ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 2, 1970 Математика

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. З. МКРТЧЯН

О ЯДРЕ СПЕКТРА САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА С ПРОСТЫМ СПЕКТРОМ, ДЕЙСТВУЮЩЕГО В СЕПАРАБЕЛЬНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1°. Настоящая заметка посвящена усовершенствованию понятия ядра спектра самосопряженного оператора A, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве H, которое было введено в работах [1, 2]. Пусть ε_λ—спектральное семейство проекционных операторов, соответствующее оператору A с простым спектром, R_Z—резольвента, g—порождающий элемент, а $\rho(\lambda)=(\varepsilon_\lambda g, g)$—спектральная плотность.

Исходным пунктом наших рассмотрений служит функция $\Phi_G(\lambda)$, существование которой гарантируется предложением 1.

Новое определение ядра спектра (см. пункт 3) прежде всего обладает тем преимуществом, что оно не требует предварительного отыскания порождающего элемента g. Что же касается участвующего в этом определении произвольного оператора G из R_H (см. пункт 2), то он играет лишь промежуточную роль и, как это следует из предложения 3, ядро спектра не зависит от выбора этого оператора.

Другим важным преимуществом нового определения является то, что ядро спектра хотя и обладает полной спектральной мерой (см. предложение 2), но все же в ряде случаев оно получается из классического спектра удалением множества точек положительной лебеговской меры или, как это следует из предложения 4, даже множества полной лебеговской меры. Следует отметить, что, например, при исследовании полноты заданной совокупности собственных функционалов (обобщенных собственных функций) конкретных самосопряженных операторов, это последнее обстоятельство оказывается существенным, поскольку оно дает возможность a priori исключить из рассмотрения достаточно густые подмножества точек из классического спектра (см. по этому поводу [3, 4]).

2°. Следуя работе [6], обозначим через S_p класс определенных во всем H вполне непрерывных операторов B таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} s_k^p < +\infty$, где s_k— собственные значения самосопряженного оператора $(B\cdot B^*)^{1/2}$ (операторы из S_2 называются операторами Гильберта-Шмидта).

Пусть R_H— совокупность неограниченных операторов G с плотными областями определения $D(G)$ и таких, что $G^{-1}\in S_2$, тогда оказывается, что имеет место следующее предложение.

Предложение 1. *При произвольном характере спектра самосопряженного оператора A с простым спектром предел*

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}G^{-1}\|^2 \tag{1*}$$

существует при любом фиксированном $G\in R_H$ для почти всех λ, как по мере $\rho(\lambda)$, так и по мере Лебега и представляет собой суммируемую по Лебегу функцию, обозначаемую через $\Phi_0(\lambda)$.

Доказательство этого предложения будет основано на нижеследующих четырех леммах. Пусть $\rho_d(\lambda)$ является функцией скачков спектральной плотности $\rho(\lambda)$, а $\lambda_k(k=1, 2, 3,\cdots)$—ее точки разрыва

Лемма 1. *Для любой функции $G(t)\in L^2_{\rho_d}$ и такой, что $G(\lambda_k)\neq 0$ при всех $k=1, 2, 3,\cdots$, предел*

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|G(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}d\rho_d(t) \tag{1}$$

равен $+\infty$ на множестве точек E_d полной ρ_d-меры, и нулю—на множество точек полной лебеговской меры.

В самом деле, поскольку

$$\rho_d(t)=\sum_{(k)}[\rho_d(\lambda_k+0)-\rho_d(\lambda_k-0)]\,Y(t-\lambda_k),$$

где $Y(t)$ — функция Хевисайда, то легко заключить, что

$$\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|G(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}d\rho_d(t)=\frac{\tau}{\pi}\sum_{(p)}\frac{|G(\lambda_p)|^2[\rho_d(\lambda_p+0)-\rho_d(\lambda_p-0)]}{(\lambda_p-\lambda)^2+\tau^2},$$

откуда немедленно убеждаемся в справедливости первой части утверждения леммы, поскольку при каждом $\lambda=\lambda_k$ правая часть очевидно больше выражения $\frac{1}{\pi}\frac{|G(\lambda_k)|^2}{\tau}[\rho(\lambda_k+0)-\rho(\lambda_k-0)]$, которое стремится к $+\infty$.

