§ 1. Предварительные леммы

Пусть задана счетная система $S = \{(A, B)\}$ упорядоченных пар подмножеств отрезка $[0, 1]$, не равных одновременно пустому множеству, удовлетворяющая условиям:

- а) $A \cap B = \emptyset$ для любой пары $(A, B) \in S$;
 б) для любых двух различных пар (A, B) и (A', B') выполняется одно из соотношений:

$$b_1) A \cup B \subset A',$$

$$b_2) A \cup B \subset B',$$

$$b_3) A' \cup B' \subset A,$$

$$b_4) A' \cup B' \subset B,$$

$$b_5) (A \cup B) \cap (A' \cup B') = \emptyset.$$

В настоящем параграфе указывается одно линейное упорядочение системы S , которое используется при доказательстве теоремы 2.1.

Для удобства условимся говорить, что пара (A, B) содержится в паре (A', B') , если имеет место $b_1)$ или $b_2)$, и что пары (A, B) и (A', B') не пересекаются, если имеет место $b_5)$. Далее будем говорить, что пара (A, B) отделяет пары (A_1, B_1) и (A_2, B_2) , если $A_1 \cup B_1 \subset A$ и $A_2 \cup B_2 \subset B$ или $A_1 \cup B_1 \subset B$ и $A_2 \cup B_2 \subset A$.

Заметим, что для любых двух пар может существовать не более одной отделяющей пары.

Лемма 1.1. Для любых непересекающихся пар (A_1, B_1) и (A_2, B_2) из S можно построить отделяющую их пару (A', B') так, чтобы система $\{S, (A', B')\}$, полученная добавлением пары (A', B') к системе S , опять удовлетворяла условиям а) и б).

Доказательство. Рассмотрению подлежит случай, когда в системе S нет пары, отделяющей (A_1, B_1) и (A_2, B_2) .

Введем обозначения

$$S_1 = \{(A, B) \in S: A_1 \cup B_1 \subset A \cup B, (A_2 \cup B_2) \cap (A \cup B) = \emptyset\},$$

$$S_2 = \{(A, B) \in S: A_2 \cup B_2 \subset A \cup B, (A_1 \cup B_1) \cap (A \cup B) = \emptyset\},$$

и положим

$$A' = \cup_{(A, B) \in S_1} (A \cup B), \quad B' = \cup_{(A, B) \in S_2} (A \cup B).$$

Пара (A', B') удовлетворяет утверждению леммы. Действительно, из того, что $(A_1, B_1) \in S_1$ и $(A_2, B_2) \in S_2$, немедленно следует, что (A', B') отделяет (A_1, B_1) и (A_2, B_2) . Далее из свойств системы S следует, что никакая пара из S_1 не пересекается ни с какой парой из S_2 , поэтому $A' \cap B' = \emptyset$. Остается проверить, что система $\{S, (A', B')\}$ удовлетворяет условию б).

Пусть (A, B) — любая пара из S . Если (A, B) входит в S_1 или S_2 или же содержится в некоторой паре, входящей в S_1 или S_2 , то

(A, B) содержится в (A', B') . К этому случаю сводится и тот случай, когда (A, B) пересекается с некоторой парой из $S_1(S_2)$ и не пересекается ни с одной парой из $S_2(S_1)$.

Если (A, B) не пересекается ни с одной парой из $S_1 \cup S_2$, то (A, B) не пересекается и с (A', B') . Наконец, рассмотрим случай, когда (A, B) пересекается с некоторой парой из S_1 и с некоторой парой из S_2 . В этом случае (A, B) содержит всякую пару, входящую в $S_1 \cup S_2$, и, так как в S нет пары, отделяющей (A_1, B_1) и (A_2, B_2) , то имеет место одно из двух: либо $A' \cup B' \subset A$, либо $A' \cup B' \subset B$.

Лемма 1.2. Систему S можно дополнить счетным множеством новых пар так, чтобы полученная система S' удовлетворяла условиям а) и б) и чтобы в ней для любых двух непересекающихся пар существовала отделяющая их пара.

Доказательство. Система S' строится счетным процессом, в котором на каждом шагу применяется лемма 1.1. Сначала введем одно обозначение. Рассмотрим множество всех пар, состоящих из непересекающихся пар системы S , для которых нет отделяющей пары в S . Оно счетно. Обозначим через $\bar{S}$ указанное множество с некоторой фиксированной нумерацией. Такое же обозначение будет использовано и для других систем, возникающих в процессе, описанном ниже.

Теперь перейдем к доказательству леммы.

1) Возьмем первый элемент $\bar{S}$ и, применяя лемму 1.1, построим для него отделяющую пару (P_1, Q_1) .

2) Возьмем первый элемент $\bar{S}$, для которого нет отделяющей пары в системе $S_1 = \{S, (P_1, Q_1)\}$. Применяя лемму 1.1 к системе S_1 , построим для этого элемента отделяющую пару (P_2, Q_2) .

3) Возьмем первый элемент $\bar{S}_1$, для которого нет отделяющей пары в $S_2 = \{S, (P_1, Q_1), (P_2, Q_2)\}$ и, применяя лемму 1.1 к S_2 , построим для этого элемента отделяющую пару (P_3, Q_3) .

4) Для первого элемента $\bar{S}$, не имеющего отделяющей пары в $S_3 = \{S, (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3)\}$, строится пара (P_4, Q_4) .

5) Для первого элемента $\bar{S}_1$, не имеющего отделяющей пары в S_4 , строится пара (P_5, Q_5) .

6) Для первого элемента $\bar{S}_2$, не имеющего отделяющей пары в S_5 , строится пара (P_6, Q_6) и т. д.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы приходим к системе $S' = \{S, (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), \dots\}$, которая и будет требуемой.

Теперь определим отношение порядка на S . Будем считать, что пара $(A, B) \in S$ предшествует паре $(C, D) \in S$ (и при этом будем употреблять обозначение $(A, B) < (C, D)$) если выполняется одно из следующих условий:

1. $A \cup B \subset C$,

2. $C \cup D \subset B$,

3. Существует пара $(G, H) \in S'$ такая, что

$$A \cup B \subset G \text{ и } C \cup D \subset H.$$

Лемма 1.3. Ни для каких двух различных пар (A, B) , $(C, D) \in S$ отношения $(A, B) < (C, D)$ и $(C, D) < (A, B)$ не могут выполняться одновременно.

Действительно, в противном случае одно из условий 1, 2, 3 выполняется одновременно с одним из условий

1'. $C \cup D \subset A$,

2'. $A \cup B \subset D$,

3'. Существует пара $(G', H') \in S'$ такая, что

$$C \cup D \subset G' \text{ и } A \cup B \subset H'.$$

Но любая комбинация условий (i, j) $i=1, 2, 3$; $j=1', 2', 3'$ приводит к противоречию. В силу симметричности можно ограничиться случаями (1.1'), (1.2'), (1.3'), (2.2'), (2.3'), (3.3').

(1.1'). В этом случае получаем $B = D = \emptyset$ и $A = C$, т. е. пары (A, B) и (C, D) совпадают.

(1.2'). Этот случай не может выполняться, т. к. $C \cap D = \emptyset$, вследствие чего $A = B = \emptyset$.

(1.3'). Из 1 и первого условия 3' получаем $A \cup B \subset G'$, и этот случай сводится к предыдущему.

Случаи (2.2') и (2.3') ничем не отличаются от случаев (1.1') и (1.3') соответственно.

