ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 2, 1970 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА ТИПА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

В совместной работе автора и А. Б. Нерсесяна [1] был исследован вопрос существования и единственности решения задачи типа Коши для линейных дифференциальных операторов дробного порядка, когда вместо обычных производных искомой функции берутся интегродифференциальные операторы дробных порядков в смысле Римана-Лиувилля. Путем приведения такой задачи к интегральному уравнению типа Вольтерра со слабой сингулярностью установлено существование и единственность ее решения.

В настоящей статье ставится краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.

В § 1 ставятся две взаимно сопряженные краевые задачи $(A_{\omega_0})$ и $(\tilde{A}_{\omega_0})$ с заданием определенных данных на концах промежутка $[0, l]$.

Доказывается, что решения $y(x; \lambda)$ и $z(x; \lambda)$ соответствующих двух задач типа Коши, когда выполняются условия на левом и соответственно на правом концах промежутка $[0, l]$, существуют и являются целыми функциями от параметра $\lambda$ при любом $x \in (0, l)$. Здесь же устанавливается, что существует целая функция $\omega_\rho(\lambda)$ определенного конечного порядка $\rho > 0$ и типа $l$, связанная с функциями $y(x; \lambda)$ и $z(x; \lambda)$ важным для дальнейшего интегральным соотношением

$$\int_0^l y(x; \lambda)\, z(x; \lambda^*)\, dx = \frac{\omega_\rho(\lambda) - \omega_\rho(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*}.$$

Кроме того, устанавливается, что собственные значения краевых задач $(A_{\omega_0})$ и $(\tilde{A}_{\omega_0})$ совпадают с множеством $\omega_0$-точек целой функции $\omega_\rho(\lambda)$.

Здесь может оказаться, что нули функции $\omega_\rho(\lambda) - \omega_0$, вообще говоря, не простые. По этой причине указанные краевые задачи могут порождать не только собственные, но и присоединенные функции.

В § 2 излагается метод построения биортогональных систем собственных и присоединенных функций, порожденных вышеуказанными краевыми задачами.

Отметим, что этот метод, впервые предложенный в работе [2], в связи с построением биортогональных на конечном отрезке систем целых функций типа Миттаг-Леффлера, получил важные применения в ряде других работ авторов ([3], [4], [5], [6]).

Впоследствии в статье Верблюнского [7] и в недавней обзорной статье А. Ф. Леонтьева [8] тот же метод биортогонализации был применен в вопросах разложения функций в ряды типа Дирихле.

В настоящей статье приводится новое, более усовершенствованное изложение указанного метода биортогонализации, позволяющее ввести единую нумерацию для всех собственных и присоединенных функций рассматриваемых нами краевых задач.

В заключение отметим, что вопрос полноты построенных здесь биортогональных систем или более тонкий вопрос о том, составляют ли эти системы базис в $L_2(0, l)$, имеют безусловный интерес, но их решение, по-видимому, сопряжено со значительными аналитическими трудностями.

## § 1. Постановка взаимно сопряженных краевых задач

1.1 (а) Пусть дана совокупность $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$ трех чисел $0<\gamma_j\leqslant 1$ $(j=0, 1, 2)$.

Обозначим

$$\sigma_k=\sum_{j=0}^{k}\gamma_j-1,\ \mu_k=\sigma_k+1=\sum_{j=0}^{k}\gamma_j\quad (k=0,\ 1,\ 2) \tag{1.1}$$

и предположим, что

$$\frac{1}{\rho}=\sum_{j=0}^{2}\gamma_j-1=\sigma_2=\mu_2-1>0. \tag{1.2}$$

Введем в рассмотрение дифференциальные операторы

$$D^{(\sigma_0)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}f(x),$$

$$D^{(\sigma_1)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}f(x), \tag{1.3}$$

$$D^{(\sigma_2)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_2)}}{dx^{-(1-\gamma_2)}}\frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}}\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_1}}f(x),$$

вообще говоря, дробных порядков. При этом отметим, что если $\gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=1$, то очевидно, что

$$D^{(\sigma_k)}f(x)=f^{(k)}(x)\quad (k=0,\ 1,\ 2). \tag{1.4}$$

Рассмотрим теперь задачу типа Коши

$$L\{y;\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2\}\equiv D^{(\sigma_2)}y-\{\lambda+q(x)\}y=0,\quad x\in(0,\ l] \tag{1.5}$$

$$D^{(\sigma_0)}y|_{x=0}=\sin\alpha,\ D^{(\sigma_1)}y|_{x=0}=-\cos\alpha, \tag{1.6}$$

где $\lambda$ и $\alpha$ ($\operatorname{Im}\alpha=0$)—произвольные параметры, а функция $q(x)$ (вообще говоря комплекснозначная) определена и принадлежит классу Lip 1 на промежутке $[0,\ l]$.

Из теорем 4 и 5 статьи [1] непосредственно следует, что задача типа Коши (1.5)—(1.6) имеет единственное решение $y(x;\lambda)$, непрерывное на $(0, l]$, причем такое, что

$$y(x;\lambda)\in L_1(0, l) \text{ при } \gamma_0>1-\gamma_2$$

и

$$y(x;\lambda)\in L_2(0, l) \text{ при } \gamma_0>\min\left\{\frac{1}{2},\ 1-\gamma_2\right\}. \tag{1.7}$$

в) Докажем следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть $y(x;\lambda)$—решение задачи типа Коши* (1.5)—(1.6). *Тогда справедливы утверждения*

1°. *Имеют место тождества*

$$y(x;\lambda)=\sin\alpha\,\frac{x^{\mu_0-1}}{\Gamma(\mu_0)}-\cos\alpha\,\frac{x^{\mu_1-1}}{\Gamma(\mu_1)}+$$

$$+\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}\{q(t)+\lambda\}\,y(t;\lambda)\,dt,\ x\in(0, l] \tag{1.8}$$

*и*

$$y(x;\lambda)=\sin\alpha\,x^{\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_0)-\cos\alpha\,x^{\mu_1-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_1)+$$

$$+\int_0^x (x-\tau)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)q(\tau)\,y(\tau;\lambda)\,d\tau,\ x\in(0, l], \tag{1.8'}$$

*где*

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)} \tag{1.9}$$

*—функция типа Миттаг-Леффлера.*

*Иначе говоря, функция $y(x;\lambda)$, непрерывная на $(0, l]$, одновременно является единственным решением обоих интегральных уравнений Вольтерра* (1.8) *и* (1.8′).

2°. *Функция $y(x;\lambda)$ допускает представление вида*

$$y(x;\lambda)=\sin\alpha\,\frac{x^{\mu_0-1}}{\Gamma(\mu_0)}-\cos\alpha\,\frac{x^{\mu_1-1}}{\Gamma(\mu_1)}+$$

$$+\int_0^x R(x;\tau;\lambda)\left\{\sin\alpha\,\frac{\tau^{\mu_0-1}}{\Gamma(\mu_0)}-\cos\alpha\,\frac{\tau^{\mu_1-1}}{\Gamma(\mu_1)}\right\}d\tau,\ x\in(0, l], \tag{1.10}$$

*где ядро $R(x,\tau;\lambda)$ является целой функцией параметра $\lambda$ и обладает мажорантой*

$$|R(x,\tau;\lambda)|\leqslant(M+|\lambda|)(x-\tau)^{1/\rho-1}\times$$

$$\times E_\rho\left((M+|\lambda|)(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right);\ \tau\in(0, x),\ x\in(0, l], \tag{1.10'}$$

*при этом* $M=\max\limits_{0\le x\le l}|q(x)|$.

3°. $y(x;\lambda)$, *рассматриваемая как функция параметра* $\lambda$, *является целой функцией порядка* $\rho$ *и типа* $x$ *при любом* $x\in(0,l]$.

Доказательство. 1°. Если $y(x;\lambda)$—решение задачи (1.5)—(1.6), то, пользуясь леммой 1 статьи [1], будем иметь тождественно

$$y(x;\lambda)=\sin\alpha\frac{x^{\mu_0-1}}{\Gamma(\mu_0)}-\cos\alpha\frac{x^{\mu_1-1}}{\Gamma(\mu_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_0^x(x-t)^{1/\rho-1}D^{(\sigma_0)}y(t;\lambda)\,dt,\quad x\in(0,l]. \tag{1.11}$$

Отсюда и из (1.5) следует тождество (1.8) теоремы.