Переходя к доказательству второй части леммы, заметим, что хорошо известная лемма (см. [7], стр. 228) остается справедливой и в том случае, когда рассматриваемая в ней строго возрастающая на промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ является лишь неубывающей функцией. В самом деле, применив упомянутую лемму к вспомогательной функции $\bar f(x)=f(x)+\varepsilon(x-a)$, где ε — некоторое положительное число, а следовательно $\bar f(x)$—строго возрастающая, будем иметь

$$\mathrm{mes}^*\bar f(\bar E_{q+\varepsilon})>(q+\varepsilon)\,\mathrm{mes}^*\bar E_{q+\varepsilon}, \tag{2}$$

где множество $\bar E_{q+\varepsilon}=\{x;\ D\bar f(x)>q+\varepsilon\}$, $D\bar f(x)$ — одно из производных чисел функции $\bar f(x)$, а mes^*—внешняя мера Лебега.

Поскольку легко проверить, что множество $\bar{E}_{q-\varepsilon}$ совпадает с множеством $E_q = \{x;\ D\bar{f}(x) > q\}$, то неравенство (2) можно переписать в виде

$$\text{mes}^* E_q \leqslant \frac{1}{q+\varepsilon} \cdot \text{mes}^* \bar{f}(E_q). \tag{3}$$

и принимая во внимание произвольность ε, а также очевидное неравенство $\text{mes}^* \bar{f}(E_q) \leqslant \text{mes}^* f(E_q) + \varepsilon \cdot (b-a)$, из (3) получим окончательно $\text{mes}^* E_q \leqslant \frac{1}{q} \text{mes}^* f(E_q)$.

Положим теперь $\hat{\rho}_d(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} |G(t)|^2 d\rho_d(t)$, тогда в силу теоремы Радона-Никодима будем иметь

$$\frac{\tau}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(t)|^2 d\rho_d(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = \frac{\tau}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{\rho}_d(t)}{(t-\lambda)^2 - \tau^2}, \tag{4}$$

откуда, устремляя τ к нулю, на основании леммы 1 работы [2] получим

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(t)|^2 d\rho_d(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = \hat{\rho}_d'(\lambda) \tag{5}$$

во всех точках λ, в которых существует производная $\hat{\rho}_d'(\lambda)$.

Пусть теперь $E_{1/n} = \{t;\ D\hat{\rho}_d(t) > 1/n\}$, тогда, применив неравенство (3) к функции $\hat{\rho}_d(t)$, будем иметь

$$\text{mes}^* E_{1/n} \leqslant n \cdot \text{mes}^* \hat{\rho}_d(E_{1/n}), \tag{6}$$

но ниже будет доказано, что $\text{mes}^* \hat{\rho}_d(E_{1/n}) = 0$ при любом $n = 1, 2, 3, \cdots$, поэтому $\text{mes}^* E$, где $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$, также равна нулю. Легко убедиться далее, что множество $CE = [a, b] / E$ состоит из тех и только тех точек t, в которых $\hat{\rho}_d'(t)$ существует и равна нулю, поэтому из соотношения (5) заключаем, что для почти всех по мере Лебега $\lambda \in [a, b]$, предел (1*) равен нулю. В силу произвольности промежутка $[a, b]$ убеждаемся в справедливости второй части утверждения леммы 1. Таким образом нам осталось доказать, что $\text{mes}^* \hat{\rho}_d(E_{1/n}) = 0$.

Для этого заметим, что из $\hat{\rho}_d(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} |G(t)|^2 d\rho_d(t)$ легко следует, что неотрицательная функция $\hat{\rho}_d(t)$ также представляет собой функцию скачков, причем вся мера $\hat{\rho}_d$ отрезка $[a, b]$, концы которого не являются точками разрыва функции $\hat{\rho}_d(t)$, сосредоточена лишь в тех точках λ_k, которые попадают в этот промежуток и, стало быть,

$$\bigvee_a^b ar\, \hat{\rho}_d(t) = \hat{\rho}_d(b) - \hat{\rho}_d(a) = \sum_{\lambda_k \in [a, b]} [\hat{\rho}_d(\lambda_k + 0) - \hat{\rho}_d(\lambda_k - 0)]. \tag{7}$$

Далее, поскольку

$$\hat{\rho}_d(E_{1/n}) \subset \hat{\rho}_d([a, b]) \subseteq [\rho_d(a), \rho_d(b)] / \bigcup_{\lambda_k \in [a, b]} (\hat{\rho}_d(\lambda_k + 0), \hat{\rho}_d(\lambda_k - 0)),$$

то в силу (6) заключаем, что лебеговская мера множества $\hat{\rho}_d(E_{1/n})$ равна нулю.