(3.3'). Из первого условия 3 и второго условия 3' получаем $G \cap H' \neq \emptyset$. Далее из второго условия 3' и первого условия 3 получаем $H \cap G' \neq \emptyset$. Но эти соотношения не могут одновременно выполняться в системе S' . Из лемм 1.2 и 1.3 следует

Лемма 1.4. Для любых двух различных пар (A, B) , $(C, D) \in S$ выполняется одно и только одно из соотношений $(A, B) < (C, D)$, $(C, D) < (A, B)$.

Теперь докажем транзитивность отношения $<$.

Лемма 1.5. Пусть (A, B) , (C, D) , $(E, F) \in S$. Если $(A, B) < (C, D)$ и $(C, D) < (E, F)$, то $(A, B) < (E, F)$.

Доказательство. Имеем, что одно из условий 1, 2, 3 выполняется одновременно с одним из условий

1''. $C \cup D \subset E$,

2''. $E \cup F \subset D$,

3''. Существует пара $(G', H') \in S'$ такая, что

$$C \cup D \subset G' \text{ и } E \cup F \subset H'.$$

Разберем все случаи.

(1.1''). Получаем $A \cup B \subset E$, поэтому $(A, B) < (E, F)$.

(1.2'') Это есть третье условие определения отношения $<$, и мы получаем $(A, B) < (E, F)$.

(1.3''). В этом случае будем иметь $A \cup B \subset G'$ и $E \cup F \subset H'$, поэтому $(A, B) < (E, F)$.

(2.1''). В этом случае получаем $B \cap E \neq \emptyset$. Но тогда будем иметь одно из двух: или $A \cup B \subset E$, или $E \cup F \subset B$. В обоих случаях получаем $(A, B) < (E, F)$.

(2.2''). Получаем $E \cup F \subset B$.

(2.3''). В этом случае имеем $B \cap G' \neq \emptyset$. Значит имеет место или $A \cup B \subset G'$ или $G' \cup H' \subset B$. Каждое из этих соотношений вместе с $E \cup F \subset H'$ дает $(A, B) < (E, F)$.

(3.1''). В этом случае имеем $E \cap H \neq \emptyset$. Тогда или $E \cup F \subset H$ или $G \cup H \subset E$. Каждое из этих соотношений вместе с первым условием 3 дает $(A, B) < (E, F)$.

(3.2''). В этом случае будем иметь $A \cup B \subset G$ и $E \cup F \subset H$, поэтому $(A, B) < (E, F)$.

(3.3''). Из второго условия 3 и первого условия 3'' следует $H \cap G' \neq \emptyset$. А отсюда следует, что имеет место одно из двух: или $G \cup H \subset G'$, или $G' \cup H' \subset H$. В первом случае из первого условия 3 получаем $A \cup B \subset G'$, что вместе со вторым условием 3'' дает $(A, B) < (E, F)$. Во втором случае из второго условия 3'' получаем $E \cup F \subset H$, что вместе с первым условием 3 опять дает $(A, B) < (E, F)$. Лемма доказана.

§ 2. Эквивалентность безусловной и абсолютной сходимости рядов по одной системе функций

Теорема 2.1. Пусть M — счетная система измеримых функций, определенных на $[0, 1]$. Пусть каждой функции $f(x) \in M$ можно сопоставить два измеримых множества E_f^+ и E_f^- так, чтобы выполнялись условия:

1. $f(x) \geq 0$ на E_f^+ , $f(x) \leq 0$ на E_f^- и $f(x) = 0$ на $[0, 1] \setminus (E_f^+ \cup E_f^-)$.

2. Система пар $\{(E_f^+, E_f^-) : f \in M\}$ удовлетворяет условиям а) и б).

Тогда для любого ряда по системе M безусловная сходимость почти всюду эквивалентна абсолютной сходимости почти всюду.

Легко видеть, что из этой теоремы следует

Теорема 2.2. Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность измеримых функций, определенных на $[0, 1]$ такая, что для любых натуральных n и m ($n \neq m$) выполняется одно из следующих условий:

$$1. E(f_n(x) > 0) \cup E(f_n(x) < 0) \subset E(f_m(x) > 0),$$

$$2. E(f_n(x) > 0) \cup E(f_n(x) < 0) \subset E(f_m(x) < 0),$$

$$3. E(f_m(x) > 0) \cup E(f_m(x) < 0) \subset E(f_n(x) > 0),$$

$$4. E(f_m(x) > 0) \cup E(f_m(x) < 0) \subset E(f_n(x) < 0),$$

$$5. (E(f_n(x) > 0) \cup E(f_n(x) < 0)) \cap (E(f_m(x) > 0) \cup E(f_m(x) < 0)) = \emptyset.$$

Тогда безусловная сходимость почти всюду любого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

эквивалентна его абсолютной сходимости почти всюду.

Остается открытым вопрос: сохраняет ли силу утверждение теоремы 2.2, если в правых частях включений 1—4 заменить символ $>$ на $\geq$ и $<$ на $\leq$?

Теорема 2.1 получается из следующей леммы.

Лемма 2.1. Пусть $\sum_{n=1}^N a_n f_n(x)$ — произвольный полином по системе M . Тогда существует такая перестановка $n_1, n_2, \dots, n_N$ чисел $1, 2, \dots, N$, что почти всюду на $[0, 1]$ выполняется неравенство

$$\sup_{1 \leq p \leq q \leq N} \left| \sum_{k=p}^q a_{n_k} f_{n_k}(x) \right| > \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n |f_n(x)|. \quad (2.1)$$

Доказательство. Искомую перестановку возьмем так, чтобы было

$$(E_{f_{n_1}}^+, E_{f_{n_1}}^-) < (E_{f_{n_2}}^+, E_{f_{n_2}}^-) < \dots < (E_{f_{n_N}}^+, E_{f_{n_N}}^-). \quad (2.2)$$

В силу леммы 1.4 существует единственная перестановка, при которой имеет место (2.2). Из (2.2) и из определения отношения порядка следует

$$E_{f_{n_i}}^+ \subset E_{f_{n_j}}^- \cup (E_{f_{n_j}}^+ \cup E_{f_{n_j}}^-)^c, \quad 1 \leq j < i \leq N^* \quad (2.3)$$

и

$$E_{f_{n_j}}^+ \subset E_{f_{n_i}}^+ \cup (E_{f_{n_i}}^+ \cup E_{f_{n_i}}^-)^c, \quad 1 \leq j < i \leq N. \quad (2.4)$$

Введем обозначения

$$E_k^- = \bigcap_{i=1}^k (E_{f_{n_i}}^- \cup (E_{f_{n_i}}^+ \cup E_{f_{n_i}}^-)^c),$$

$$E_k^+ = \bigcap_{i=k}^N (E_{f_{n_i}}^+ \cup (E_{f_{n_i}}^+ \cup E_{f_{n_i}}^-)^c) \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда из условия 1 теоремы и из соотношений (2.3) и (2.4) получим

1. $E_1^- \supset E_2^- \supset \dots \supset E_N^-$,
2. $f_{n_k}(x) \leq 0$ на E_k^- и $f_{n_k}(x) > 0$ на $(E_k^-)^c$,
3. $E_1^+ \subset E_2^+ \subset \dots \subset E_N^+$,
4. $f_{n_k}(x) \geq 0$ на E_k^+ и $f_{n_k}(x) \leq 0$ на $(E_k^+)^c$.

Теперь докажем неравенство (2.1), повторяя рассуждения работы [1].