Чтобы установить второе тождество отметим, во-первых, что

$$\int\limits_0^x(x-\tau)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)\frac{\tau^{\mu_j-1}}{\Gamma(\mu_j)}d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu_j)\,\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}\int\limits_0^x(x-\tau)^{\frac{k+1}{\rho}-1}\tau^{\mu_j-1}d\tau=$$

$$=x^{\mu_j-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k x^{\frac{k+1}{\rho}}}{\Gamma\left(\mu_j+\frac{k+1}{\rho}\right)}=\lambda^{-1}x^{\mu_j-1}\left\{E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_j)-\frac{1}{\Gamma(\mu_j)}\right\}(j=0,1). \tag{1.12}$$

Далее, фиксируя значение $x\in(0,+\infty)$, вычислим следующий дробный интеграл с концом в точке $x$:

$$\frac{d^{-\frac{1}{\rho}}}{d(x-\tau)^{-\frac{1}{\rho}}}\left\{(x-\tau)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_\tau^x(t-\tau)^{1/\rho-1}(x-t)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda(x-t)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\rho^{-1})\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}\int\limits_\tau^x(t-\tau)^{1/\rho-1}(x-t)^{\frac{k+1}{\rho}-1}dt=$$

$$=(x-\tau)^{\frac{1}{\rho}-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k(x-\tau)^{\frac{k+1}{\rho}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho}+\frac{k+1}{\rho}\right)}=$$

$$=\lambda^{-1}(x-\tau)^{\frac{1}{\rho}-1}\left\{E_\rho\left(\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)-\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\right\},\ \tau\in(0,x). \qquad (1.13)$$

Заметим, наконец, что на основании формулы интегрирования по частям дробных интегралов [1] и в силу тождества (1.13) имеем

$$\int_0^x (x-\tau)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)\frac{d^{-\frac{1}{\rho}}}{d\tau^{-\frac{1}{\rho}}}\{q(\tau)\,y(\tau;\lambda)\}\,d\tau=$$

$$=\int_0^x\frac{d^{-\frac{1}{\rho}}}{d(x-\tau)^{-\frac{1}{\rho}}}\left\{(x-\tau)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)\right\}q(\tau)\,y(\tau;\lambda)\,d\tau=$$

$$=\lambda^{-1}\int_0^x(x-\tau)^{1/\rho-1}\left\{E_\rho\left(\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)-\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\right\}q(\tau)\,y(\tau;\lambda)\,d\tau.\ x\in(0,l] \qquad (1.14)$$

и, в частности

$$\int_0^x(x-\tau)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)\frac{d^{-1/\rho}}{d\tau^{-1/\rho}}\{y(\tau;\lambda)\}\,d\tau=$$

$$=\lambda^{-1}\int_0^x(x-\tau)^{\frac{1}{\rho}-1}\left\{E_\rho\left(\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)-\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\right\}y(\tau;\lambda)\,d\tau,\ x\in(0,l]. \qquad (1.14')$$

Записав, далее, тождество (1.8) в виде

$$y(\tau;\lambda)-\lambda\frac{d^{-\frac{1}{\rho}}}{d\tau^{-\frac{1}{\rho}}}\{y(\tau;\lambda)\}=\sin\alpha\,\frac{\tau^{\mu_0-l}}{\Gamma(\mu_0)}-$$

$$-\cos\alpha\,\frac{\tau^{\mu_1-1}}{\Gamma(\mu_1)}+\frac{d^{-1/\rho}}{d\tau^{-1/\rho}}\{q(\tau)\,y(\tau;\lambda)\},\ \tau\in(0,l],$$

и умножив обе его части на функцию

$$\lambda(x-\tau)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right),$$

проинтегрируем полученный результат по переменной $\tau$ вдоль промежутка $(0, x)$.

Принимая во внимание формулы (1.12) и (1.14)—(1.14′), придем этим путем к тождеству

$$\frac{\lambda}{\Gamma(\rho^{-1})}\int_0^x(x-\tau)^{1/\rho-1}y(\tau;\lambda)\,d\tau=$$

$$= \sin\alpha\cdot x^{\mu_0-1}\left\{E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_0)-\frac{1}{\Gamma(\mu_0)}\right\}-\cos\alpha\, x^{\mu_1-1}\left\{E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_1)-\frac{1}{\Gamma(\mu_1)}\right\}+$$

$$+\int_0^x (x-\tau)^{1/\rho-1}\left\{E_\rho\left(\lambda(x-\tau)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)-\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\right\}q(\tau)\,y(\tau;\lambda)\,d\tau,\quad x\in(0,l],$$

откуда и следует тождество (1.9) теоремы, если принять во внимание (1.8).

2°. Рассмотрим тождество (1.8) как интегральное уравнение типа Вольтерра с ядром

$$K(x,t;\lambda)\equiv K_1(x,t;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{(x-t)^{1/\rho-1}}{\Gamma(\rho^{-1})}\,|q(t)+\lambda|, & 0\leqslant t<x\leqslant l\\ 0, & x\leqslant t\leqslant l\end{cases}$$

и с искомой функцией $y(x;\lambda)$.

Введем в рассмотрение последовательность иттерированных ядер

$$K_{n+1}(x,t;\lambda)=\int_t^x K_n(x,t_1;\lambda)\,K_1(t_1,t,\lambda)\,dt_1,\quad 0\leqslant t<x\leqslant l \tag{1.15}$$

$$(n=1,2,\cdots),$$

заметив при этом, что $K_n(x,t;\lambda)$ есть полином степени $n$ относительно параметра $\lambda$.

Заметив далее, что

$$|K_1(x,t;\lambda)|\leqslant\frac{(x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}}{\Gamma(\rho^{-1})}(M+|\lambda|),\quad 0\leqslant t<x\leqslant l,$$

с помощью индукции по $n$ получим оценки

$$|K_{n+1}(x,t;\lambda)|\leqslant\frac{(x-t)^{\frac{n+1}{\rho}-1}}{\Gamma(\rho^{-1}+n\rho^{-1})}(M+|\lambda|)^{n+1},\quad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant l \tag{1.16}$$

$$(n=0,1,2,\cdots).$$

Введем, наконец, в рассмотрение функцию

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}K_{n+1}(x,t;\lambda), \tag{1.17}$$

представляющую собой, как известно, резольвенту интегрального уравнения (1.8).

Из неравенств (1.16) следует, что ряд (1.17) при любом $t\in[0,x)$ и $x\in(0,l]$ равномерно и абсолютно сходится в каждом круге $|\lambda|<R$ $(0<R<+\infty)$ и для его суммы имеет место оценка (1.11) теоремы.

Кроме того, будучи суммой равномерно сходящегося ряда полиномов от $\lambda$, сама функция $R(x,t;\lambda)$ представляет собой целую функцию параметра $\lambda$. При этом, как легко следует из оценок (1.16), имеет место представление вида

$$R(x, t; \lambda) = (x-t)^{1/\rho-1} R^*(x, t; \lambda), \quad 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant l, \tag{1.17'}$$

где функция $R^*(x, t; \lambda)$ уже непрерывна в прямоугольнике $0 \leqslant x, t \leqslant l$.

Наконец, формула (1.10) определяет функцию $y(x; \lambda) \in L_1(0, l)$, являющуюся решением интегрального уравнения (1.8), в чем легко убедиться обычным путем—непосредственной проверкой.

3°. Так как функция $R(x, \tau; \lambda)$ является целой функцией параметра $\lambda$, то из представления (1.10) функции $y(x; \lambda)$, в силу оценки (1.11) и известных свойств функций типа Миттаг-Леффлера [2], заключаем, что $y(x; \lambda)$ является целой функцией параметра $\lambda$, имеющей рост $(\rho, x)$.

Но тогда, обращаясь к тождеству (1.9) и заметив, что в нем внеинтегральные члены являются целыми функциями от $\lambda$ порядка $\rho$ и типа $x$, мы приходим к утверждению теоремы.

В дополнение к доказанным утверждениям установим еще, что *вместе с функцией* $y(x; \lambda)$ *функции*

$$\frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} y(x; \lambda) \quad (p = 1, 2, \cdots)$$

*также непрерывны на* $(0, l]$, *причем*

$$\frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} y(x; \lambda) \in L_1(0, l) \quad \text{при } \gamma_0 > 1 - \gamma_2 \tag{1.7'}$$

*и*

$$\frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} y(x; \lambda) \in L_2(0, l) \quad \text{при} \quad \gamma_0 > \min\left\{\frac{1}{2}, 1 - \gamma_2\right\}.$$

В самом деле, во-первых, пользуясь представлением (1.10) решения $y(x; \lambda)$ задачи типа Коши (1.5)—(1.6), мы имеем

$$\frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} y(x; \lambda) = \int_0^l \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} R(x, \tau; \lambda)\, \varphi(\tau)\, d\tau \quad (p = 1, 2, \cdots), \tag{1.18}$$

где функция

$$\varphi(\tau) = \sin\alpha \frac{\tau^{\mu_0 - 1}}{\Gamma(\mu_0)} - \cos\alpha \frac{\tau^{\mu_1 - 1}}{\Gamma(\mu_1)}$$

принадлежит классу $L_1(0, l)$, а при условии $\gamma_0 > \frac{1}{2}$ —классу $L_2(0, l)$.

Заметив далее, что

$$\frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} R(x, \tau; \lambda) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{|w-\lambda|=1} \frac{R(x, \tau; w)}{(w-\lambda)^{p+1}}\, dw,$$

ввиду представления (1.17') ядра $R$ мы заключаем, что

$$\frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} R(x, \tau; \lambda) = (x-\tau)^{\frac{1}{\rho}-1} R_p^*(x, \tau; \lambda), \quad 0 \leqslant \tau < x \leqslant l, \tag{1.19}$$

где функция $R_\rho^*(x, \tau; \lambda)$ непрерывна в прямоугольнике $0 \leqslant x, \tau \leqslant l$.