Замечание. Из приведенного доказательства этой леммы следует также, что в каждой точке разрыва функции ρ_d, в которой $G(t) \neq 0$, предел (1) равен $+\infty$.

Пусть теперь $\rho_a(\lambda)$—абсолютно непрерывная часть спектральной плотности $\rho(\lambda)$, тогда известно [2] (см. также [5]), что имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Для любой функции $G(t) \in L^2 \rho_a$ предел*

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(t)|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}\, d\rho_a(t) = |G(\lambda)|^2 \rho_a'(\lambda) \tag{8}$$

на множестве точек E_a полной ρ_a-меры и полной лебеговской меры.

В самом деле, положив $\hat{\rho}_a(t) = \int_{-\infty}^{t} |G(s)|^2\, d\rho_a(s)$, в силу известной теоремы Лебега заключаем, что $\hat{\rho}_a(t)$ также абсолютно непрерывна и что $\hat{\rho}_a'(t) = |G(t)|^2 \rho_a'(t)$ на множестве $E_a = M_G \cap M_{\rho_a}$, где M_G—совокупность точек Лебега* функции $G(t)$ (относительно меры ρ_a), в которых значения Лебега конечны, а M_{ρ_a}—можество точек, где существует конечная производная $\rho_a'(t)$. При этом ясно, что множество E_a имеет полную лебеговскую, а, стало быть, и полную ρ_a-меру. Теперь уже на основании леммы 1 работы [2] можем заключить, что

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(t)|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}\, d\rho_a(t) = \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{\rho}_a(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = \hat{\rho}'(\lambda) = |G(\lambda)|^2 \rho_a'(\lambda)$$

для всех $\lambda \in E_a$.

---

* Здесь и в дальнейшем мы имеем ввиду точки Лебега по системе Витали, состоящей из всех замкнутых промежутков.

Замечание. Из анализа доказательства леммы 2 нетрудно усмотреть, что предел (8) равен $|G(\lambda_0)|^2 \rho'_a(\lambda_0)$ в каждой точке λ_0, которая является точкой Лебега для $|G(t)|^2$ и в которой существует конечная производная $\rho'_a(\lambda_0)$.

Пусть, наконец, $\rho_s(\lambda)$—сингулярная часть спектральной плотности $\rho(\lambda)$, тогда справедлива лемма.

Лемма 3. *Для произвольной функции $G(t) \in L^2_{\rho_s}$ и отличной от нуля на множестве полной ρ_s-меры предел*

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\, d\rho_s(t) \tag{9}$$

равен $+\infty$ на множестве E_s полной ρ_s-меры и равен нулю на множестве $\overline{E}_s$ полной лебеговской меры.

В самом деле, поскольку $\rho_s(t)$ является чисто сингулярной функцией, то существует такое множество E полной лебеговской меры, что $\rho_s(E)=0$, тогда очевидно, что $\hat{\rho}_s(E)$, где $\hat{\rho}_s(t) = \int_{-\infty}^{t} |G(t)|^2\, d\rho_s(t)$ также равно нулю, откуда заключаем, что $\hat{\rho}_s(t)$ тоже чисто сингулярна.

