l} + r_{n_l} (p_{n_l+1} - 1), \quad m_{n_l} < m_{n_j} \text{ при } i < j. \quad (3.26)$$

Если $Q_{h_{l_0}}(x) = c \neq 0$ при $x \in \Delta_{l_0}$, где Δ_{l_0} является интервалом постоянства суммы $Q_{h_{l_0}}(x)$ и коэффициенты ряда (3.25) удовлетворяют условию В), то можно указать $i' > i_0$ и множества $\Delta_{i'}^{(1)}$ и $\Delta_{i'}^{(2)}$, которые яв-

ляются интервалами постоянства функции $Q_{h_i}(x)$, удовлетворяющими соотношению

$$Q_{h_i}(x) \neq 0 \text{ при } x \in \Delta_i^{(1)} + \Delta_i^{(2)}, \text{ где } \Delta_i^{(1)} + \Delta_i^{(2)} \subset \Delta_{i_0}, \Delta_i^{(1)} \cdot \Delta_i^{(2)} = 0. \quad (3.27)$$

Доказательство. Пусть утверждение неверно. Тогда, в силу утверждения $d)$, для каждого $i > i_0$ существует только один интервал постоянства Δ_i суммы $Q_{h_i}(x)$, на котором $Q_{h_i}(x) \neq 0$ и $\Delta_i \subset \Delta_{i_0}$. Отсюда следует, что для каждого $m_n > h_{i_0}$ существует только один интервал Δ_n , для которого

$$Q_{m_n}(x) = \text{const} \neq 0 \text{ при } x \in \Delta_n \subset \Delta_{i_0}. \quad (3.28)$$

Обозначим через n' наименьшее число, для которого $m_{n'} > h_{i_0}$, и рассмотрим последовательность интервалов

$$\Delta_{i_0} \supset \Delta_{n'} \supset \Delta_{n'+1} \supset \dots \supset \dots. \quad (3.29)$$

Пусть $Q_{m_{n'}}(x) = c' \neq 0$ при $x \in \Delta_{n'}$. Так как

$$Q_{m_{n'+1}}(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta_{n'} - \bar{\Delta}_{n'+1}$$

и

$$Q_{m_{n'+1}}(x) \neq 0 \text{ при } x \in \Delta_{n'+1},$$

то на основании утверждений $c)$ и $a)$ получим

$$Q_{m_{n'+1}}(x) = c' \cdot p_{n'+1}$$

и

$$\frac{d_k}{|\gamma_k(x)|} = \frac{|c'|}{m_{n'}}$$

для тех k , $m_{n'} < k \leq m_{n'+1}$, для которых $\gamma_k(x) \neq 0$ при $x \in \Delta_{n'+1}$.

Допустим

$$Q_{m_{n'+j}}(x) = c' \cdot p_{n'+1} \cdots p_{n'+j} \text{ при } x \in \Delta_{n'+j}, \quad (3.30)$$

и для тех k , $m_{n'} < k \leq m_{n'+1}$, для которых $\gamma_k(x) \neq 0$ на интервале $\Delta_{n'+k}$ справедливо соотношение

$$\frac{|d_k|}{|\gamma_k(x)|} = \frac{|c'|}{m_{n'}} \text{ при } x \in \Delta_{n'+j}.$$

Так как

$$Q_{m_{n'+j+1}}(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta_{n'+j} - \bar{\Delta}_{n'+j+1}$$

и

$$Q_{m_{n'+j+1}}(x) \neq 0 \text{ при } x \in \Delta_{n'+j+1},$$

то, применяя утверждения $c)$ и $a)$, получим

$$Q_{m_{n'+j+1}}(x) = c' \cdot p_{n'+1} \cdots p_{n'+j} \cdot p_{n'+j+1} \text{ при } x \in \Delta_{n'+j+1} \quad (3.31)$$

и

$$\frac{|d_k|}{|\gamma_k(x)|} = \frac{|c'|}{m_{n'}} \text{ при } x \in \Delta_{n'+j+1}, \quad (3.32)$$

где k удовлетворяет соотношениям $m_{n'} < k \leq m_{n'-j+1}$ и $\gamma_k(x) = 0$ при $x \in \Delta_{n'-j+1}$.

Обозначим $x_0 = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bar{\Delta}_{n'+k}$. Если $x_0 \notin B$, то $x_0 = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Delta_{n'+k}$, и из соотношения (3.32) будем иметь

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|d_{n_k}|}{|\gamma_{n_k}(x_0)|} \neq 0, \quad (3.33)$$

где n_k — все те номера, для которых $\gamma_{n_k}(x_0) \neq 0$.