Из (1.18) и (1.19) мы легко приходим к нашим утверждениям относительно функций $\frac{\partial^\rho}{\partial \lambda^\rho} y(x; \lambda)$.

В заключение отметим еще, что функции $D^{(\sigma_k)} y(x; \lambda)$ $(k=0, 1)$ также будут целыми функциями параметра $\lambda$ порядка $\rho$ и типа $x$. Действительно, из тождества (1.11), согласно общим формулам (2.12) леммы 1 статьи [1], мы будем иметь

$$D^{(\sigma_0)} y(x; \lambda) = \sin\alpha - \cos\alpha \frac{x^{\sigma_1-\sigma_0}}{\Gamma(1+\sigma_1-\sigma_0)} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\sigma_2-\sigma_0)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_2-\sigma_0-1} \{\lambda + q(t)\} y(t; \lambda)\, dt, \quad x \in (0, l],$$

$$D^{(\sigma_1)} y(x; \lambda) = -\cos\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\sigma_2-\sigma_1)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_2-\sigma_1-1} \{\lambda + q(t)\} y(t; \lambda)\, dt, \quad x \in (0, l],$$

где $\sigma_2 = \frac{1}{\rho}$. Отсюда и следует наше утверждение.

1.2 (а) Полагая, что параметры $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$ те же, что и выше, поставим задачу, являющуюся аналогом хорошо известной задачи Штурма-Лиувилля. Эта задача, которую мы назовем *задачей* $(A)$, заключается в следующем:

*В классе* $L_1(0, l)$ (*или* $L_2(0, l)$ ) *отыскать нетривиальные решения уравнения*

$$D^{(\sigma_2)} y - \{\lambda + q(x)\}\, y = 0, \quad x \in (0, l), \tag{1.20}$$

*удовлетворяющие краевым условиям*

$$D^{(\sigma_0)} y|_{x=0} \cos\alpha + D^{(\sigma_1)} y|_{x=0} \sin\alpha = 0, \tag{1.21}$$

$$D^{(\sigma_0)} y|_{x=l} \cos\beta + D^{(\sigma_1)} y|_{x=l} \sin\beta = 0, \tag{1.22}$$

*где* $\lambda$, $\alpha$ *и* $\beta$ $(\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta = 0)$ — *произвольные параметры, а* $q(x) \in \mathrm{Lip}1$.

Каждое нетривиальное решение этой задачи назовем *собственной функцией*, а соответствующее значение параметра $\lambda$ — *собственным значением*.

Введем в рассмотрение функцию

$$\omega_\rho(\lambda) = D^{(\sigma_0)} y(x; \lambda)|_{x=l} \cos\beta + D^{(\sigma_1)} y(x; \lambda)|_{x=l} \sin\beta, \tag{1.23}$$

где $y(x; \lambda)$ есть решение задачи типа Коши (1.5)—(1.6), очевидно, удовлетворяющее краевому условию (1.21).

*Очевидно* $\omega_\rho(\lambda)$ *есть целая функция от* $\lambda$ *порядка* $\rho$ *и типа* $l$.

Заметив, что решение $y(x; \lambda)$ задачи Коши (1.5)—(1.6) одновременно является и решением задачи (1.20)—(1.21), из определения

(1.23) целой функции $\omega_\rho(\lambda)$ заключаем, что множество ее нулей* совпадает с множеством собственных значений задачи (A).

Таким образом, если $\lambda_k$—нуль функции $\omega_\rho(\lambda)$, то $y(x;\lambda)$ будет собственной функцией краевой задачи (A), соответствующей этому собственному значению.

(б) Наряду с операторами $D^{(\sigma_k)}f(x)$ $(k=0, 1, 2)$ введем также в рассмотрение аналогичные операторы дробного интегродифференцирования с концом в точке $x=l$ [1]. Приняв обозначения

$$\tilde{\sigma}_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_{2-j} - 1, \tag{1.24}$$

$$\tilde{\mu}_k = \tilde{\sigma}_k + 1 = \sum_{j=0}^{k} \gamma_{2-j} \quad (k=0,\ 1,\ 2), \tag{1.25}$$

определим эти операторы следующим образом:

$$D_l^{(\tilde{\sigma}_0)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{d(l-x)^{-(1-\gamma_0)}} f(x),$$

$$D_l^{(\tilde{\sigma}_1)} f(x) \equiv -\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{d(l-x)^{-(1-\gamma_1)}} \cdot \frac{d^{\gamma_0}}{d(l-x)^{\gamma_0}} f(x), \tag{1.26}$$

$$D_l^{(\tilde{\sigma}_2)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{d(l-x)^{-(1-\gamma_0)}} \cdot \frac{d^{\gamma_1}}{d(l-x)^{\gamma_1}} \cdot \frac{d^{\gamma_0}}{d(l-x)^{\gamma_0}} f(x).$$

Отметим при этом, что если $\gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=1$, то

$$D_l^{(\tilde{\sigma}_k)} f(x) = f^{(k)}(x) \quad (k=0,\ 1,\ 2).$$

Теперь рассмотрим следующую задачу типа Коши, в определенном смысле ассоциированную с задачей (1.5)—(1.6).

*Отыскать решение $z=z(x;\lambda)$ уравнения*

$$\tilde{L}\{z;\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2\} \equiv$$

$$\equiv D_l^{(\tilde{\sigma}_2)} z - \{\lambda + q(x)\} z = 0,\ x \in [0, l), \tag{1.27}$$

*удовлетворяющее начальным условиям*

$$D_l^{(\tilde{\sigma}_0)} z(x;\lambda)|_{x=l} = \sin\beta,\quad D_l^{(\tilde{\sigma}_1)} z(x;\lambda)|_{x=l} = -\cos\beta,\quad x \in [0, l). \tag{1.28}$$

На основании теорем 4 и 5 статьи [1], а также теоремы 1, путем замены переменной $x=l-x'$, приходим к следующим утверждениям.

1°. Задача (1.27)—(1.28) имеет единственное решение $z=z(x;\lambda)$, непрерывное на полусегменте $[0, l)$, причем

$$z(x;\lambda) \in L_1(0, l) \text{ при } \gamma_2 > 1-\gamma_0$$

---

* Множество нулей целой функции $\omega_\rho(\lambda)$ при любом $\rho \geq \frac{1}{2}$ не пусто и, более того, можно доказать, что всегда оно счетно. Но по крайней мере в случае, когда $\rho$ не целое число, это утверждение непосредственно следует из общих положений теории целых функций.

и

$$z(x;\ \lambda) \in L_2(0,\ l) \text{ при } \gamma_2 > \min\left\{\frac{1}{2},\ 1-\gamma_0\right\}. \tag{1.29}$$

2°. Функция $z(x;\ \lambda)$ одновременно является решением интегрального уравнения

$$z(x;\ \lambda) = \sin\beta\ (l-x)^{\tilde{\mu}_0-1}\ E_\rho(\lambda\,(l-x)^{1/\rho};\ \tilde{\mu}_0) +$$

$$+\cos\beta\ \ (l-x)^{\tilde{\mu}_1-1}\ E_\rho(\lambda\,(l-x)^{1/\rho};\ \tilde{\mu}_1) +$$

$$+\int_x^l (\tau-x)^{1/\rho-1}\ E_\rho\left((\lambda\,(\tau-x)^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right) q(\tau)\ z(\tau;\ \lambda)\ d\tau,\ x\in[0,\ l), \tag{1.30}$$

где

$$\rho = \tilde{\sigma}_2^{-1} = \sigma_2^{-1} = \left(\sum_{j=0}^{2}\gamma_j - 1\right)^{-1} > 0.$$

3°. Функции

$$z(x;\ \lambda),\ D_l^{(\tilde{\sigma}_0)}\ z(x;\ \lambda),\ D_l^{(\tilde{\sigma}_1)}\ z(x;\ \lambda)$$

суть целые функции параметра $\lambda$ порядка $\rho$ и типа $l-x$.

Дополнительно отметим еще, что

4°. Вместе с функцией $z(x;\ \lambda)$ функции

$$\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p}\ z(x;\ \lambda) \quad (p=1,\ 2,\cdots)$$

также непрерывны на полусегменте $[0,\ l)$, причем

$$\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p}\ z(x;\ \lambda) \in L_1(0,\ l) \text{ при } \gamma_2 > 1-\gamma_0$$

и

$$\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p}\ z(x;\ \lambda) \in L_2(0,\ l) \quad \text{при } \gamma_2 > \min\left\{\frac{1}{2},\ 1-\gamma_0\right\}.$$

Наконец, естественно и в данном случае поставить краевую задачу.

*В классе $L_1(0,\ l)$ (или $L_2(0,\ l)$) отыскать нетривиальные решения уравнения*

$$D_l^{(\tilde{\sigma}_2)}\ z - \{\lambda + q(x)\}\ z = 0, \quad x\in[0,\ l), \tag{1.31}$$

*удовлетворяющие краевым условиям*

$$D_l^{(\tilde{\sigma}_0)}\ z|_{x=0}\cos\alpha + D_l^{(\tilde{\sigma}_1)}\ z|_{x=0}\sin\alpha = 0, \tag{1.32}$$

$$D_l^{(\tilde{\sigma}_0)}\ z|_{x=l}\cos\beta + D_l^{(\tilde{\sigma}_1)}\ z|_{x=l}\sin\beta = 0. \tag{1.33}$$

Эту задачу, в определенном смысле ассоциированную с задачей (A), мы будем называть *задачей* $(\tilde{A})$.