Пусть теперь $M_0 = \{t;\ G(t)=0\}$, тогда по условию леммы, $\rho_s(M_0)=0$, поэтому для любого ρ_s-измеримого множества M будем иметь

$$\hat{\rho}_s(M) = \int_M |G(t)|^2\, d\rho_s(t) = \int_{M-M_0} |G(t)|^2\, d\rho_s(t),$$

откуда нетрудно заключить, что из $\rho_s(M)=0$ следует $\hat{\rho}_s(M)=0$ и наоборот; т. е. эти меры эквивалентны. Таким образом, $\hat{\rho}'_s(t)$, будучи производной чисто сингулярной функции, равна нулю почти всюду по мере Лебега, а в силу леммы 4 работы [2] эта производная равна $+\infty$ на множестве E_s полной $\hat{\rho}_s$-меры, а, стало быть, и полной ρ_s-меры. Теперь уже, пользуясь снова теоремой Радона-Никодима и леммой 1 работы [2], будем иметь

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\, d\rho_s(t) = \lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{\rho}_s(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2} = \hat{\rho}'_s(t),$$

откуда, в силу сказанного выше, убеждаемся в справедливости леммы 3, поскольку $\hat{\rho}'_s(t)$ равна нулю на множестве $\overline{E}_s$ полной лебеговской меры.

Замечание. В силу теоремы Радона-Никодима в каждой точке Лебега функции $|G(t)|^2$ имеет место равенство $d\hat{\rho}_s(t)=|G(t)|^2 d\rho_s(t)$, поэтому, если значение Лебега в точке λ_0 отлично от нуля, а $\dot{\rho}_s(\lambda_0)=$ $=+\infty$, то предел (9) будет равен $+\infty$.

Представляя спектральную плотность в виде $\rho(t)=\rho_d(t)+\rho_a(t)+$ $+\rho_s(t)$ и принимая во внимание леммы 1, 2, 3, нетрудно доказать следующее важное для дальнейшего вспомогательное предложение.

Лемма 4. *При произвольной спектральной плотности $\rho(t)$ и любой функции $G(t)\in L^2_\rho$ и отличной от нуля на множестве полной ρ-меры предел*

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|G(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\,d\rho(t) \tag{10}$$

существует для почти всех λ как по мере ρ, так и по мере Лебега и представляет собой суммируемую по Лебегу функцию.

Образуем множество $M=E_d\cup E_s\cup(E_a\cap\tilde{E}_s\cap\tilde{E}_d)$, которое имеет полную лебеговскую меру, поскольку оно содержит в себе пересечение множеств E_a, $\tilde{E}_s$, $\tilde{E}_d$, каждое из которых, в силу доказанного выше, имеет полную лебеговскую меру. Очевидно, далее, что $\rho_a(E_a\cap\tilde{E}_s\cap$ $\cap\tilde{E}_d)=\rho_a(E_a)=\rho_a(-\infty,+\infty)$, поэтому, по доказанному выше, будем иметь

$$\rho(M)=\rho_d(M)+\rho_a(M)+\rho_s(M)\geqslant\rho_d(E_d)+\rho_a(E_a\cap\tilde{E}_s\cap\tilde{E}_d)+\rho_s(E_s)=$$
$$=\rho_d(-\infty,+\infty)+\rho_a(-\infty,+\infty)+\rho_s(-\infty,+\infty)=\rho(-\infty,+\infty).$$

Таким образом, это множество M имеет также и полную спектральную меру. Докажем теперь, что для всех $\lambda\in M$ существует конечный или бесконечный предел (10).

С этой целью перепишем (10) в виде

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|G(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\,d\rho(t)=\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|G(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\,d\rho_d(t)+$$
$$+\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|G(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\,d\rho_a(t)+\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|G(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\,d\rho_s(t), \tag{11}$$

тогда из неотрицательности всех трех слагаемых правой части соотношения (11) заключаем, что если $\lambda\in E_d$ (соответственно E_s), то в силу леммы 1 (соответственно леммы 3) предел (10) существует и равен $+\infty$. Если же $\lambda\in E_a\cap\tilde{E}_s\cap\tilde{E}_d$, то из лемм 1, 2, 3 следует, что первое и третье слагаемые в правой части (11) стремятся к нулю, а второе слагаемое стремится к конечному пределу $|G(\lambda)|^2 \rho_a'(\lambda)$. Таким образом, предел (10) существует для всех λ из множества M и очевидно представляет собой суммируемую по Лебегу функцию $\Phi(\lambda)$, эквивалентную функции $|G(\lambda)|^2 \rho'(\lambda)$, если мера ρ содержит абсолютно непрерывную составляющую ρ_a и эквивалентную тождественному нулю в противном случае.