Если $x_0 \in B$, то существует число N такое, что для всех $k > N$ x_0 совпадает или с правыми или с левыми концами интервалов Δ_k . Следовательно, при $k > N$ из соотношения (3.32) имеем

$$\frac{d_k}{|\gamma_k(x_0)|} = \frac{2c'}{m_n}.$$

Таким образом (3.33) имеет место и для $x_0 \in B$. Так как (3.33) противоречит условию В), то утверждение е) доказано.

Утверждение f). В условиях утверждения е) для любой точки x_0 существует $i'' > i_0$ и интервал $\Delta_{i''}$ такие, что

$$Q_{m_{n_{i''}}}(x) \neq 0 \text{ при } x \in \Delta_{i''}, x_0 \notin \bar{\Delta}_{i''}, \quad (3.34)$$

где $\Delta_{i''}$ является интервалом постоянства суммы $Q_{m_{n_{i''}}}$.

Доказательство. При $x_0 \notin \Delta_0$ справедливость утверждения очевидна. Предположим, что $x_0 \in \Delta_{i_0}$. Согласно утверждению е) можно указать $i' > i_0$ и множества $\Delta_{i'}^{(1)}$ и $\Delta_{i'}^{(2)}$, которые являются интервалами постоянства функции $Q_{h_{i'}}(x)$, удовлетворяющими соотношению

$$Q_{h_{i'}}(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta_{i'}^{(1)} + \Delta_{i'}^{(2)} \subset \Delta, \Delta_{i'}^{(1)} \cdot \Delta_{i'}^{(2)} = 0. \quad (3.35)$$

Если замыкание хотя бы одного из указанных интервалов не содержит точки x_0 , то утверждение f), очевидно, имеет место. Пусть $x_0 \in \bar{\Delta}_{i'}^{(1)} \cdot \bar{\Delta}_{i'}^{(2)}$. Ясно, что в этом случае интервалы $\Delta_{i'}^{(1)}$ и $\Delta_{i'}^{(2)}$ имеют общий совпадающий с точкой x_0 конец.

Применяя утверждение е) относительно $Q_{h_{i'}}(x)$ и $\Delta_{i'}^{(1)}$, можно указать число $i'' > i' > i_0$ и множества $\Delta_{i''}^{(1)}$ и $\Delta_{i''}^{(2)}$, которые являются интервалами постоянства суммы $Q_{h_{i''}}(x)$, удовлетворяющими соотношению

$$Q_{h_{i''}}(x) \neq 0 \text{ при } x \in \Delta_{i''}^{(1)} + \Delta_{i''}^{(2)} \subset \Delta_{i'}^{(1)}, \Delta_{i''}^{(1)} \cdot \Delta_{i''}^{(2)} = 0. \quad (3.36)$$

Поскольку x_0 является концом интервала $\Delta_{i'}^{(1)}$, то из (3.36) будем иметь, что замыкание хотя бы одного из интервалов $\Delta_{i''}^{(1)}$ и $\Delta_{i''}^{(2)}$ не содержит точки x_0 . Отсюда и из соотношения (3.36) следует справедливость утверждения.

Доказательство теоремы 2. Пусть задан ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k(x), \quad (3.37)$$

подпоследовательность частных сумм $\{Q_{h_j}\}_{j=1}^{\infty}$ которого сходится к всюду конечной, суммируемой функции $f(x)$ во всех точках отрезка $[0,1]$, кроме, быть может, счетного множества. Согласно лемме 2 существует последовательность целых чисел $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$, где

$$h_j = m_{n_j} + r_{n_j} (p_{n_j+1} - 1), \quad n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots; \quad m_{n_j} = p_0 \dots p_{n_j}; \\ 0 \leq r_{n_j} \leq m_{n_j}, \quad (3.38)$$

для которой имеет место соотношение

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Q_{h_j}(x) = f(x) \quad (3.39)$$

для всех $x \in [0, 1]$, кроме, быть может, счетного множества. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k(x) \quad (3.40)$$

является рядом Фурье функции $f(x)$. Согласно лемме 1 подпоследовательность частных сумм $\{S_{m_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ почти всюду и в метрике L_1 . Легко проверяется следующее соотношение:

$$S_{h_j}(x) = \begin{cases} S_{m_{n_j+1}}(x) & \text{при } x < \frac{r_{n_j}}{m_{n_j}} \\ S_{m_{n_j}}(x) & \text{при } x > \frac{r_{n_j}}{m_{n_j}}, \end{cases} \quad (3.41)$$

откуда следует, что последовательность $S_{h_j}(x)$ сходится к $f(x)$ как в метрике L_1 , так и почти всюду. Следовательно, функции $\{S_{h_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Предположив, что ряд (3.37) не совпадает с рядом (3.39), обозначим через k_0 наименьшее число, для которого

$$a_{k_0} \neq c_{k_0}. \quad (3.42)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \gamma_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - c_k) \gamma_k(x). \quad (3.43)$$

Ясно, что последовательность частных сумм $\{T_{n_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ ряда (3.43) сходится к нулю почти всюду на отрезке $[0,1]$.