Будем пользоваться обозначениями

* $E^c = [0, 1] - E$.

$$\varphi^+(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } \varphi(x) > 0 \\ 0, & \text{если } \varphi(x) < 0, \end{cases} \quad \varphi^-(x) = \begin{cases} -\varphi(x), & \text{если } \varphi(x) < 0 \\ 0, & \text{если } \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

Пусть $E \subset [0, 1]$ — любое измеримое множество. Тогда по известной лемме (см. [3], стр. 42), учитывая свойства 1 и 2, получим

$$\begin{aligned} \int_E \sup_{1 < p < N} \left| \sum_{k=1}^p -a_{n_k} f_{n_k}(x) \right| dx &\geq \sum_{k=1}^N \int_{E \cap E_k^-} -a_{n_k} f_{n_k}(x) dx = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_E a_{n_k} f_{n_k}^-(x) dx = \int_E \left(\sum_{n=1}^N a_n f_n^-(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что почти всюду

$$\sup_{1 < p < N} \left| \sum_{k=1}^p -a_{n_k} f_{n_k}(x) \right| \geq \sum_{n=1}^N a_n f_n^-(x). \quad (2.5)$$

Далее по той же лемме с учетом свойств 3 и 4 получим

$$\begin{aligned} \int_E \sup_{1 < q < N} \left| \sum_{k=q}^N a_{n_k} f_{n_k}(x) \right| dx &= \int_E \sup_{0 < q < N-1} \left| \sum_{k=0}^q a_{n_{N-k}} f_{n_{N-k}}(x) \right| dx \geq \\ &> \sum_{k=0}^{N-1} \int_{E \cap E_{N-k}^+} a_{n_{N-k}} f_{n_{N-k}}(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_E a_{n_{N-k}} f_{n_{N-k}}^+(x) dx = \\ &= \int_E \left(\sum_{n=1}^N a_n f_n^+(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что почти всюду

$$\sup_{1 < q < N} \left| \sum_{k=q}^N a_{n_k} f_{n_k}(x) \right| \geq \sum_{n=1}^N a_n f_n^+(x). \quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) следует

$$\begin{aligned} 2. \quad \sup_{1 < p < q < N} \left| \sum_{k=p}^q a_{n_k} f_{n_k}(x) \right| &> \sup_{1 < p < N} \left| \sum_{k=1}^p -a_{n_k} f_{n_k}(x) \right| + \\ &+ \sup_{1 < q < N} \left| \sum_{k=q}^N a_{n_k} f_{n_k}(x) \right| \geq \sum_{n=1}^N a_n (f_n^-(x) + f_n^+(x)) = \\ &= \sum_{n=1}^N a_n |f_n(x)|. \end{aligned}$$

Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Мы сейчас докажем, что если для некоторого ряда по системе M

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m f_m(x) \quad (2.7)$$

ряд из абсолютных величин

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| |f_m(x)| \quad (2.8)$$

расходится на некотором множестве E с $mE > 0$, то члены ряда (2.7) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд расходился почти всюду на E .

Очевидно из ряда (2.8) можно выделить два непересекающихся подряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu_k} |f_{\nu_k}(x)| \quad (a_{\nu_k} > 0) \quad (2.9)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} -a_{\mu_k} |f_{\mu_k}(x)| \quad (a_{\mu_k} < 0), \quad (2.10)$$

расходящихся соответственно на множествах E_1 и E_2 , причем $mE_1 + mE_2 = mE$.

Теперь докажем, что члены ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu_k} f_{\nu_k}(x) \quad (2.11)$$

можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд расходился почти всюду на E_1 .

То же самое будет иметь место для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\mu_k} f_{\mu_k}(x) \quad (2.12)$$

на соответствующем множестве E_2 .

Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$. Построим последовательность множеств $E_1^n \subset E_1$, $n = 1, 2, \dots$, обладающую свойствами

- 1) $E_1^n \subset E_1^{n+1}$, $mE_1^n > mE_1 - \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \dots$,
- 2) Все члены ряда (2.9) ограничены на E_n , $n = 1, 2, \dots$.
- 3) Ряд (2.9) равномерно сходится к $+\infty$ на E_n , $n = 1, 2, \dots$.

Теперь построим возрастающую последовательность номеров $N_0 = 0, N_1, N_2, \dots$ так, чтобы

$$\sum_{k=N_{n-1}+1}^{N_n} a_{\nu_k} |f_{\nu_k}(x)| > 1 \quad \text{на } E_1^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Переставим теперь члены ряда (2.11) следующим образом. Переставим члены во всех полиномах

$$\sum_{k=N_{n-1}+1}^{N_n} a_{\nu_k} f_{\nu_k}(x), \quad n=1, 2, \dots$$

так, как это делается при доказательстве леммы 2.1, а затем расположим полученные полиномы друг за другом по возрастанию n .

Полученный ряд, в силу неравенств (2.1) и (2.13), будет расходиться на $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+$, причем $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+\right) = mE_1$. Проведем то же самое с рядом (2.12), мы получим два непересекающихся переставленных подряда ряда (2.7), расходящихся почти всюду соответственно на множествах E_1 и E_2 . Легко видеть, что с помощью этих переставленных подрядов можно построить перестановку ряда (2.7), расходящуюся почти всюду на E . Теорема 1.1 доказана.

З а м е ч а н и е. В выводе теоремы 2.1 из леммы 2.1 содержится доказательство следующего утверждения. Если для некоторого ряда по системе M любая перестановка сходится на некотором множестве положительной меры, то исходный ряд абсолютно сходится на некотором множестве положительной меры.

§ 3. Об одном классе ортонормированных систем

В приводимых ниже построениях встречаются функции $r_j(\Delta; x)$, где Δ — интервал, лежащий на $[0, 1]$, а индекс j принимает конечное число значений. Каждый раз, когда мы будем иметь дело с интервалом Δ и функциями $r_j(\Delta; x)$, мы предполагаем выполнение следующих условий.

1. При любом j имеются два непересекающихся множества E_j^+ и E_j^- , состоящих из конечного числа интервалов таких, что

$$E_j^+ \cup E_j^- \subset \Delta, \quad mE_j^+ = mE_j^- = \frac{m\Delta}{2},$$

и

$$r_j(\Delta; x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E_j^+, \\ -1, & \text{если } x \in E_j^-, \\ 0, & \text{если } x \in [0, 1] - \Delta. \end{cases}$$

2. Если $j' > j$, то на любом составляющем интервале множества $E_j^+ \cup E_j^-$ функция $r_{j'}(\Delta; x)$ принимает значения 1 и -1 на множествах одинаковой меры.

Теперь перейдем к построению одной ортонормированной системы. Эта система будет строиться группами. При этом в n -ой группе будет 2^{n-1} функций, которые мы обозначим $f_n^k(x)$, $k=1, 2, \dots, 2^{n-1}$.

Возьмем некоторое натуральное число m_1 , некоторую систему $\{r_j((0, 1); x)\}$, $j=1, 2, \dots, m_1$ и положим

$$f_i^1(x) = \frac{1}{\sqrt{m_1}} \sum_{j=1}^{m_1} r_j((0, 1); x).$$

Предположим, что уже построены функции $f_n^1(x), \dots, f_n^{2^{n-1}}(x)$, причем каждой функции $f_n^k(x)$, $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ соответствуют два множества $E_{n,k}^+$ и $E_{n,k}^-$ таких, что

1. Каждое из множеств $E_{n,k}^+$ и $E_{n,k}^-$ состоит из конечного числа непересекающихся интервалов, на каждом из которых $f_n^k(x)$ постоянна;
2. $f_n^k(x) \geq 0$ на $E_{n,k}^+$, $f_n^k(x) \leq 0$ на $E_{n,k}^-$ и $E_{n,k}^+ \cap E_{n,k}^- = \emptyset$;
3. $mE_{n,k}^+ = mE_{n,k}^- = \frac{1}{2^n}$.