3°. Переходим к доказательству предложения 1. Поскольку при любом $\tau \neq 0$

$$\|R_{\lambda+i\tau}\varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Phi(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\, d\rho(t), \quad \Phi(t) = V\varphi, \tag{12}$$

то, поступая так же, как и в работе [5] и сохраняя ее обозначения, будем иметь

$$\|R_{\lambda+i\tau} G^{-1}\|^2 = \sup_{\{a_k\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\sum_{(k)} \mu_k a_k \chi_k(t)\right|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\, d\rho(t), \tag{13}$$

где верхняя грань берется по всевозможным a_k таким, что $\sum_{(k)} |a_k|^2 = 1$. Из (13) по неравенству Коши—Буняковского для всех $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ получим

$$\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau} G^{-1}\|^2 \leqslant \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F^2(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\, d\rho(t), \tag{14}$$

где обозначено $F^2(t) = \sum_{(k)} \mu_k^2 |\chi_k(t)|^2$. В [5] доказано, что как $F(t)$ так и $F^2(t)$ принадлежат $L_\rho(-\infty, +\infty)$. Совершенно ясно, что функция $F(t)$ отлична от нуля на множестве полной ρ-меры, поскольку, в противном случае, нашлось бы множество положительной ρ-меры, на котором каждая из функций $\chi_k(t)$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ обращается в нуль, что противоречило бы полноте системы $\{\chi_k(t)\}$.

Пусть N_s (соответственно N_a)—совокупность точек λ, каждая из которых является точкой Лебега относительно меры ρ_s (соответственно меры ρ_a) как для $F^2(t)$, так и для всех функций $\chi_i(t)\cdot\overline{\chi_k(t)}$ $(i, k = 1, 2, 3, \cdots)$, причем значения Лебега всех этих функций в точке λ конечны, а значение Лебега функции $F^2(t)$ отлично от нуля.

Образуем множество $M^* = E_d \cup (E_s \cap N_s) \cup (E_a \cap \widetilde{E}_s \cap \widetilde{E}_d \cap N_a)$, которое, как нетрудно убедиться, имеет полную ρ-меру. В самом деле, $\rho_s(M^*) = \rho_s(M)$ и $\rho_a(M^*) = \rho_a(M)$, поскольку множество N_s (соответственно N_a) представляет собой пересечение счетного числа множеств, каждое из которых имеет полную ρ_s-меру (соответственно ρ_a-меру), а $\rho_d(M^*) = \rho_d(E_d) = \rho_d(-\infty, +\infty)$, откуда непосредственно заключаем, что $\rho(M^*) = \rho(M)$.

Докажем теперь, что при любом $\lambda_0 \in M^*$ предел (1*) существует и равен пределу

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(t)|^2}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\, d\rho(t). \tag{15}$$

Пусть сначала $\lambda_0 \in E_d$, т. е. в точке λ_0 сосредоточена положительная ρ_d-мера, а, стало быть, ρ-мера и, поскольку система $\{\chi_k(t)\}$ полна в L_ρ^2, то непременно должна найтись такая функция $\chi_{k_0}(t)$, что $\chi_{k_0}(\lambda_0) \neq 0$. Положим $a_{k_0}=1$, а все остальные a_k равными нулю, тогда очевидно будем иметь

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \|R_{\lambda_0+i\tau}\, G^{-1}\|^2 = \lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \sup_{\{a_k\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\sum\limits_{(k)} \mu_k a_k \chi_k(t)\right|^2}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\, d\rho(t) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_{k_0}^2 |\chi_{k_0}(t)|^2}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\, d\rho_d(t), \tag{16}$$

откуда, в силу замечания к лемме 1, непосредственно заключаем, что правая, а, стало быть, и левая части неравенства (16) стремятся к $+\infty$. Таким образом доказано, что во всех точках из E_d предел (1*) существует и равен $+\infty$.