Пусть j_0 — наименьшее целое число, для которого $k < h_{j_0}$. Обозначим через Δ основной интервал функции $\gamma_{k_0}(x)$. Так как функции $\gamma_k(x)$ при $k = k_0, k_0+1, \dots, h_{j_0}$ на интервале Δ ортогональны, то $T_{h_{j_0}}(x)$ не может тождественно равняться нулю на множестве Δ . Обозначим через Δ тот из интервалов постоянства суммы $T_{h_{j_0}}(x)$, для которого

$$T_{h_{j_1}}(x) = \text{const} \neq 0 \text{ при всех } x \in \Delta_0. \quad (3.44)$$

Докажем, что для ряда (3.43) справедливо следующее утверждение.

Утверждение *L*). Пусть x_0 — произвольная точка отрезка $[0, 1]$, h_{j_1} — некоторое число из последовательности (3.38) и $T_{h_{j_1}}(x)$ — соответствующая частная сумма ряда (3.43). Пусть далее Δ_1 — некоторый интервал постоянства суммы $T_{h_{j_1}}(x)$, для которого

$$T_{h_{j_1}}(x) = \text{const} \neq 0 \text{ при } x \in \Delta_1. \quad (3.45)$$

Тогда для произвольного положительного числа M и точки x_0 существуют число $j_2 > j_1$ и множество Δ_2 , обладающие следующими свойствами:

1. Δ_2 является интервалом постоянства функции $T_{h_{j_2}}(x)$ и $\Delta_2 \subset \Delta_1$,
2. $x_0 \notin \Delta_2$,
3. $|Q_{h_{j_2}}(x)| > |S_{h_{j_2}}(x)| + M$ при $x \in \Delta_2$.

Действительно, применяя утверждение *f*) относительно $T_{h_{j_1}}(x)$, Δ_1 и x_0 , можно указать число $j' > j_1$ и интервал Δ' , являющийся интервалом постоянства суммы $T_{h_{j'}}(x)$ и удовлетворяющий условию

$$x_0 \notin \Delta', \Delta' \subset \Delta_1, T_{h_{j'}}(x) = \text{const} \neq 0 \text{ при } x \in \Delta'. \quad (3.46)$$

Существуют интервал $\Delta_2 \subset \Delta'$ и число $j_2 > j_1$, для которых справедливы соотношения 1), 2), 3). В противном случае для всех $j > j_1$ и $x \in \Delta'$ имело бы место

$$|Q_{h_j}(x)| \leq |S_{h_j}(x)| + M. \quad (3.47)$$

Из (3.47) следует, что функции $|Q_{h_j}(x)|_{j=1}^{\infty}$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на множестве Δ' , но тогда ряд (3.43)

$$T_{h_{j'}}(x) + \sum_{j=j'}^{\infty} (T_{h_{j+1}}(x) - T_{h_j}(x))$$

на множестве Δ' можно почленно интегрировать. Получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Delta'} T_{h_{j'}}(x) dx + \sum_{j=j'}^{\infty} \int_{\Delta'} (T_{h_{j+1}}(x) - T_{h_j}(x)) dx = \\ &= \int_{\Delta'} T_{h_{j'}}(x) dx + \sum_{j=j'}^{\infty} \sum_{k=h_{j+1}}^{h_{j+1}} \int_{\Delta'} d_h \gamma_k(x) dx. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Соотношение (3.48) выполняться не может, так как первое слагаемое отлично от нуля, а второе — равно нулю. Из полученного противоречия следует справедливость утверждения *L*).

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — совокупность всех точек множества B и тех точек, где ряд (3.37) не сходится.

Выберем произвольную последовательность положительных чисел $M_n \uparrow \infty$.