Если $z = z(x; \lambda)$ есть решение задачи (1.27)—(1.28), то, вводя в рассмотрение целую функцию

$$\tilde{\omega}_\rho(\lambda) = -D_l^{(\tilde{\sigma}_2)} z(x; \lambda)|_{x=0} \cos\alpha - D_l^{(\tilde{\sigma}_1)} z(x; \lambda)|_{x=0} \sin\alpha, \tag{1.34}$$

легко видеть, что множество ее нулей совпадает с множеством собственных значений задачи $(\tilde{A})$.

Из утверждений (1.7) и (1.29) легко следует, что обе задачи типа Коши (1.5)—(1.6) и (1.27)—(1.28) при условии $\gamma_0+\gamma_2>1$ имеют единственные решения $y(x; \lambda)$ и $z(x; \lambda)$, причем для любого $p=0, 1, 2, \cdots$

$$\left\{\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p} y(x; \lambda),\ \frac{\partial^p}{\partial\lambda^p} z(x; \lambda)\right\} \in L_2(0, l) \quad \text{при } \gamma_0+\gamma_2>1 \tag{1.35}$$

и

$$\left\{\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p} y(x; \lambda),\ \frac{\partial^p}{\partial\lambda^p} z(x; \lambda)\right\} \in L_2(0, l) \quad \text{при } \gamma_0>\frac{1}{2},\ \gamma_2>\frac{1}{2}.$$

(в) Положим далее, что параметры $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$ удовлетворяют условию

$$\gamma_0+\gamma_2>1 \tag{1.36}$$

или, в частности условию

$$\gamma_0>\frac{1}{2},\quad \gamma_2>\frac{1}{2}. \tag{1.36'}$$

Докажем теорему

Теорема 2. 1°. *Справедливо тождество*

$$\omega_\rho(\lambda) \equiv \tilde{\omega}_\rho(\lambda) \tag{1.37}$$

*и, таким образом, множества собственных значений краевых задач* $(A)$ *и* $(\tilde{A})$ *совпадают.*

2°. *Для произвольных значений параметров* $\lambda$ *и* $\lambda^*$ *имеет место формула*

$$\int_0^l y(x; \lambda)\, z(x; \lambda^*)\, dx = \frac{\omega_\rho(\lambda)-\omega_\rho(\lambda^*)}{\lambda-\lambda^*}. \tag{1.38}$$

Доказательство. Согласно определению самих функций $y(x; \lambda)$ и $z(x; \lambda^*)$ как решений задач типа Коши мы имеем

$$D^{(\sigma_2)} y(x; \lambda) - \{\lambda + q(x)\} y(x; \lambda) = 0,\quad x \in (0, l],$$

$$D^{(\sigma_0)} y(x; \lambda)|_{x=0} = \sin\alpha,\quad D^{(\sigma_1)} y(x; \lambda)|_{x=0} = -\cos\alpha$$

и

$$D_l^{(\tilde{\sigma}_2)} z(x; \lambda^*) - \{\lambda^* + q(x)\} z(x; \lambda^*) = 0,\quad x \in [0, l),$$

$$D_l^{(\tilde{\sigma}_0)} z(x; \lambda^*)|_{x=l} = \sin\beta,\quad D_l^{(\tilde{\sigma}_1)} z(x; \lambda^*)|_{x=l} = -\cos\beta.$$

Отсюда следует тождество

$$(\lambda - \lambda^*)\, y(x;\lambda)\, z(x;\lambda^*) =$$

$$= z(x;\lambda^*)\, D^{(\alpha_0)} y(x;\lambda) - y(x;\lambda)\, \widetilde{D}_l^{(\alpha_0)} z(x;\lambda^*), \quad x \in (0, l) \tag{1.39}$$

и формулы

$$\widetilde{D}_l^{(\alpha_0)} z(x;\lambda^*)\, D^{(\alpha_1)} y(x;\lambda)\Big|_0^l =$$

$$= \sin\beta\, D^{(\alpha_1)} y(x;\lambda)\big|_{x=l} + \cos\alpha\, \widetilde{D}_l^{(\alpha_0)} z(x;\lambda^*)\big|_{x=0}, \tag{1.40}$$

$$\widetilde{D}_l^{(\alpha_1)} z(x;\lambda^*)\, D^{(\alpha_0)} y(x;\lambda)\Big|_0^l =$$

$$= -\cos\beta\, D^{(\alpha_0)} y(x;\lambda)\big|_{x=l} - \sin\alpha\, \widetilde{D}_l^{(\alpha_1)} z(x;\lambda^*)\big|_{x=0}. \tag{1.41}$$

Наконец, из (1.40) и (1.41), приняв во внимание определения (1.23) и (1.34) целых функций $\omega_\rho(\lambda)$ и $\widetilde{\omega}_\rho(\lambda)$, получим также формулу

$$\widetilde{D}_l^{(\alpha_0)} z(x;\lambda^*)\, D^{(\alpha_1)} y(x;\lambda)\Big|_0^l - \widetilde{D}_l^{(\alpha_1)} z(x;\lambda^*)\, D^{(\alpha_0)} y(x;\lambda)\Big|_0^l =$$

$$= \omega_\rho(\lambda) - \widetilde{\omega}_\rho(\lambda^*). \tag{1.42}$$

Отметим теперь, что

$$y(x;\lambda)\, z(x;\lambda^*) \in L_1(0, l),$$

так как в силу дополнительного замечания к теореме 1 функция $y(x;\lambda) \in L_1(0, l)$ непрерывна на промежутке $(0, l]$; из аналогичных соображений следует, что функция $z(x;\lambda^*) \in L_1(0, l)$ непрерывна на $[0, l)$.

Поэтому, интегрируя соотношение (1.39) вдоль $(0, l)$, получим тождество

$$(\lambda - \lambda^*) \int_0^l y(x;\lambda)\, z(x;\lambda^*)\, dx =$$

$$= \int_0^l \{z(x;\lambda^*)\, D^{(\alpha_0)} y(x;\lambda) - y(x;\lambda)\, \widetilde{D}_l^{(\alpha_0)} z(x;\lambda^*)\}\, dx. \tag{1.43}$$

справедливое для любых значений параметров $\lambda$ и $\lambda^*$.

Заметим теперь, что в силу свойств дробных интегралов [1], справедливо равенство

$$J(\lambda, \lambda^*) = \int_0^l z(x;\lambda^*)\, D^{(\alpha_0)} y(x;\lambda)\, dx =$$

$$= \int_0^l z(x;\lambda^*) \frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}} \frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} y(x;\lambda)\, dx =$$

$$= \int_0^l \frac{d^{-(1-\gamma_3)}}{d(l-x)^{-(1-\gamma_3)}} z(x;\lambda^*) \frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} y(x;\lambda)\, dx. \tag{1.44}$$

Заметим далее, что, согласно определению дробных производных и операторов $\widetilde{D}_l^{(\sigma_k)}$, мы имеем [1]

$$\frac{d^{\gamma}}{dx^{\gamma}} \equiv \frac{d}{dx} \cdot \frac{d^{-(1-\gamma)}}{dx^{-(1-\gamma)}} \text{ и } \frac{d^{\gamma}}{d(l-x)^{\gamma}} \equiv -\frac{d}{dx} \cdot \frac{d^{-(1-\gamma)}}{d(l-x)^{-(1-\gamma)}} (0<\gamma<1),$$

$$\widetilde{D}_l^{(\sigma_0)} \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_3)}}{d(l-x)^{-(1-\gamma_3)}} \text{ и } \widetilde{D}_l^{(\sigma_1)} \equiv -\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{d(l-x)^{-(1-\gamma_1)}} \cdot \frac{d^{\gamma_3}}{d(l-x)^{\gamma_3}}.$$

Поэтому из (1.44) интегрированием по частям получаем

$$J(\lambda;\lambda^*) \equiv \int_0^l \widetilde{D}_l^{(\sigma_0)} z(x;\lambda^*) \frac{d}{dx} D^{(\sigma_1)} y(x;\lambda)\, dx =$$

$$= \widetilde{D}_l^{(\sigma_0)} z(x;\lambda^*)\, D^{(\sigma_1)} y(x;\lambda)\Big|_0^l +$$

$$+ \int_0^l \frac{d^{\gamma_3}}{d(l-x)^{\gamma_3}} z(x;\lambda^*) \frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}} \cdot \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} y(x;\lambda)\, dx =$$

$$= \widetilde{D}_l^{(\sigma_0)} z(x;\lambda^*)\, D^{(\sigma_1)} y(x;\lambda)\Big|_0^l + \int_0^l \frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{d(l-x)^{-(1-\gamma_1)}} \frac{d^{\gamma_3}}{d(l-x)^{\gamma_3}} \times$$

$$\times z(x;\lambda^*) \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} y(x;\lambda)\, dx. \tag{1.45}$$