Пусть теперь $\lambda_0 \in E_s \cap N_s$. Нетрудно убедиться, что множество тех точек, в которых значения Лебега относительно меры ρ_s всех функций $|\chi_k(t)|^2$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ равны нулю, имеет лишь нулевую ρ_s-меру, поэтому мы можем считать, что множество $E_s \cap N_s$ таких точек вовсе не содержит, и, стало быть, найдется такая функция $\chi_{k_0}(t)$, значение Лебега которой в точке λ_0 отлично от нуля. Положив опять $a_{k_0}=1$, а остальные a_k равными нулю, будем иметь

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \|R_{\lambda_0+i\tau}\, G^{-1}\|^2 \geqslant \lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_{k_0}^2 |\chi_{k_0}(t)|^2}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\, d\rho_s(t),$$

откуда, в силу замечания к лемме 3, убеждаемся, что предел (1*) существует и равен $+\infty$ во всех точках множества $E_s \cap N_s$, за исключением, быть может, некоторого множества нулевой ρ_s-меры.

Пусть, наконец, $\lambda_0 \in E_a \cap \widetilde{E}_s \cap \widetilde{E}_d \cap N_a$. Предположим сначала, что $\rho_a'(\lambda_0) > 0$. Исключив из множества N_a некоторое подмножество лебеговской меры нуль, мы можем считать, что в точках множества N_a ряд $\sum\limits_{(k)} \mu_k^2 |\chi_k(t)|^2$ сходится к значению Лебега функции $F^2(t)$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$F_N^2(\lambda_0) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k^2 |\chi_{k_0}(\lambda_0)|^2 \geqslant F^2(\lambda_0) - \varepsilon.$$

Положим теперь $\hat{c}_k = \frac{\mu_k \overline{\chi_k(\lambda_0)}}{F_N(\lambda_0)}$ при $k \leqslant N$ и $\hat{a}_k = 0$ при $k > N$, тогда будем иметь

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \|R_{\lambda_0+i\tau} G^{-1}\|^2 \geqslant \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \sum\limits_{(k)} \hat{a}_k \mu_k \chi_k(t) \right|^2}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2} \, d\rho_a(t) =$$

$$= \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi |F_N|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \sum\limits_{k=1}^{N} \mu_k^2 \overline{\chi_k(\lambda_0)} \chi_k(t) \right|^2 d\rho_a(t)}{(t-\lambda_0)^2 + \tau^2}. \tag{17}$$

Если же принять во внимание, что $\lambda_0 \in E_a \cap N_a$ и воспользоваться замечанием к лемме 2, то легко подсчитать, что правая часть в неравенстве (17) равна $|F_N(\lambda_0)|^2 \rho_a'(\lambda_0)$ и поэтому

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \|R_{\lambda_0+i\tau} G^{-1}\|^2 \geqslant (|F(\lambda_0)|^2 - \varepsilon) \rho_a'(\lambda_0). \tag{18}$$

Вернемся теперь к неравенству (14), которое мы запишем в виде

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \|R_{\lambda_0+i\tau} G^{-1}\|^2 \leqslant \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(t)|^2}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2} d\rho_d(t) +$$

$$+ \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(t)|^2}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2} d\rho_a(t) + \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(t)|^2}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2} d\rho_s(t),$$

тогда, поскольку $\lambda_0 \in \overline{E}_s \cap \overline{E}_d$, то будем иметь

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \|R_{\lambda_0+i\tau} G^{-1}\|^2 \leqslant \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(t)|^2}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2} d\rho_a(t)$$

и опять в силу замечания к лемме 2 получим

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \|R_{\lambda_0+i\tau} G^{-1}\|^2 \leqslant F^2(\lambda_0) \cdot \rho_a'(\lambda_0). \tag{19}$$

Сопоставляя (18) и (19) и принимая во внимание произвольность ε заключаем, что

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \|R_{\lambda_0+i\tau} G^{-1}\|^2 = |F(\lambda_0)|^2 \rho_a'(\lambda_0). \tag{20}$$

В том случае, когда $\rho_a'(\lambda_0) = 0$, справедливость соотношения (20) сразу следует только из неравенства (19), в силу неотрицательности левой части. Таким образом доказано, что предел (1*) существует во всех точках множества M^*, которое обладает полной ρ-мерой и полной лебеговской мерой. Положив

$$\Phi_G(\lambda) = \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \| R_{\lambda + i\tau} G^{-1} h \|^2, \tag{21}$$

в силу леммы 4 непосредственно заключаем, что функция $\Phi_G(\lambda)$ суммируемая по Лебегу, чем и завершается доказательство предложения 1.