Пусть $E_{n,k}^+$ состоит из интервалов $\Delta_{n,k,1}^+, \dots, \Delta_{n,k,s_{n,k}^+}^+$, а $E_{n,k}^-$ — из интервалов $\Delta_{n,k,1}^-, \dots, \Delta_{n,k,s_{n,k}^-}^-$.

Возьмем некоторое натуральное число m_n и построим функции

$$f_{n+1}^{2k-1}(x) = \frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{m_n}} \sum_{i=1}^{s_{n,k}^+} \sum_{j=1}^{m_n} r_j(\Delta_{n,k,i}^+; x)$$

и

$$f_{n+1}^{2k}(x) = \frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{m_n}} \sum_{i=1}^{s_{n,k}^-} \sum_{j=1}^{m_n} r_j(\Delta_{n,k,i}^-; x).$$

Проделав это для любого $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, мы построим 2^n функций $f_{n+1}^1(x), \dots, f_{n+1}^{2^n}(x)$, которые будут составлять $(n+1)$ -ю группу.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим ортогональную и нормированную систему $\{f_n^k(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$; $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$.

В действительности мы имеем дело с классом систем, так как описанный выше процесс зависит от выбора чисел m_n и функций $r_j(\Delta; x)$. Этот класс систем мы обозначим через γ .

Заметим, что при

$$m_n = 1, \quad n = 1, 2, \dots \text{ и } r_1((a, b); x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(a, \frac{b-a}{2}\right) \\ -1, & x \in \left(\frac{b-a}{2}, b\right), \end{cases}$$

мы получаем систему Хаара.

Легко заметить, что любая система из класса γ будет полной тогда и только тогда, когда она совпадает с системой Хаара. Несмотря на это, для этих систем верна теорема Ульянова—Олевского о существовании рядов из L^2 , расходящихся после перестановок. Это утверждение сформулировано в теореме 3.2 и при ее доказательстве су-

ущественно используется тот факт (сформулированный в теореме 3.1), что для всех систем класса γ имеет место аналог теоремы Никишина—Ульянова.

Теорема 3.1. Пусть система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит классу γ . Тогда для любого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$$

безусловная сходимость почти всюду на некотором множестве E эквивалентна абсолютной сходимости почти всюду на E .

Справедливость этой теоремы вытекает из того, что для систем из γ выполняются все условия теоремы 2.1.

Теорема 3.2. По любой системе из класса γ существует ряд из L^2 , который после некоторой перестановки, расходится почти всюду.

Эта теорема следует из теоремы 3.1 и из следующей леммы.

Лемма 3.1. Если система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит γ , то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f_k(x) \right] \quad (3.1)$$

сходится в метрике L^p при любом $p > 0$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f_k(x) \right| \quad (3.2)$$

расходится почти всюду.

Доказательство. Согласно неравенству Хинчина ([8], стр. 153) имеем при $p > 0$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(x) \right|^p dx \leq \left(\frac{p}{2} + 1 \right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{p}{2}},$$

где $r_k(x)$ — функции Радемахера.

Очевидно это неравенство сохраняет силу, если вместо функций $r_1(x), \dots, r_n(x)$ подставить любые функции $r_1((0, 1); x), \dots, r_n((0, 1); x)$, если только для них выполняются условия 1 и 2, стр. 117.

Далее заметим, что сумму

$$\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f_k(x)$$

можно представить в виде

$$\frac{\sqrt{2^{n-1}}}{\sqrt{m_n}} \sum_{k=1}^{m_{n-1}} r_k^n((0, 1); x).$$

Поэтому будем иметь

$$\sum_{n=N}^{N+s} \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f_k(x) = \sum_{n=N}^{N+s} \frac{1}{n \sqrt{m_{n-1}}} \sum_{k=1}^{m_{n-1}} r_k^n((0, 1); \lambda), \quad (3.3)$$

причем для системы $r_k^n((0, 1); x)$, $n = N, \dots, N+s$; $k = 1, \dots, m_{n-1}$ выполняются условия 1 и 2, стр. 117.

Теперь докажем, что ряд (3.1) сходится в метрике L^p при любом $p > 0$.

Применяя равенство (3.3) и неравенство Хинчина, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^{N+s} \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \frac{1}{n} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f_k(x) \right|^p dx = \\ & = \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^{N+s} \frac{1}{n \sqrt{m_{n-1}}} \sum_{k=1}^{m_{n-1}} r_k^n((0, 1); x) \right|^p dx \leq \left(\frac{p}{2} + 1 \right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{n=N}^{N+s} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{p}{2}}, \end{aligned}$$

откуда следует сходимость ряда (3.1) в L^p .

Докажем, что ряд (3.2) расходится почти всюду.

Для функций Радемахера имеет место следующее неравенство (см. [8], стр. 154):

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n r_j(x) \right| dx > \frac{1}{8} \sqrt{n}.$$

Отсюда получаем

$$\int_{\Delta} \left| \sum_{j=1}^n r_j(\Delta; x) \right| dx \geq \frac{1}{8} m \Delta \sqrt{n}. \quad (3.4)$$

В дальнейшем нам понадобится неравенство (3.4), а также следующий факт.

Если

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = 1,$$

то

$$\int_E |f(x)| dx \leq \varepsilon$$

для любого измеримого множества E с $mE \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$.

Теперь допустим, что ряд (3.2) сходится на некотором множестве E с $mE > 0$. Можно считать что сходимость равномерная. Тогда будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \frac{1}{n} \int_E \left| \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f_k(x) \right| dx < \infty. \quad (3.5)$$

Но этого не может быть. Мы сейчас покажем, что ряд, стоящий в левой части (3.5), расходится.

Функции $\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f_k(x)$ нормированы на $[0, 1]$ и для них

имеет место представление

$$\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{m_{n-1}}} \sum_{k=1}^{m_{n-1}} r_k^n((0, 1); x).$$

Пусть $\varepsilon \leq \frac{mE}{32}$. Возьмем n_0 настолько большим, чтобы при $n \geq n_0$ можно было указать множество Δ_n , являющееся суммой конечного числа интервалов, на которых функция $r_k^n((0, 1); x)$ постоянна, для которого $m(\Delta_n \cap E) > \frac{mE}{2}$ и $m(\Delta_n - E) < \frac{\varepsilon^2}{4}$.

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \frac{1}{n} \int_E \left| \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f_k(x) \right| dx &\geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\Delta_n \cap E} \left| \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f_k(x) \right| dx = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\Delta_n} \left| \frac{1}{\sqrt{m_{n-1}}} \sum_{k=1}^{m_{n-1}} r_k^n((0, 1); x) \right| dx - \\ &- \int_{\Delta_n - E} \left| \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} f_k(x) \right| dx \geq \\ &\geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8} m \Delta_n - \varepsilon \right) \geq \frac{mE}{32} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

откуда следует расходимость ряда (3.2).

Итак, лемма 3.1, а с ней и теорема 3.2, доказаны.

§ 4. Некоторые обобщения теорем Ульянова и Олевского о расходимости рядов из L^2 после перестановок

В настоящем параграфе доказывается теорема, из которой получаются аналоги теоремы Ульянова—Олевского (см. введение, теорему 2) для некоторых F -пространств, содержащих непрерывные функции.