Но аналогичные рассуждения в свою очередь приводят к равенству

$$\int_0^l \frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{d(l-x)^{-(1-\gamma_1)}} \frac{d^{\gamma_3}}{d(l-x)^{\gamma_3}} z(x,\lambda^*) \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} y(x;\lambda)\, dx =$$

$$= -\int_0^l \widetilde{D}_l^{(\sigma_1)} z(x;\lambda^*) \frac{d}{dx} D^{(\sigma_0)} y(x;\lambda)\, dx = -\widetilde{D}_l^{(\sigma_1)} z(x;\lambda^*) D^{(\sigma_0)} y(x;\lambda)\Big|_0^l +$$

$$+ \int_0^l y(x;\lambda)\, \widetilde{D}^{(\sigma_2)} z(x;\lambda^*)\, dx. \tag{1.46}$$

Из (1.44), (1.45) и (1.46) в силу формулы (1.42) получаем

$$\int_0^l \{z(x;\lambda^*)\, D^{(\sigma_2)} y(x;\lambda) - y(x;\lambda)\, \widetilde{D}_l^{(\sigma_2)} z(x;\lambda^*)\}\, dx =$$

$$= \omega_\rho(\lambda) - \widetilde{\omega}_\rho(\lambda^*),$$

откуда и из (1.43) вытекает тождество

$$(\lambda - \lambda^*) \int_0^l y(x; \lambda)\, z(x; \lambda^*)\, dx = \omega_\rho(\lambda) - \tilde{\omega}_\rho(\lambda^*). \tag{1.47}$$

Если учесть (1.43), положив здесь $\lambda^* = \lambda$, получим

$$\omega_\rho(\lambda) \equiv \tilde{\omega}_\rho(\lambda),$$

откуда и вытекает, с учетом (1.47), формула (1.38) теоремы.

Так как согласно этой теореме собственные значения задач $(A)$ и $(\tilde{A})$ совпадают, то естественно называть эти задачи *взаимно сопряженными*.

(г) Можно рассматривать также задачи более общей природы

$$\left.\begin{aligned} &D^{(\sigma_2)} y - \{\lambda + q(x)\} y = 0, \quad x \in (0, l) \\ &D^{(\sigma_0)} y|_{x=0} \cos\alpha + D^{(\sigma_1)} y|_{x=0} \sin\alpha = 0 \\ &D^{(\sigma_0)} y|_{x=l} \cos\beta + D^{(\sigma_1)} y|_{x=l} \sin\beta = \omega_0 \end{aligned}\right\} (A_{\omega_0}) \tag{1.48}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{D}_l^{(\sigma_2)} z - \{\lambda + q(x)\} z = 0, \quad x \in (0, l) \\ &-\tilde{D}_l^{(\sigma_2)} z|_{x=0} \cos\alpha - \tilde{D}_l^{(\sigma_1)} z|_{x=0} \sin\alpha = \omega_0 \\ &\tilde{D}_l^{(\sigma_0)} z|_{x=l} \cos\beta + \tilde{D}_l^{(\sigma_1)} z|_{x=l} \sin\beta = 0 \end{aligned}\right\} (\tilde{A}_{\omega_0}), \tag{1.49}$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\omega_0$ — произвольные, *вообще говоря, комплексные числа*.

Определив опять функции $\omega_\rho(\lambda)$ и $\tilde{\omega}_\rho(\lambda)$ посредством формул (1.23) и (1.34), соответственно, легко видеть, что теорема 2 остается в силе.

Таким образом, задачи $(A_{\omega_0})$ и $(\tilde{A}_{\omega_0})$ также можно считать взаимно сопряженными, так как множество собственных значений обеих этих задач совпадает с множеством нулей целой функции

$$\omega_\rho(\lambda) - \omega_0 \equiv \tilde{\omega}_\rho(\lambda) - \omega_0.$$

## § 2. Построение биортогональной системы собственных и присоединенных функций

2.1 (а) Перейдем теперь к построению биортогональной системы собственных и присоединенных функций наших взаимно сопряженных задач $(A_{\omega_0})$ и $(\tilde{A}_{\omega_0})$.

Предположим, что для данного фиксированного значения $\omega_0$ функция $\omega_\rho(\lambda) - \omega_0$ имеет счетное множество нулей.

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность всех нулей функции $\omega_\rho(\lambda) - \omega_0$, пронумерованных в порядке неубывания их модулей

$$0 \leqslant |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \cdots$$

с условием, что каждый нуль записывается столько раз, какова его кратность.

Для данного натурального числа $n \geqslant 1$ обозначим через $p_n \geqslant 1$, очевидно, конечную кратность появления числа $\lambda_n$ в последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Обозначим далее через $s_n$ кратность появления числа $\lambda_n$ в совокупности $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

Очевидно, что при любом $n \geqslant 1$ будем иметь $1 \leqslant s_n \leqslant p_n$.

Теперь для данного $n \geqslant 1$ рассмотрим функцию

$$\frac{(\lambda - \lambda_n)^{p_n}}{\omega_\rho(\lambda) - \omega_0},$$

регулярную в окрестности точки $\lambda = \lambda_n$. Поэтому, обозначая

$$A_j(\lambda_n) = \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{d\lambda^j}\left[\frac{(\lambda - \lambda_n)^{p_n}}{\omega_\rho(\lambda) - \omega_0}\right]\right\}_{\lambda=\lambda_n} \tag{2.1}$$

и

$$Q_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{p_n - s_n} A_j(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)^j, \tag{2.2}$$

в достаточно малой окрестности точки $\lambda = \lambda_n$ будем иметь

$$Q_n(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_n)^{p_n}}{\omega_\rho(\lambda) - \omega_0} - \sum_{j=p_n - s_n + 1}^{\infty} A_j(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)^j. \tag{2.3}$$

Введем далее в рассмотрение целую функцию

$$\Omega_n(\lambda) = \frac{\{\omega_\rho(\lambda) - \omega_0\}\, Q_n(\lambda)}{(s_n - 1)!\,(\lambda - \lambda_n)^{p_n - s_n + 1}} \tag{2.4}$$

порядка $\rho$ и типа $l$ и покажем, что она обладает следующим свойством:

$$\Omega_n^{(r)}(\lambda_\nu) = \begin{cases} 0 \text{ при } r = 0, 1, \cdots, p_\nu - 1, & \lambda_\nu \neq \lambda_n \\ 1 \text{ при } r = s_n - 1, & \lambda_\nu = \lambda_n \\ 0 \text{ при } r \neq s_n - 1, & 0 \leqslant r \leqslant p_n - 1, \ \lambda_\nu = \lambda_n. \end{cases} \tag{2.5}$$

В самом деле, при $\lambda_\nu \neq \lambda_n$ функция $\Omega_n(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_\nu$ имеет нуль порядка $p_\nu$. Поэтому первое из свойств (2.5) функции $\Omega_n(\lambda)$ просто очевидно.

Далее, в окрестности точки $\lambda = \lambda_n$ в силу формулы (2.3) имеет место представление вида

$$\Omega_n(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_n)^{s_n - 1}}{(s_n - 1)!} - \frac{\omega_\rho(\lambda) - \omega_0}{(s_n - 1)!} \sum_{j=0}^{\infty} A_{p_n - s_n + 1 + j}(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)^j,$$

откуда легко следуют и остальные два из свойств (2.5) функции $\Omega_n(\lambda)$.

Обратимся теперь к основному тождеству (1.38) теоремы 2, записав его в виде

$$\frac{\{\omega_\rho(\lambda)-\omega_0\}-\{\omega_\rho(\lambda^*)-\omega_0\}}{\lambda-\lambda^*}=\int_0^l y(x;\lambda)\,z(x;\lambda^*)\,dx. \tag{2.6}$$

Берем $k$-кратную производную от обеих частей тождества (2.6) по переменной $\lambda^*$, положив затем $\lambda^*=\lambda_n$. В результате мы получим тождество

$$\{\omega_\rho(\lambda)-\omega_0\}\frac{k!}{(\lambda-\lambda_n)^{k+1}}-\sum_{j=0}^{k}C_k^j\frac{\partial^j\{\omega_\rho(\lambda^*)-\omega_0\}}{\partial\lambda_j^{*j}}\bigg|_{\lambda^*=\lambda_n}\frac{(k-j)!}{(\lambda-\lambda_n)^{k-j+1}}=$$

$$=\int_0^l y(x;\lambda)\frac{\partial^k z(x;\lambda^*)}{\partial\lambda^{*k}}\bigg|_{\lambda^*=\lambda_n}dx.$$

Однако, в силу того, что

$$\frac{\partial^j\{\omega_\rho(\lambda^*)-\omega_0\}}{\partial\lambda^{*j}}\bigg|_{\lambda=\lambda_n}=0\quad(j=0,1,\cdots,p_n-1),$$

наше тождество при $0\leqslant k\leqslant p_n-1$ принимает следующий вид:

$$\{\omega_\rho(\lambda)-\omega_0\}\frac{k!}{(\lambda-\lambda_n)^{k+1}}=\int_0^l\frac{\partial^k z(x;\lambda)}{\partial\lambda^k}\bigg|_{\lambda=\lambda_n}y(x;\lambda)\,dx. \tag{2.7}$$