Пусть теперь $S(A)$—классический спектр оператора A, т. е. дополнение к множеству регулярных точек. Доказанное выше предложение позволяет усовершенствовать введенное в работах [1, 2] понятие ядра спектра.

Определение. Ядром спектра самосопряженного оператора называется множество $S_G(A) = \{\lambda;\ \Phi_G(\lambda) > 0\}$, где G—некоторый оператор из R_H.

В нижеследующих предложениях формируются некоторые свойства ядра спектра $S_G(A)$, из которых вытекает в частности корректность данного только что определения.

Предложение 2. *При любом G из R_H ядро спектра $S_G(A)$ является подмножеством классического спектра $S(A)$, но обладает полной спектральной мерой.*

В самом деле, пусть λ_0 является регулярной точкой оператора A, тогда λ_0 принадлежит интервалу (α, β), на котором $\rho(t)$ постоянна. Разбивая интеграл в правой части (14) на две части (по интервалу (α, β) и по его дополнению), немедленно убеждаемся, что первый из этих интегралов просто равен нулю, а во втором интеграле можно перейти к пределу под знаком интеграла и поэтому предел его очевидно равен нулю. Таким образом, из $\lambda_0 \overline{\in} S(A)$ следует $\Phi_G(\lambda_0) = 0$, т. е. $\lambda_0 \overline{\in} S_G(A)$, а это означает, что $S_G(A) \subseteq S(A)$.

Докажем теперь, что $S_G(A)$ имеет полную спектральную меру. Образуем меру $\hat{\rho}_G(t)$ по формуле* $\hat{\rho}_G(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} |F_G(x)|^2 d\rho(x)$, тогда соотношение (21) в силу (15) и теоремы Радона-Никодима можно переписать в виде

$$\Phi_G(\lambda) = \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{\rho}_G(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}. \tag{22}$$

В работе [2] доказано, что множество $\hat{E}$ точек, в которых правая часть (22) существует и больше нуля, имеет полную $\hat{\rho}_G$-меру. Поскольку функция $F_G(x)$ отлична от нуля на множестве полной ρ-меры, то нетрудно заключить, что мера $\hat{\rho}_G$ эквивалентна мере ρ и, стало быть, $\rho(\hat{E}) = \rho(-\infty, +\infty)$.

* Добавленный индекс G указывает на зависимость от выбора оператора G из R_H.

Вместе с тем ясно, что множество $\hat{E}$ как раз и есть ядро спектра $S_G(A)$, поэтому предложение 2 доказано полностью.

Предложение 3. *Для любых двух операторов G_1 и G_2 из R_H симметрическая разность множеств $S_{G_1}(A)$ и $S_{G_2}(A)$ имеет меру нуль как по спектральной мере, так и по мере Лебега.*

Прежде всего, в силу предложения 2 непосредственно заключаем, что $\rho(S_{G_1}(A)) = \rho(S_{G_2}(A)) = \rho(-\infty, +\infty)$, откуда сразу следует, что симметрическая разность $S_{G_1}(A) \setminus S_{G_2}(A) \cup S_{G_2}(A) \setminus S_{G_1}(A)$ имеет нулевую спектральную меру.

Предположим теперь, что вопреки нашему утверждению, эта симметрическая разность имеет положительную лебеговскую меру, тогда без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{mes} Q > 0$, где $Q = S_{G_1} \setminus S_{G_2}$. Положим, как выше $\hat{\rho}_i(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} |F_{G_i}(t)|^2 d\rho(t)$ $(i = 1, 2)$, тогда нетрудно доказать, что мера $\hat{\rho}^1$ эквивалентна мере $\hat{\rho}^2$. В самом деле, они обе подчинены мере ρ, а в силу того, что каждая из функций F_{G_i} отлична от нуля на полной спектральной мере, из $\hat{\rho}^i(M) = \int\limits_M |F_{G_i}(t)|^2 d\rho(t)$ легко заключаем, что $\hat{\rho}^i(M) = 0$ влечет $\rho(M) = 0$, т. е. мера ρ подчинена каждой из мер $\hat{\rho}_i$ $(i=1, 2)$.