Рассматриваются следующие L -пространства:

1. Пространства $L^p_{[0, 1]}$, $p > 1$ всех измеримых функций, заданных на $[0, 1]$, для которых

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty;$$

2. Пространства $L_{\varphi}[0, 1]$ всех измеримых функций, заданных на $[0, 1]$, для которых

$$\|f\| = \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx < \infty,$$

где $\varphi(t)$ — положительная непрерывная функция на $[0, \infty)$, удовлетворяющая условиям

- а) $\varphi(t_1 + t_2) \leq \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$,
- в) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \uparrow \infty$ при $t \uparrow \infty$,
- с) $\frac{t}{\varphi(t)} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Очевидно пространства L^p при $0 < p < 1$ являются L_{φ} -пространствами при $\varphi(t) = t^p$;

3. Пространство сходимости по мере, т. е. пространство всех почти везде конечных измеримых функций с нормой

$$\|f\| = \int_0^1 \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|} dx.$$

Следуя работе [5], введем

Определение. Пусть X есть F -пространство, M — подмножество X и $\{x_n\}$ — система отличных от нуля элементов X . Система $\{x_n\}$ называется системой представления для M в метрике пространства X , если для любого $x \in M$ существует ряд по системе $\{x_n\}$, который сходится к x по норме пространства X .

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 4.1. Пусть X есть либо пространство $L^p_{[0, 1]}$, $p > 1$, либо пространство $L_{\varphi}[0, 1]$. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления для класса непрерывных функций $C_{[0, 1]}$ в метрике X . Тогда существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

по системе $\{\varphi_n(x)\}$, сходящийся по норме пространства X и расходящийся почти всюду после некоторой перестановки его членов.

В том случае, когда X есть $L_{[0,1]}^p$, $p > 1$ и $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления для класса $L_{[0,1]}^q$, $q \geq p$, аналогичная теорема была доказана А. А. Талаляном в работе [5]. Для базисов $L_{[0,1]}^p$, $p > 1$ соответствующий результат был получен Ф. Г. Арутюняном в [6].

Теорема 4.2. Пусть X есть пространство сходимости по мере. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления для класса непрерывных функций в метрике X , удовлетворяющая условию

$$m\{x: \varphi_n(x) \neq 0\} > C > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

по системе $\{\varphi_n(x)\}$, сходящийся по норме пространства X и расходящийся почти всюду после некоторой перестановки его членов.

Из теоремы 4.1 следует

Теорема 4.3. Пусть X есть либо пространство $L_{[0,1]}^p$, $p \geq 1$, либо пространство $L_{\tau}[0,1]$, и пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система отличных от нуля функций из X такая, что для любой функции $f(x) \in X$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

сходящийся к $f(x)$ по норме пространства X^* . Тогда существует ряд по системе $\{\varphi_n(x)\}$, сходящийся по норме пространства X и расходящийся почти всюду после некоторой перестановки его членов.

В случае, когда X есть $L_{\tau}[0,1]$, теорему 4.3 можно рассматривать как аналог теоремы Ульянова о расходимости почти всюду разложений по базисам пространства L^2 после перестановок. Это объясняется тем, что в пространствах L_{τ} нет базисов и поэтому вместо базисов приходится рассматривать системы представления.

Несуществование базисов в L_{τ} следует из того, что в L_{τ} нет непрерывного линейного функционала. Для пространств L^p , $0 < p < 1$ этот факт был отмечен Деєм [7]. В общем же случае это получается из следующих рассуждений.

Если Φ — ненулевой непрерывный линейный функционал на L_{τ} , то найдется функция $f(t) \in L_{\tau}$, удовлетворяющая неравенствам $0 < C_1 \leq |f(t)| \leq C_2$, $t \in [0, 1]$ такая, что

$$\Phi(f) = \alpha > 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \varphi(|f(t)|) dt = \beta \neq 0.$$

* В случае, когда X есть $L_{[0,1]}^p$, $p > 1$, в качестве системы $\{\varphi_n(x)\}$ можно взять любой базис в L^p , $p > 1$.

Разделим отрезок $[0, 1]$ на n частей точками $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$ так, чтобы

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi(|f(t)|) dt = \frac{\beta}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Пусть $f_i(t) = f(t) \chi_{[a_i, a_{i+1}]}$. Тогда найдется такое i_0 , что $\Phi(f_{i_0}) \geq \frac{\alpha}{n}$. Так как $C_1 \leq |f(t)|$, то

$$a_{i_0+1} - a_{i_0} \leq \frac{1}{\varphi(C_1)} \int_{a_{i_0}}^{a_{i_0+1}} \varphi(|f(t)|) dt = \frac{\beta}{n \varphi(C_1)}.$$

Следовательно

$$\int_0^1 \varphi(n|f_{i_0}(t)|) dt = \int_{a_{i_0}}^{a_{i_0+1}} \varphi(n|f(t)|) dt \leq \varphi(nC_2) (a_{i_0+1} - a_{i_0}) \leq \frac{\varphi(nC_2)\beta}{n\varphi(C_1)}.$$

Таким образом, можно указать последовательность функций $f_k(t) \in L_\varphi$, удовлетворяющих условиям $\|f_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $\Phi(f_k) \geq \alpha > 0$.

Теперь переходим к доказательству сформулированных теорем. Предварительно докажем несколько лемм. Следующая лемма доказана в работе [5].

Лемма 4.1. Пусть X есть F -пространство с нормой $\|\cdot\|$, X_1 — подмножество множества X , тоже являющееся F -пространством с нормой $\|\cdot\|_1$, причем $\|\cdot\|_1$ сильнее $\|\cdot\|$. Пусть далее последовательность $\{x_n\}$ отличных от нуля элементов пространства X обладает тем свойством, что для любого $x \in X_1$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k \quad (*)$$

сходящийся к x по норме $\|\cdot\|$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k - x \right\| = 0. \quad (**)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $x \in X_1$ и $\|x\|_1 < \delta$, то найдется ряд $(*)$ со свойством $(**)$, для которого

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\| \leq \varepsilon.$$

Из этой леммы следует, что если определить функцию $\varepsilon(\delta)$ равенством

$$\varepsilon(\delta) = \sup_{x \in X_1, \|x\|_1 < \delta} \left\{ \inf \left[\sup_n \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\| \right] \right\}, \quad (4.1)$$

где inf берется по всем рядам (*) сходящимся к x , то $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Лемма 4.2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления для класса $C_{[0,1]}$ в метрике X , $\Delta \subset [0, 1]$ — некоторый интервал и $\alpha > 0$ — действительное число.

Тогда для любых $\eta > 0$ и натурального N существуют функция $f(x)$ и полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \quad (m > N)$$

такие, что

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in E_1 \\ -\alpha, & x \in E_2 \\ 0, & x \in [0, 1] - (E_1 \cup E_2), \end{cases}$$

где E_1 и E_2 состоят из конечного числа интервалов

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_1 \cup E_2 \subset \Delta, \quad mE_1 = mE_2 = \frac{m\alpha}{4};$$

$$2) \quad \left\| f(x) - \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \right\| < \eta;$$

$$3) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\| < 8\varepsilon(x), \quad N+1 \leq n \leq m,$$

где $\varepsilon(x)$ определяется согласно (4.1), в котором $X_1 = C_{[0,1]}$.

Доказательство. Пусть $\Delta = (a, b)$. Определим функции $\psi_n(x)$ следующим образом:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} r_n \left(\frac{x-a}{b-a} \right), & x \in \Delta \\ 0, & x \in [0, 1] - \Delta, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $r_n(t)$ — функции Радемахера.