Предположим, что для точек $x_1, x_2, \dots, x_k$ и чисел $M_1, \dots, M_k$ указаны последовательности чисел и множеств $i_0 < i_1 < \dots < i_k$, $\Delta_{i_0} \supset \Delta_{i_1} \supset \dots \supset \Delta_{i_k}$, удовлетворяющих соотношениям

$$T_{h_{i_j}}(x) = \text{const} \neq 0 \text{ при } x \in \Delta_{i_j}; j = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (3.49)$$

где Δ_{i_j} является интервалом постоянства суммы $T_{h_{i_j}}(x)$ и

$$x_j \notin \bar{\Delta}_{i_j}; |Q_{h_{i_j}}(x)| > |S_{h_{i_j}}(x)| + M_j \text{ при } x \in \Delta_{i_j}, j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.50)$$

Согласно свойству L) для x_{k+1} и M_{k+1} можно указать число $i_{k+1} > i_k$ и множество $\Delta_{i_{k+1}}$, удовлетворяющие условиям

1*) $\Delta_{i_{k+1}}$ является интервалом постоянства суммы $T_{h_{i_{k+1}}}(x)$ и $\Delta_{i_{k+1}} \subset \Delta_{i_k}$,

$$2*) x_{k+1} \notin \bar{\Delta}_{i_{k+1}},$$

$$3*) |Q_{h_{i_{k+1}}}(x)| > |S_{h_{i_{k+1}}}(x)| + M_{k+1} \text{ при } x \in \Delta_{i_{k+1}}.$$

Из условия 3*) ясно, что $T_{h_{i_{k+1}}}(x) = \text{const} \neq 0$ при $x \in \Delta_{i_{k+1}}$. Продолжив указанный процесс для множеств $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$, получим последовательности

$$i_0 < i_1 < \dots < i_k < \dots$$

и

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_k \supset \dots, \quad (3.51)$$

которые удовлетворяют условиям:

$$\Delta_{i_k} \text{ является интервалом постоянства функции } T_{h_{i_k}}(x), \quad (3.52)$$

$$x_{i_k} \notin \bar{\Delta}_{i_k}, |Q_{h_{i_k}}(x)| > |S_{h_{i_k}}(x)| + M_k \geq M_k \text{ при } x \in \Delta_{i_k}. \quad (3.53)$$

Рассмотрим точку $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \bar{\Delta}_{i_k}$. Так как $B \subset \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, то x_0 является внутренней точкой для каждого интервала Δ_{i_k} , $k=0, 1, 2, \dots$. Следовательно, в точке x_0 справедливо соотношение

$$|Q_{h_{i_k}}(x_0)| \geq M_k, \text{ откуда } \lim_{k \rightarrow \infty} |Q_{h_{i_k}}(x_0)| = +\infty, \quad (3.54)$$

но точка $x_0 \in \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, следовательно последовательность $Q_{h_{i_k}}(x_0)$ должна иметь конечный предел; полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Замечание. Теорему 1 можно получить как следствие из теоремы 3. Для этого достаточно проверить, что если ряд всюду сходится, то его коэффициенты удовлетворяют условию B). Выполнение этого условия следует из того, что в любой точке $x_0 \in [0, 1]$ имеем

$a_k \chi_k(x_0) \rightarrow 0$. Тогда согласно теореме 3 ряд (1.6) является рядом Фурье функции $f(x) = 0$.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 15.I.1970

Հ. Մ. Մուշեղյան. Մի դասի օրթոնորմավ սխեմաներով շարքերի միակության մասին (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքում մի դասի օրթոնորմավ սխեմաներով շարքերի համար ստացված է նաևտորի միակության թեորեմի տիպի արդյունք:

Օգտագործված է [3] աշխատանքի մեթոդը, որտեղ նշված դասին պատկանող Հաարի սխեմայի համար ապացուցված է նույն արդյունքը:

G. M. MUSHEHIAN. *On the uniqueness of series for a class of orthogonal systems* (summary)

Cantor theorem type result is obtained for series by a certain orthogonal system. The method used in [3] is employed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. Я. Виленькин. Об одном классе полных ортонормированных систем, Известия АН СССР, серия „Математика“, 11, 1947, 363—368.
2. Б. И. Голубов. Об одном классе полных ортонормированных систем. СМЖ, 2, 1968, 297—315.
3. Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян. О единственности рядов по системе Хаара. Известия АН СССР, серия „Математика“, 28, № 6, 1964, 1391—1408.
4. Ф. Г. Арутюнян. Восстановление коэффициентов рядов по системе Хаара и Уолша, сходящихся к функциям, интегрируемым по Данжуа, Известия АН СССР, серия „Математика“, 30, 1966, 327—345.
5. А. В. Скворцов. Вычисления коэффициентов всюду сходящегося ряда Хаара, Матем. сб., 75, № 3, 1968, 349—360.
6. Н. Б. Петровская. Некоторые теоремы единственности для системы Хаара, Вестник МГУ, № 5, 1964.