Пусть далее F — множество тех точек, в которых существует конечная производная функции $\hat{\rho}^1(t)$, F_d (соответственно F_s) множество тех точек, в которых производная функции $\hat{\rho}^1_d(t)$ (соответственно $\hat{\rho}^1_s(t)$) существует и равна нулю. Тогда, как известно, F и F_s имеют полную лебеговскую меру, а в том, что F_d также имеет полную лебеговскую меру можно убедиться, например, сопоставив лемму 1 с леммой 1 работы [2].

Таким образом, положив $\hat{Q} = Q \cap F \cap F_d \cap F_s$, будем иметь $\operatorname{mes} \hat{Q} = \operatorname{mes} Q > 0$, причем во всех точках множества $\hat{Q}$ производная функции $\hat{\rho}^1(t)$, а, стало быть, и производная функции $\hat{\rho}^1_a(t)$ больше нуля (в противном случае эти точки не будут принадлежать $S_{G_1}(A)$, а следовательно и множеству Q), поэтому $\hat{\rho}^1(\hat{Q}) \geqslant \hat{\rho}^1_a(\hat{Q}) = \int\limits_{\hat{Q}} \frac{d\hat{\rho}^1_a(t)}{dt} dt > 0$. С другой стороны, очевидно, что $\hat{\rho}^2(\hat{Q}) = 0$, поскольку $\hat{Q} \subset Q \subset CS_{G_2}(A)$, а $\rho(CS_{G_2}(A)) = 0$, что противоречит доказанной выше эквивалентности мер $\overset{*}{\rho}{}^1$ и $\overset{*}{\rho}{}^2$. Из полученного противоречия заключаем, что множество Q имеет нулевую лебеговскую меру, чем и завершается доказательство нашего предложения.

Предложение 4. *Пусть на участке* (α, β) *вещественной оси абсолютно непрерывная составляющая спектральной плотности оператора* A *отсутствует, а сама спектральная плотность является строго возрастающей функцией*, тогда при любом* $G \subseteq R_H$ *порция множества* $S(A) \setminus S_0(A)$ *на интервале* (α, β) *имеет полную лебеговскую меру.*

В самом деле, очевидно, что весь промежуток $[\alpha, \beta]$ принадлежит классическому спектру $S(A)$, тогда как в силу лемм 1 и 3 порция $S_0(A)$ на этом промежутке имеет нулевую лебеговскую меру.

Институт математики и механики
АН Арм.ССР

Поступило 10. VIII. 1969

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ, Ռ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Սեպարաբել հիլբերտյան տարածության մեջ գործող պարզ սպեկտրով ինքնահամալուծ օպերատորի սպեկտրի կորիզի վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում նշված է սպեկտրի կորիզի կառուցման նոր ինվարիանտ եղանակ, որը չի ենթադրում ծնիչ էլեմենտի նախնական կառուցումը և ցույց է տրված, որ մի շարք դեպքերում սպեկտրի կորիզն ստացվում է կլասիկ սպեկտրից դրական լեբեգյան չափի բազմություն դուրս նետելուց։

R. A. Alexandrian, R. J. Mekrtchian. *On the kernel of spectrum of a self-adjoined operator with simple spectrum in separable Hilbert space* (summary)

New invariant processe of determining the kernel of spectrum which is not based on preliminary finding of generating element is indicated. It is proved that in some cases this kernel is obtained from the classical spectrum by extraction of a subset with positive Lebesgue measure.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян.* О спектральном разложении произвольных самосопряженных операторов по собственным функционалам, ДАН СССР, 162, № 1, 1965, 11—14.
2. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* Некоторые критерии, характеризующие спектр самосопряженного оператора в абстрактном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм. ССР, „Математика", 1, № 1, 1966, № 25—34.
3. *Р. А. Александрян.* Докторская диссертация, МГУ, 1962.
4. *Р. А. Александрян.* Об одном способе построения полной системы собственных функционалов самосопряженных операторов с лебеговским спектором, ДАН АрмССР, № 5, 1965, 257—263.
5. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О построении полной системы собственных функционалов произвольного самосопряженного оператора и об исследовании их структуры, Изв. АН АрмССР, „Математика", 3, №№ 4—5, 1968, 358—368.
6. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд. „Наука", 1965.
7. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М., 1957.
8. С. *Сакс.* Теория интеграла, Изд. ИЛ., 1949, стр. 155.

* О существовании таких функций см., например, [8], стр. 155.