Для любого n возьмем непрерывную функцию $\psi'_n(x)$ так, чтобы

$$\|\psi_n(x) - \psi'_n(x)\| < \frac{\eta}{4} \quad \text{и} \quad \max_{0 < x < 1} |\psi'_n(x)| = \frac{\alpha}{2}. \quad (4.3)$$

По условию для каждой функции $\psi'_n(x)$ существует сходящийся к ней в метрике X ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} \varphi_k(x). \quad (4.4)$$

В силу леммы 4.1 ряд (4.4) можно выбрать так, чтобы его частные суммы удовлетворяли неравенству

$$\left\| \sum_{k=1}^i a_k^{(n)} \varphi_k(x) \right\| < 2 \cdot \varepsilon \left(\frac{\alpha}{2} \right) < 2\varepsilon(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Норма рассматриваемого пространства X обладает тем свойством, что если $x \in X$ и $\|x\| \neq 0$, то $\|ax\| \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow \infty^*$. Поэтому из (4.5) вытекает, что для каждого фиксированного k последовательность $\alpha_k^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ ограничена. Следовательно существует возрастающая последовательность натуральных чисел

$$m_1 < m_2 < \dots < m_j < \dots \quad (4.6)$$

такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_k^{(m_j)} = b_k, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (4.7)$$

Рассмотрим последовательность рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j)} \varphi_k(x), \quad c_k^{(j)} = a_k^{(m_{j-1})} - a_k^{(m_j)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Так как

$$\lim_{j \rightarrow \infty} c_k^{(j)} = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (4.9)$$

то j_0 можно взять настолько большим, чтобы

$$\left\| \sum_{k=1}^N c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) \right\| < \frac{\eta}{4}. \quad (4.10)$$

После того как j_0 выбрано возьмем $m > N$ настолько большим, чтобы

$$\left\| \sum_{k=1}^m c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) - [\psi'_{m_{j_0-1}}(x) - \psi'_{m_{j_0}}(x)] \right\| < \frac{\eta}{4}. \quad (4.11)$$

Положим

$$f(x) = \psi'_{m_{j_0-1}}(x) - \psi'_{m_{j_0}}(x). \quad (4.12)$$

Теперь покажем, что функция $f(x)$ и полином

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad c_k = c_k^{(j_0)} \quad (4.13)$$

удовлетворяют всем условиям леммы.

Выполнение условия 1) следует из (4.2) и (4.12).

Из (4.3), (4.10), (4.11) и (4.12) следует

$$\begin{aligned} & \left\| f(x) - \sum_{k=N+1}^m c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) \right\| \leq \left\| f(x) - [\psi'_{m_{j_0-1}}(x) - \psi'_{m_{j_0}}(x)] \right\| + \\ & + \left\| \psi'_{m_{j_0-1}}(x) - \psi'_{m_{j_0}}(x) - \sum_{k=1}^m c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^N c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) \right\| < \eta, \end{aligned}$$

* X есть $L_{[0, 1]}^p$, $p > 1$ или $L_{\bar{\tau}}$.

так что условие 2) выполняется.

Выполнение условия 3) вытекает из (4.5). Имеем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k^{(j_k)} \varphi_k(x) \right\| \leq \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k^{(m, j_k-1)} \varphi_k(x) \right\| + \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k^{(m, j_k)} \varphi_k(x) \right\| \leq 8\varepsilon(\alpha).$$

Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления для класса $C_{[0, 1]}$ в метрике X , $\Delta \subset [0, 1]$ — множество, состоящее из конечного числа непересекающихся интервалов, и $\alpha > 0$ — действительное число.

Тогда для любых $\eta > 0$ и натурального N существуют функция $f(x)$ и полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \quad (m > N)$$

такие, что

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in E_1 \\ -\alpha, & x \in E_2 \\ 0, & x \in [0, 1] - \Delta, \end{cases}$$

где E_1 и E_2 состоят из конечного числа интервалов

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_1 \cup E_2 = \Delta, \quad mE_1 = mE_2 = \frac{m\Delta}{2};$$

$$2) \quad \left\| f(x) - \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \right\| < \eta;$$

$$3) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\| < \eta + \|\alpha\| + 8\varepsilon(\alpha), \quad N+1 \leq n \leq m^2.$$

Доказательство. Выберем натуральное r настолько большим, чтобы при $E \subset [0, 1]$ и $mE < \frac{1}{2r}$ выполнялось неравенство

$$\|\alpha \cdot \chi_E(x)\| < \frac{\eta}{2}, \quad (4.14)$$

где $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E .

Теперь мы опишем процесс, в котором для каждого i , $1 \leq i \leq r$ строится группа функций $f_1^i(x), \dots, f_{s_i}^i(x)$ и группа соответствующих полиномов по системе $\{\varphi_n(x)\}$, $P_1^i(x), \dots, P_{s_i}^i(x)$, причем число s_i определяется в процессе построения.

* $\|\alpha\|$ есть норма функции, равной тождественно α .

Пусть множество Δ состоит из интервалов $\Delta_1^1, \Delta_2^1, \dots, \Delta_{s_1}^1$. Применяя лемму 4.2 при $\Delta = \Delta_1^1$, $\eta = \frac{\eta}{2 \cdot 2}$ и $N = N$, мы построим функцию $f_1^1(x)$ и полином $P_1^1(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$P_1^1(x) = \sum_{k=N+1}^{m_1^1} c_k \varphi_k(x) \quad (m_1^1 > N).$$

Далее по той же лемме при $\Delta = \Delta_2^1$, $\eta = \frac{\eta}{2 \cdot 2^2}$ и $N = m_1^1$ мы построим функцию $f_2^1(x)$ и полином

$$P_2^1(x) = \sum_{k=m_1^1+1}^{m_2^1} c_k \varphi_k(x) \quad (m_2^1 > m_1^1)$$

и т. д. На последнем, s_1 -ом шаге, применяя лемму 4.2 при $\Delta = \Delta_{s_1}^1$, $\eta = \frac{\eta}{2 \cdot 2^{s_1}}$ и $N = m_{s_1-1}^1$, мы построим функцию $f_{s_1}^1(x)$ и полином

$$P_{s_1}^1(x) = \sum_{k=m_{s_1-1}^1+1}^{m_{s_1}^1} c_k \varphi_k(x) \quad (m_{s_1}^1 > m_{s_1-1}^1).$$

Таким образом, построена первая группа функций и соответствующих им полиномов.

Заметим, что множества $E_j = \{x : f_j^1(x) \neq 0\}$, $j = 1, 2, \dots, s_1$ попарно не пересекаются.

Пусть построены функции $f_1^{i-1}(x), \dots, f_{s_{i-1}}^{i-1}(x)$ и полиномы

$$P_1^{i-1}(x) = \sum_{k=m_{s_{i-2}}^{i-2}+1}^{m_1^{i-1}} c_k \varphi_k(x), \dots, \quad P_{s_{i-1}}^{i-1}(x) = \sum_{k=m_{s_{i-1}-1}^{i-1}+1}^{m_{s_{i-1}}^{i-1}} c_k \varphi_k(x).$$

Обозначим через $\Delta_1^i, \Delta_2^i, \dots, \Delta_{s_i}^i$ те интервалы, содержащиеся в Δ , на которых все функции $f_j^l(x)$, $l = 1, \dots, i-1$; $j = 1, \dots, s_l$ равны нулю.