Положим в тождестве (2.7)

$$k=p_n-s_n-j\quad(0\leqslant j\leqslant p_n-s_n),$$

умножим обе его части на

$$\frac{A_j(\lambda_n)}{(s_n-1)!\,(p_n-s_n-j)!}$$

и произведем суммирование полученного выражения по индексу $j=0, 1, 2,\cdots, p_n-s_n$. Таким образом, если принять во внимание определение (2.4) функции $\Omega_n(\lambda)$, будем иметь

$$\{\omega_\rho(\lambda)-\omega_0\}\sum_{j=0}^{p_n-s_n}A_j(\lambda_n)\frac{(\lambda-\lambda_n)^{j-p_n+s_n-1}}{(s_n-1)!}=$$

$$=\{\omega_\rho(\lambda)-\omega_0\}\frac{\sum\limits_{j=0}^{p_n-s_n}A_j(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)^j}{(s_n-1)!\,(\lambda-\lambda_n)^{p_n-s_n+1}}\equiv\Omega_n(\lambda)=$$

$$=\int_0^l y(x;\lambda)\left\{\sum_{j=0}^{p_n-s_n}\frac{A_j(\lambda_n)}{(p_n-s_n-j)!\,(s_n-1)!}\frac{\partial^{p_n-s_n-j}}{\partial\lambda^{p_n-s_n-j}}z(x;\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_n}dx=$$

$$=\int_0^l y(x;\lambda)\left\{\sum_{r=0}^{p_n-s_n}\frac{A_{p_n-s_n-r}(\lambda_n)}{(s_n-1)!\,r!}\frac{\partial^r z(x;\lambda)}{\partial\lambda^r}\right\}_{\lambda=\lambda_n}dx. \tag{2.8}$$

2.1 (б) Введем в рассмотрение две последовательности функций $\{Y_n(x)\}_1^\infty$ и $\{Z_n^*(x)\}_1^\infty$ посредством формул

$$Y_n(x)=\left\{\frac{\partial^{s_n-1}y(x;\lambda)}{\partial\lambda^{s_n-1}}\right\}_{\lambda=\lambda_n}\quad(n=1,2,\cdots),\tag{2.9}$$

$$Z_n^*(x)=\left\{\sum_{r=0}^{p_n-s_n}\frac{A_{p_n-s_n-r}(\lambda_n)}{(s_n-1)!\,r!}\frac{\partial^r z(x;\lambda)}{\partial\lambda^r}\right\}_{\lambda=\lambda_n}\quad(n=1,2,\cdots).\tag{2.10}$$

Тогда формула (2.8) запишется в виде

$$\Omega_n(\lambda)=\int_0^l y(x;\lambda)\,Z_n^*(x)\,dx\quad(n=1,2,\cdots).\tag{2.11}$$

Можно провести аналогичное построение, поменяв местами функции $y(x;\lambda)$ и $z(x;\lambda)$. А именно, если ввести в рассмотрение последовательности функций $\{Y_n^*(x)\}_1^\infty$ и $\{Z_n(x)\}_1^\infty$, положив

$$Y_n^*(x)=\left\{\sum_{r=0}^{p_n-s_n}\frac{A_{p_n-s_n-r}(\lambda_n)}{(s_n-1)!\,r!}\frac{\partial^r y(x;\lambda)}{\partial\lambda^r}\right\}_{\lambda=\lambda_n}\quad(n=1,2,\cdots),\tag{2.12}$$

$$Z_n(x)=\left\{\frac{\partial^{s_n-1}z(x;\lambda)}{\partial\lambda^{s_n-1}}\right\}_{\lambda=\lambda_n}\quad(n=1,2,\cdots),\tag{2.13}$$

то будем иметь

$$\Omega_n(\lambda)=\int_0^l z(x;\lambda)\,Y_n^*(x)\,dx\quad(n=1,2,\cdots).\tag{2.14}$$

Из самого способа построения наших систем

$$\{Y_n(x)\}_1^\infty\ \text{и}\ \{Z_n^*(x)\}_1^\infty,\tag{2.15}$$

а также

$$\{Y_n^*(x)\}_1^\infty\ \text{и}\ \{Z_n(x)\}_1^\infty,\tag{2.16}$$

легко усмотреть, что каждая функция $Y_n^*(x)$ (или $Z_n^*(x)$) есть линейная комбинация не более чем $p_n$ функций системы $\{Y_k(x)\}_1^\infty$ (или соответственно системы $\{Z_n(x)\}_1^\infty$).

Далее, из соответствующих свойств функций

$$\frac{\partial^k y(x;\lambda)}{\partial\lambda^k}\ \text{и}\ \frac{\partial^k z(x;\lambda)}{\partial\lambda^k}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

следует также, что

1°. Функции систем

$$\{Y_n(x)\}_1^\infty\ \text{и}\ \{Y_n^*(x)\}_1^\infty\tag{2.17}$$

непрерывны на $(0, l]$, а функции систем

$$\{Z_n(x)\}_1^\infty \text{ и } \{Z_n^*(x)\}_1^\infty \tag{2.18}$$

непрерывны на $[0, l)$.

2°. При условии

$$\gamma_0 + \gamma_2 > 1$$

все функции, входящие в системы (2.17) и (2.18), принадлежат классу $L_1(0, l)$, а при условии

$$\gamma_0 > \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \gamma_2 > \frac{1}{2}$$

они принадлежат $L_2(0, l)$.

Систему $\{Y_n(x)\}_1^\infty$ (или $\{Z_n(x)\}_1^\infty$) будем называть *нормальной системой собственных и присоединенных функций задачи* $(A_{\sigma_0})$ (или задачи $(\bar{A}_{\sigma_0})$).

Справедлива следующая важная теорема о биортогональности построенных систем (2.15) и (2.16).

Теорема 3. *Системы функций*

$$\{Y_k(x),\ Z_k^*(x)\}_1^\infty, \tag{2.19}$$

*а также*

$$\{Y_k^*(x),\ Z_k(x)\}_1^\infty, \tag{2.20}$$

*биортогональны на* $(0, l)$, *т. е.*

$$\int_0^l Y_n(x)\, Z_m^*(x)\, dx = \int_0^l Z_m(x)\, Y_n^*(x)\, dx =$$

$$= \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases} \quad (n,\ m = 1, 2, \cdots). \tag{2.21}$$

Доказательство. Из формулы (2.11)

$$\Omega_m(\lambda) = \int_0^l y(x; \lambda) z_m^*(x)\, dx \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

вытекает, что при любом $\nu \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$

$$\Omega_m^{(r)}(\lambda_\nu) = \int_0^l \left\{ \frac{\partial^r y(x; \lambda)}{\partial \lambda^r} \right\}_{\lambda=\lambda_\nu} Z_m^*(x)\, dx.$$

Отсюда, ввиду свойства (2.5) функций $\Omega_n(\lambda)$ и определения (2.9) системы $\{Y_n(x)\}_1^\infty$, следует биортогональность систем (2.19). Вполне аналогично, в силу формулы (2.14) и определения (2.13) системы $\{z_n(x)\}_1^\infty$, заключаем, что системы (2.21) также биортогональны.

2.2. Выше была определена целая функция

$$\omega_\rho(\lambda) = D^{(\sigma_0)} y_1^*(x; \lambda)|_{x=l} \cos\beta + D^{(\sigma_1)} y(x; \lambda)|_{x=l} \sin\beta, \tag{2.22}$$

совокупность $\omega_0$-точек которой составляет множество собственных значений задачи $(A_{\omega_0})$.

В данном пункте мы приведем явное представление функции $\omega_\rho(\lambda)$ через функцию $y(x;\lambda)$. Такое представление позволит в дальнейшем судить об асимптотическом поведении функции $\omega_\rho(\lambda)$ и о ее $\omega_0$-точках при больших по модулю значениях $\lambda$.

(а) Обозначая

$$Y_0(x;\lambda)=x^{\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_0),\qquad (2.23)$$
$$Y_1(x;\lambda)=x^{\mu_1-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_1),$$

отметим сперва, что справедливы следующие формулы:

$$D^{(\sigma_0)}Y_0(x;\lambda)=E_\rho(\lambda x^{1/\rho};1),$$
$$D^{(\sigma_1)}Y_0(x;\lambda)=\lambda x^{\mu_0-\mu_1+\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu_2-\mu_1+\mu_0)\qquad (2.24)$$

и

$$D^{(\sigma_0)}Y_1(x;\lambda)=x^{\mu_1-\mu_0}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};1+\mu_1-\mu_0),$$
$$D^{(\sigma_1)}Y_1(x;\lambda)=E_\rho(\lambda x^{1/\rho};1).\qquad (2.25)$$

В самом деле, заметим сперва, что

$$D^{(\sigma_0)}\left\{\frac{x^{\frac{k}{\rho}+\mu-1}}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\right\}=\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}\left\{\frac{x^{\frac{k}{\rho}+\mu-1}}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\right\}=$$
$$=\frac{x^{\frac{k}{\rho}+\mu-\mu_0}}{\Gamma\left(1+\mu-\mu_0+\frac{k}{\rho}\right)}\quad (k=0,1,2,\cdots),\qquad (2.26)$$

а также, что

$$D^{(\sigma_1)}\left\{\frac{x^{\frac{k}{\rho}+\mu-1}}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\right\}=\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\frac{d}{dx}D^{(\sigma_0)}\left\{\frac{x^{\frac{k}{\rho}+\mu-1}}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\right\}=$$
$$=\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\frac{d}{dx}\left\{\frac{x^{\frac{k}{\rho}+\mu-\mu_0}}{\Gamma\left(1+\mu-\mu_0+\frac{k}{\rho}\right)}\right\}=\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\left\{\frac{x^{\frac{k}{\rho}+\mu-\mu_0-1}}{\Gamma\left(\mu-\mu_0+\frac{k}{\rho}\right)}\right\}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{k}{\rho}+\mu-\mu_1}}{\Gamma\left(1+\mu-\mu_1+\frac{k}{\rho}\right)} & \text{при } \mu\neq\mu_0,\ k=0,1,2,\cdots\\ & \text{при } \mu=\mu_0,\ k=1,2,\cdots\\ 0 & \text{при } \mu=\mu_0,\ k=0,\end{cases}\qquad (2.27)$$

если учесть, что $\mu_0=\gamma_0$ и $\mu_1=\gamma_0+\gamma_1$.