Пусть $t_i = s_1 + \dots + s_{i-1}$. Применяя лемму 4.2, при $\Delta = \Delta_1^i$, $\eta = \frac{\eta}{2 \cdot 2^{t_i+1}}$ и $N = m_{s_{i-1}}^{i-1}$ мы построим функцию $f_1^i(x)$ и полином

$$P_1^i(x) = \sum_{k=m_{s_{i-1}}^{i-1}+1}^{m_1^i} c_k \varphi_k(x) \quad (m_1^i > m_{s_{i-1}}^{i-1}).$$

Далее, применяя лемму 4.2, при $\Delta = \Delta_2^i$, $\eta = \frac{\eta}{2 \cdot 2^{i+2}}$ и $N = m_1^i$,

построим функцию $f_2^i(x)$ и полином

$$P_2^i(x) = \sum_{k=m_1^i+1}^{m_2^i} c_k \varphi_k(x) \quad (m_2^i > m_1^i)$$

и т. д. На последнем шаге, применяя лемму 4.2 при $\Delta = \Delta_{s_i}^i$, $\eta = \frac{\eta}{2 \cdot 2^{i+s_i}}$ и $N = m_{s_i-1}^i$, мы построим функцию $f_{s_i}^i(x)$ и полином

$$P_{s_i}^i(x) = \sum_{k=m_{s_i-1}^i+1}^{m_{s_i}^i} c_k \varphi_k(x) \quad (m_{s_i}^i > m_{s_i-1}^i).$$

Продолжая этот процесс, мы построим все r групп функций и полиномов. При этом будут выполняться следующие условия:

$$\{x : f_j^i(x) \neq 0\} \cap \{x : f_{j'}^i(x) \neq 0\} = \emptyset, \text{ если } (i, j) \neq (i', j'), \quad (4.15)$$

$$\|f_j^i(x) - P_j^i(x)\| < \frac{\eta}{2 \cdot 2^{i+j}}, \quad (4.16)$$

$$\left\| \sum_{k=m_{j-1}^i+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\| < 8\varepsilon(\alpha), \quad m_{j-1}^i + 1 \leq n \leq m_j^i. \quad (4.17)$$

Пусть $E = \Delta - \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{j=1}^{s_i} \Delta_j^i$. Множество E состоит из конечного числа непересекающихся интервалов. Определим функцию $f_0(x)$ следующим образом:

$$f_0(x) = \begin{cases} a, & x \in E_1^0 \\ -a, & x \in E_2^0 \\ 0, & x \in [0, 1] - (E_1^0 \cup E_2^0), \end{cases} \quad (4.18)$$

где E_1^0 и E_2^0 состоят из конечного числа интервалов

$$E_1^0 \cap E_2^0 = \emptyset, \quad E_1^0 \cup E_2^0 = E, \quad mE_1^0 = mE_2^0 = \frac{mE}{2}.$$

Так как $mE = \left(1 - \sum_{i=1}^r \frac{1}{2^i}\right) m\Delta = \frac{1}{2^r} m\Delta < \frac{1}{2^r}$, то согласно (4.14)

будем иметь

$$\|f_0(x)\| < \frac{\eta}{2}. \quad (4.19)$$

Теперь положим $m = m_{s_i}^i$ и

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{s_i} f_j^i(x). \quad (4.20)$$

Докажем, что функция $f(x)$ и полином

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x)$$

удовлетворяют утверждениям леммы 4.3.

Во первых, из (4.15) и (4.18) получаем

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in E_1 \\ -a, & x \in E_2 \\ 0, & x \in [0, 1] - \Delta, \end{cases}$$

где E_1 и E_2 состоят из конечного числа интервалов

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_1 \cup E_2 = \Delta, \quad mE_1 = mE_2 = \frac{m\Delta}{2}.$$

Теперь докажем, что имеет место неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \right| < \eta.$$

В силу (4.16) и (4.19) имеем

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \right| &= \left| f_0(x) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{s_i} f_j^i(x) - \right. \\ &- \left. \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{s_i} P_j^i(x) \right| \leq \left| f_0(x) \right| + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{s_i} \left| f_j^i(x) - P_j^i(x) \right| \leq \\ &\leq \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\eta}{2^i} < \eta. \end{aligned}$$

Остается проверить условие 3. Пусть $N+1 \leq n \leq m$. Выберем n_0 так, чтобы $m_{n_0}^{n_0} + 1 \leq n < m_{n_0+1}^{n_0+1}$ *. Тогда в силу (4.15), (4.16) и (4.17) имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{s_i} P_j^i(x) + \sum_{k=m_{n_0}^{n_0}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{s_i} P_j^i(x) - \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{s_i} f_j^i(x) + \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{s_i} f_j^i(x) + \right. \end{aligned}$$

* В том случае, когда такого n_0 не существует, выражение $\sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{s_i} P_j^i(x)$ будет отсутствовать в приводимых ниже выкладках.

$$\begin{aligned}
 + \sum_{k=m_{n_0}^{n_0}+1}^n c_k \varphi_k(x) & \leq \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{s_i} \left\| P_j^i(x) - f_j^i(x) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{s_i} f_j^i(x) \right\| + \\
 + \left\| \sum_{k=m_{n_0}^{n_0}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\| & < \gamma_1 + \|x\| + 8\varepsilon(\alpha).
 \end{aligned}$$

Итак, лемма 4.3 полностью доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Требуемый ряд мы построим в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} P_j^i(x),$$

где $P_j^i(x)$ — полиномы по системе $\{\varphi_n(x)\}$. Ниже дается процесс построения этих полиномов.

Сначала заметим следующее. Сходимость в пространстве X сильнее сходимости по мере. Поэтому можно подобрать такие числа γ_i , чтобы из неравенств

$$\|f_i(x)\| < \gamma_i \quad (f_i(x) \in X)$$

вытекало, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|$$

сходится почти всюду.

Для этого достаточно выбрать γ_i так, чтобы из неравенства

$$\|f(x)\| < \gamma_i$$

вытекало неравенство

$$m \left\{ x : |f(x)| > \frac{1}{2^i} \right\} < \frac{1}{2^i}.$$

Теперь возьмем последовательность

$$\eta_i = \min \left(\gamma_i, \frac{1}{i^2 2^{i-1}} \right).$$

Построим первую группу полиномов (состоящую из одного полинома $P_1^1(x)$).

Пусть полином

$$P_1^1(x) = \sum_{k=1}^{m_1^1} c_k \varphi_k(x)$$

построен вместе с функцией $f_1^1(x)$ согласно лемме 4.3 при $\Delta = (0, 1)$, $\alpha = 1$, $\eta = \eta_1$ и $N = 1$.

Пусть построены полиномы

$$P_1^i(x) = \sum_{k=m_0^i+1}^{m_1^i} c_k \varphi_k(x), \quad P_2^i(x) = \sum_{k=m_1^i+1}^{m_2^i} c_k \varphi_k(x), \dots$$

$$\dots, P_{2^{i-1}}^i(x) = \sum_{k=m_{2^{i-1}-1}^i+1}^{m_{2^i-1}^i} c_k \varphi_k(x)$$

и соответствующие им функции $f_1^i(x), f_2^i(x), \dots, f_{2^{i-1}}^i(x)$, и пусть при этом выполняются следующие условия:

а) $m_0^i < m_1^i < \dots < m_{2^i-1}^i$,

б) каждой функции $f_j^i(x)$, $j = 1, 2, \dots, 2^{i-1}$ соответствуют два множества E_{ij}^+ и E_{ij}^- такие, что

1) каждое из множеств E_{ij}^+ и E_{ij}^- состоит из конечного числа непесекающихся интервалов

$$E_{ij}^- \cap E_{ij}^- = \emptyset, \quad mE_{ij}^+ = mE_{ij}^- = \frac{1}{2^i},$$

2)

$$f_j^i(x) = \begin{cases} \frac{1}{i}, & x \in E_{ij}^+ \\ -\frac{1}{i}, & x \in E_{ij}^- \\ 0, & x \in [0, 1] - (E_{ij}^+ \cup E_{ij}^-); \end{cases}$$

3) Если $1 \leq j < j' \leq 2^{i-1}$, то $(E_{ij}^+ \cup E_{ij}^-) \cap (E_{i j'}^+ \cup E_{i j'}^-) = \emptyset$.