Во-первых, из (2.26) получим

$$D^{(\sigma_0)}\{x^{\mu-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\mu)\}=$$

$$= D^{(\sigma_0)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\frac{k}{\rho}+\mu-1}}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\right\} = x^{\mu-\mu_0}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ 1+\mu-\mu_0),$$

откуда непосредственно следуют первые из формул (2.24) и (2.25), если положить $\mu=\mu_0$ или $\mu=\mu_1$.

Далее, из (2.27) будем иметь

$$D^{(\sigma_1)}\{x^{\mu-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ \mu)\} = D^{(\sigma_1)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\frac{k}{\rho}+\mu-1}}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\right\} =$$

$$= x^{\mu-\mu_1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ 1+\mu-\mu_1) \quad \text{при} \quad \mu\neq\mu_0,$$

откуда при $\mu=\mu_1$ получим вторую из формул (2.25).

Наконец, если заметим, что $\frac{1}{\rho}=\sigma_2=\mu_2-1$, то из той же формулы (2.27) при $\mu=\mu_0$ получим также

$$D^{(\sigma_1)}\{x^{\mu_0-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ \mu_0)\} = D^{(\sigma_1)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\frac{k}{\rho}+\mu_0-1}}{\Gamma\left(\mu_0+\frac{k}{\rho}\right)}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k x^{\frac{k}{\rho}+\mu_0-\mu_1}}{\Gamma\left(1+\mu_0-\mu_1+\frac{k}{\rho}\right)} = \lambda x^{\mu_2-\mu_1+\mu_0-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k x^{\frac{k}{\rho}}}{\Gamma\left(\mu_2-\mu_1+\mu_0+\frac{k}{\rho}\right)},$$

т. е. вторую из формул (2.24).

(б) Обозначим теперь

$$Y(x) = \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}E_\rho\left(\lambda(x-t)^{\frac{1}{\rho}};\ \frac{1}{\rho}\right)q(t)\,y(t;\lambda)\,dt, \tag{2.28}$$

и заметим, что, согласно формуле (1.8) теоремы 1, решение задачи Коши (1.5)—(1.6) представляется в виде

$$y(x;\lambda) = \sin\alpha\, Y_0(x;\lambda) - \cos\alpha\, Y_1(x;\lambda) + Y(x). \tag{2.29}$$

Докажем теперь справедливость формул

$$D^{(\sigma_j)}\,Y(x) = \int_0^x (x-t)^{\mu_2-\mu_j-1}E_\rho(\lambda(x-t)^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_j)\,q(t)\,y(t;\lambda)\,dt \tag{2.30}$$

$$(j=0,\ 1).$$

С этой целью заметим, что формулу (2.28) можно записать также в виде

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}\int_0^x (x-t)^{\frac{k+1}{\rho}-1}\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k \frac{d^{-\frac{k+1}{\rho}}}{dx^{-\frac{k+1}{\rho}}}\{q(x)\, y(x;\lambda)\}.$$

Отсюда, пользуясь свойством дробных интегралов, получим

$$D^{(\sigma_0)}Y(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}Y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k \frac{d^{-\left(\frac{k+1}{\rho}+1-\mu_0\right)}}{dx^{-\left(\frac{k+1}{\rho}+1-\mu_0\right)}}\{q(x)\, y(x;\lambda)\}=$$

$$=\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-\mu_0} E_\rho\left(\lambda(x-t)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}-\mu_0+1\right) q(t)\, y(t;\lambda)\, dt, \qquad (2.31)$$

т. е. первую из формул (2.30), так как $\gamma_0=\mu_0$ и $\frac{1}{\rho}-\mu_0=\mu_2-\mu_0-1$.

Далее имеем из этой же формулы

$$D^{(\sigma_1)}Y(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\frac{d}{dx}D^{(\sigma_0)}Y(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)}\int_0^x (x-\tau)^{-\gamma_1}\left\{\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau (\tau-t)^{\mu_2-\mu_0-1}\times\right.$$

$$\left.\times E_\rho(\lambda(\tau-t)^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_0)\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt\right\}d\tau=$$

$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(2-\gamma_1)}\int_0^x (x-\tau)^{1-\gamma_1} d\left\{\int_0^\tau (\tau-t)^{\mu_2-\mu_0-1}\times\right.$$

$$\left.\times E_\rho(\lambda(\tau-t)^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_0)\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt\right\}=$$

$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\gamma_1)}\int_0^x (x-\tau)^{-\gamma_1}\left\{\int_0^\tau (\tau-t)^{\mu_2-\mu_0-1}\times\right.$$

$$\left.\times E_\rho(\lambda(\tau-t)^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_0)\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt\right\}d\tau=$$

$$=\frac{d}{dx}\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}D^{(\sigma_0)}Y(x).$$

Или, если воспользоваться выражением функции $Y(x)$ в виде ряда (2.31), отсюда получим также

$$D^{(\sigma_1)} Y(x) = \frac{d}{dx} \frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{d^{-\left(\frac{k+1}{\rho}+1-\mu_0\right)}}{dx^{-\left(\frac{k+1}{\rho}+1-\mu_0\right)}} [q(x)\, y(x;\lambda)] =$$

$$= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{d^{-\left(\frac{k+1}{\rho}+2-\mu_1\right)}}{dx^{-\left(\frac{k+1}{\rho}+2-\mu_1\right)}} [q(x)\, y(x;\lambda)], \tag{2.32}$$

так как $\mu_1 = \gamma_0 + \gamma_1 = \mu_0 + \gamma_1$.

Наконец, заметив, что

$$\frac{1}{\rho} + 2 - \mu_1 = \mu_2 - \mu_1 + 1,$$

из (2.32) будем иметь

$$D^{(\sigma_1)} Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{d^{-\left(\frac{k}{\rho}+\mu_2-\mu_1\right)}}{dx^{-\left(\frac{k}{\rho}+\mu_2-\mu_1\right)}} [q(x)\, y(x;\lambda)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma\left(\mu_2-\mu_1+\frac{k}{\rho}\right)} \int_0^x (x-t)^{\frac{k}{\rho}+\mu_2-\mu_1-1} q(t)\, y(t;\lambda)\, dt =$$

$$= \int_0^x (x-t)^{\mu_2-\mu_1-1} E_\rho(\lambda (x-t)^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_1)\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt,$$

т. е. вторую из формул (2.32).

(в) Убедимся наконец, что целая функция $\omega_\rho(\lambda)$ допускает также представление вида

$$\begin{aligned}\omega_\rho(\lambda) = {} & \sin(\alpha-\beta)\, E_\rho(\lambda l^{1/\rho};\ 1) - \\ & - \cos\alpha \cos\beta\, l^{\mu_1-\mu_0} E_\rho(\lambda l^{1/\rho};\ 1+\mu_1-\mu_0) + \\ & + \sin\alpha \sin\beta\, l^{\mu_2-\mu_1+\mu_0-1} \lambda E_\rho(\lambda l^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_1+\mu_0) + \\ & + \cos\beta \int_0^l (l-t)^{\mu_2-\mu_0-1} E_\rho(\lambda (l-t)^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_0)\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt + \\ & + \sin\beta \int_0^l (l-t)^{\mu_2-\mu_1-1} E_\rho(\lambda (l-t)^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_1)\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt. \end{aligned} \tag{2.33}$$

С этой целью отметим, что из представления (2.29) функции $y(x;\lambda)$, в силу формул (2.24), (2.25) и (2.30) следуют соотношения

$$D^{(\sigma_0)} y(x;\lambda)|_{x=l} = \sin\alpha\, E_\rho(\lambda l^{1/\rho};\ 1) -$$

$$- \cos \alpha\, l^{\mu_1-\mu_0} E_\rho (\lambda l^{1/\rho};\ 1+\mu_1-\mu_0) +$$

$$+ \int_0^l (l-t)^{\mu_2-\mu_0-1} E_\rho (\lambda (l-t)^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_0)\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt, \tag{2.34}$$

$$D^{(\gamma_1)} y(x;\lambda)|_{x=l} = \sin \alpha\, l^{\mu_2-\mu_1+\mu_0-1} \lambda E_\rho (\lambda l^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_1+\mu_0) -$$

$$- \cos \alpha\, E_\rho (\lambda l^{1/\rho};\ 1) +$$

$$+ \int_0^l (l-t)^{\mu_2-\mu_1-1} E_\rho (\lambda (l-t)^{1/\rho};\ \mu_2-\mu_1)\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt. \tag{2.35}$$

Подставляя значения (2.34) и (2.35) в правую часть (1.23), мы получим для функции $\omega_\rho(\lambda)$ требуемое представление (2.33).

(г) В заключение отметим, что в специальном, но важном случае, когда

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1,\ \omega_0 = 0, \tag{2.36}$$

а параметры $\alpha$, $\beta$ и функция $q(x)$ вещественны, наши краевые задачи $(A_0)$ и $(\widetilde{A}_0)$ совпадают с классической краевой задачей Штурма-Лиувилля

$$\begin{gathered} y'' - [\lambda + q(x)]\, y = 0, \\ y|_{x=0} \cos \alpha + y'_x|_{x=0} \sin \alpha = 0, \\ y|_{x=l} \cos \beta + y'_x|_{x=l} \sin \beta = 0. \end{gathered} \tag{2.37}$$

Заметим, что при условии (2.36)

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j = k+1 \quad (k=0,1,2);\quad \rho = \frac{1}{2}, \tag{2.38}$$

а также, что

$$E_{1/2}(z;\ 1) = \operatorname{ch} \sqrt{z},\ E_{1/2}(z;\ 2) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{z}}{\sqrt{z}}. \tag{2.39}$$

В силу формул (2.38) и (2.39) из формулы (1.8′) теоремы 1 мы получим, что решение $y(x;\lambda)$ задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля

$$y''(x) - [\lambda + q(x)]\, y = 0,$$

$$y(0) = \sin \alpha,\ y'_x(0) = -\cos \alpha,$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x;\lambda) = \sin \alpha \operatorname{ch} \sqrt{\lambda}\, x - \cos \alpha \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \operatorname{sh} \sqrt{\lambda}\, (x-t)\, q(t)\, y(t;\lambda)\, dt. \tag{2.40}$$

Одновременно упростится также представление (2.33) для целой функции

$$\omega(\lambda) = y(l, \lambda)\cos\beta + y'_x(l; \lambda)\sin\beta,$$

множество нулей которой образует совокупность собственных значений задачи (2.37):

$$\omega(\lambda) = \sin(\alpha - \beta)\operatorname{ch} l\sqrt{\lambda} - \cos\alpha\cos\beta\frac{\operatorname{sh} l\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} +$$

$$+ \sin\alpha\sin\beta\sqrt{\lambda}\operatorname{sh} l\sqrt{\lambda} +$$

$$+ \int_0^l \left\{\cos\beta\frac{\operatorname{sh}(l-t)\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \sin\beta\operatorname{ch}(l-t)\sqrt{\lambda}\right\} q(t)\, y(t; \lambda)\, dt. \quad (2.33')$$

Как хорошо известно [9], исследование асимптотических свойств функций $y(x; \lambda)$ и $\omega(\lambda)$ с помощью формул (2.40) и (2.33′) позволяет доказать основную теорему в теории краевой задачи Штурма-Лиувилля—о разложении по собственным функциям.

Установленные выше формулы для функций $y(x; \lambda)$, $z(x; \lambda)$ и $\omega_\rho(\lambda)$, ассоциированных с общими задачами $(A_\infty)$ и $(\tilde{A}_{\infty_0})$, могут служить основой для исследования асимптотических свойств этих функций и установления теорем разложения по построенным биортогональным системам.

В специальном случае, когда $q(x) = 0$ в работе [3] этим путем была установлена равносходимость разложений такого рода с рядами Фурье.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 26.I.1970

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Եզրային խնդիր Շտուրմ-Լիուվիլի տիպի կոտորակային դիֆերենցիալ օպերատորի համար *(ամփոփում)*

*Ներկա հոդվածում դրվում է եզրային խնդիր Շտուրմ-Լիուվիլի տիպի կոտորակային դիֆերենցիալ օպերատորի համար վերջավոր հատվածում։*

*§ 1-ում դրվում են երկու փոխհամալուծ եզրային խնդիրներ՝ $(A_{\infty_0})$ և $(\tilde{A}_{\infty_0})$ երբ հայտնի են որոշակի տվյալներ $[0, l]$ միջակայքի ծայրերում։*

*Ապացուցվում է, որ գոշու տիպի համապատասխան երկու խնդիրների $y(x, \lambda)$ և $z(x, \lambda)$ լուծումները, երբ բավարարվում են եզրային պայմանները $[0, l]$ միջակայքի ձախ և, համապատասխանաբար, աջ ծայրակետերում, գոյություն ունեն և ներկայացնում են ամբողջ ֆունկցիաներ $\lambda$ պարամետրից՝ ցանկացած $x$-ի $x \in (0, l)$ համար։ Այստեղ ապացուցվում է, որ գոյություն ունի որոշակի վերջավոր $\rho$ կարգի և $l$ տիպի ամբողջ ֆունկցիա՝ $\omega_\rho(\lambda)$, որը $y(x, \lambda)$ և $z(x, \lambda)$ ֆունկցիաների հետ կապված է հետևյալ ինտեգրալ առնչությամբ*

$$\int_0^l y(x, \lambda)\, z(x, \lambda^*)\, dx = \frac{\omega_\rho(\lambda) - \omega_\rho(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*},$$

*որը կարևոր է հետագայի համար։*

*Բացի դրանից ցույց է տրվում, որ* $(A_{\omega_0})$ *և* $(\bar{A}_{\omega_0})$ *եզրային խնդիրների սեփական արժեքները համընկնում են* $\omega_\rho(\lambda)$ *ամբողջ ֆունկցիայի* $\omega_0$*-կետերի բազմության հետ, որոնք, ընդհանրապես ասած, կարող են լինել նաև բազմապատիկ։*

*Այդ պատճառով հիշյալ եզրային խնդիրները կարող են ունենալ ոչ միայն սեփական, այլև միակցված ֆունկցիաներ։*

*§2-ում շարադրված է վերոհիշյալ եզրային խնդիրներով առաջացած սեփական և միակցված ֆունկցիաների բիորթոգոնալ սիստեմի կառուցման մեթոդը։ Այս մեթոդը պակաս կատարյալ տեսքով առաջին անգամ առաջարկված է եղել* [2] *աշխատանքում։*

M. M. DŽRBAŠIAN. *Boundary problem for fractional order differential operator of Sturm-Liuville type* (summary)

The problem mentioned in the heading is considered for the case of a finite interval.

In § 1 two mutiaily conjugated boundary problems — $(A_{\omega_0})$ and $(\bar{A}_{\omega_0})$with conditions on the ends of the interval are stated.

It is proved, that the solutions $y(x, \lambda)$ and $z(x, \lambda)$ of corresponding Cauchy problems (when the conditions on the left and right ends of $[0, l]$ are satisfied correspondingly), do existe and are entire functions of $\lambda$ for every $x \in (0, l)$.

The existence of an entire function $\omega_\rho(\lambda)$ of a certain finite order $\rho$ and of type $l$, which is connected with $y(x, \lambda)$ and $z(x, \lambda)$ by an integral relation

$$\int_0^l y(x, \lambda)\, z(x, \lambda^*)\, dx = \frac{\omega_\rho(\lambda) - \omega_\rho(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*}$$

is established. Furthermore, it is proved, that the eigenvalues of the boundary problems $(A_{\omega_0})$ and $(\bar{A}_{\omega_0})$ coincide with the set of $\omega_0$—points of the function $\omega_\rho(\lambda)$, which are in general, not simple. For that reason the boundary problems under consideration in general generate not only the eigenfunctions, but associated functions as well.

A method of construction of biorthogonal systems of eigen and associated functions, generated by the above mentioned problems, is discussed in § 2. This method, in an underdeveloped form, first appears in [2].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, Изв. АН Армянской ССР, сер. „Математика", 3, № 1, 1968, 3—29.
2. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян.* О построении некоторых специальных биортогональных систем, Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 5, 1959.
3. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян.* Разложения по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциального уравнения дробного порядка, Труды ММО, 10, 1961.
4. *А. Б. Нерсесян.* Разложения по собственным функциям некоторых несамосопряженных краевых задач, Сиб. мат. журнал, 11, № 3, 1961.
5. *М. М. Джрбашян.* О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{\mu_k x} x^{s_k - 1}\}_1^\infty$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961.

6. *А. Б. Нерсесян.* Разложения по собственным функциям краевой задачи для одного интегродифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, Изв. АН Армянской ССР, сер. физ.-мат. наук, XII, № 6, 1959.
7. *S. Verblunsky.* On a class of integral operators II, Proc. Lond. Math. Soc. XVI, № 3, 1966.
8. *А. Ф. Леонтьев.* Представление функций обобщенными рядами Дирихле, УМН, XXIV, вып. 2, 1969.
9. *Э. И. Титчмарш.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, часть 1, ИИЛ., М., 1960.