Теперь построим $(i+1)$ -ю группу полиномов и функций.

Определим множества Δ_k , $k = 1, 2, \dots, 2^i$ следующим образом:

$$\Delta_k = \begin{cases} E_{i, \frac{k+1}{2}}^+, & \text{если } k \text{ нечетно} \\ E_{i, \frac{k}{2}}^-, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases}$$

Применяя лемму 4.3 при $\Delta = \Delta_1$, $\alpha = \frac{1}{i+1}$, $\gamma_i = \gamma_{i+1}$ и $N = m_0^{i+1} = m_{2^i-1}^i$, построим полином

$$P_1^{i+1}(x) = \sum_{k=m_0^{i+1}+1}^{m_1^{i+1}} c_k \varphi_k(x)$$

и функцию $f_1^{i+1}(x)$.

Далее, с помощью той же леммы при $\Delta = \Delta_2$, $\alpha = \frac{1}{i+1}$, $\eta = \eta_{i+1}$.

и $N = m_1^{i+1}$ построим полином

$$P_2^{i+1}(x) = \sum_{k=m_1^{i+1}+1}^{m_2^{i+1}} c_k \varphi_k(x)$$

и функцию $f_2^{i+1}(x)$, и так далее.

На 2^i -ом шаге с помощью леммы 4.3 при $\Delta = \Delta_{2^i}$, $\alpha = \frac{1}{i+1}$,

$\eta = \eta_{i+1}$ и $N = m_{2^i-1}^{i+1}$ построим полином

$$P_{2^i}^{i+1}(x) = \sum_{k=m_{2^i-1}^{i+1}+1}^{m_{2^i}^{i+1}} c_k \varphi_k(x)$$

и функцию $f_{2^i}^{i+1}(x)$.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим все группы полиномов и соответствующих им функций.

Очевидно процесс построения функций $f_j^i(x)$ в точности совпадает с процессом построения χ -систем (при $m_n = 1$).

Таким образом, система $\{i\sqrt{2^{i-1}} f_j^i(x)\}$, полученная нормировкой системы $\{f_j^i(x)\}$, будет χ -системой.

Далее, т. к. полиномы $P_j^i(x)$ и функции $f_j^i(x)$ строятся согласно лемме 4.3, то мы имеем при любом i и j ($1 \leq j \leq 2^{i-1}$)

$$\|f_j^i(x) - P_j^i(x)\| < \eta_i, \quad (4.21)$$

$$\left\| \sum_{k=m_{j-1}^i+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\| < \eta_i + \left\| \frac{1}{i} \right\| + 8\varepsilon \left(\frac{1}{i} \right). \quad (4.22)$$

$$(m_{j-1}^i < n \leq m_j^i)$$

Отметим также следующее. Так как $\{i\sqrt{2^{i-1}} f_j^i(x)\}$ является χ -системой, то из леммы 3.1 следует, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{i-1}}} \frac{1}{i} \left[\sum_{j=1}^{2^{i-1}} i \sqrt{2^{i-1}} f_j^i(x) \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{2^{i-1}} f_j^i(x) \right] \quad (4.23)$$

сходится в $L_{[0,1]}^p$ при любом $p > 0$, а ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{2^{i-1}} f_j^i(x) \right| \quad (4.24)$$

расходится почти всюду.

Легко видеть, что ряд (4.23) сходится также в L_q .
Теперь докажем, что ряд по системе $\{\varphi_n(x)\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} f_j^i(x) \quad (4.25)$$

удовлетворяет утверждению теоремы 4.1.

Пусть

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$$

— частные суммы ряда (2.25). Тогда при $r > s$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| S_{m_{2^r-1}^r}(x) - S_{m_{2^s-1}^s}(x) \right\| &= \left\| \sum_{i=r+1}^s \sum_{j=1}^{2^{i-1}} P_j^i(x) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=r+1}^s \sum_{j=1}^{2^{i-1}} \left\| P_j^i(x) - f_j^i(x) \right\| + \left\| \sum_{i=r+1}^s \sum_{j=1}^{2^{i-1}} f_j^i(x) \right\|. \end{aligned} \quad (4.26)$$

В силу (4.21) имеем

$$\sum_{i=r+1}^s \sum_{j=1}^{2^{i-1}} \left\| P_j^i(x) - f_j^i(x) \right\| < \sum_{i=r+1}^s \sum_{j=1}^{2^{i-1}} \eta_{ii} < \sum_{i=r+1}^s \frac{1}{i^2}. \quad (4.27)$$

С другой стороны, в силу сходимости ряда (4.23) имеем

$$\left\| \sum_{i=r+1}^s \sum_{j=1}^{2^{i-1}} f_j^i(x) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } r, s \rightarrow \infty. \quad (4.28)$$

Из (4.26), (4.27) и (4.28) следует

$$\left\| S_{m_{2^r-1}^r}(x) - S_{m_{2^s-1}^s}(x) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } r, s \rightarrow \infty. \quad (4.29)$$

Теперь докажем, что

$$\max_{m_{2^r-1}^r + 1 < n < m_{2^r}^r} \left\| \sum_{k=m_{2^r-1}^r + 1}^n c_k \varphi_k(x) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (4.30)$$

Пусть $m_{2^r-1}^r = m_0^{r+1} < n \leq m_{2^r}^{r+1}$. Тогда найдется такое t , $0 \leq t < 2^r$, что

$$\sum_{k=m_{2^r-1}^r + 1}^n c_k \varphi_k(x) = \sum_{j=1}^t P_j^{r+1}(x) + \sum_{k=m_t^{r+1} + 1}^n c_k \varphi_k(x), \quad (4.31)$$

где второе слагаемое в правой части является частной суммой полинома $P_{t+1}^{r+1}(x)$, причем при $t=0$ предполагается, что

$$\sum_{j=1}^l P_j^{r+1}(x) = 0.$$

Из (4.31), в силу (4.21) и (4.22) получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m_{2^{r-1}}^{r+1}}^n c_k \varphi_k(x) \right| &= \left| \sum_{j=1}^l P_j^{r+1}(x) + \sum_{k=m_{2^l}^{r+1}}^n c_k \varphi_k(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^l \left| P_j^{r+1}(x) - f_j^{r+1}(x) \right| + \left| \sum_{j=1}^l f_j^{r+1}(x) \right| + \left| \sum_{k=m_{2^l}^{r+1}}^n c_k \varphi_k(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^l \gamma_{r+1} + \left| \frac{1}{r+1} \right| + \gamma_{r+1} + \left| \frac{1}{r+1} \right| + 8\varepsilon \left(\frac{1}{r+1} \right) < \\ &< \frac{2}{(r+1)^2} + 2 \left| \frac{1}{r+1} \right| + 8\varepsilon \left(\frac{1}{r+1} \right), \end{aligned}$$

откуда следует (4.30).

Из (4.29) и (4.30) вытекает сходимость ряда (4.25) в X . Остается доказать, что члены ряда (4.25) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд расходился почти всюду.

Из расходимости почти всюду ряда (4.24) следует, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} |f_j^i(x)| \quad (4.32)$$

расходится почти всюду.

Вводя для функций $f_j^i(x)$ одинарную нумерацию, перепишем ряд (4.32) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|. \quad (4.33)$$

В силу теоремы 3.1 из того, что ряд (4.33) расходится почти всюду, следует существование такой перестановки p_k натуральных чисел, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{p_k}(x) \quad (4.34)$$

расходится почти всюду.

Пусть $P_{n_k}(x)$ — тот из полиномов $P_j^i(x)$, который соответствует функции $f_{p_k}(x)$.

В силу выбора чисел γ_i из неравенств (4.21) имеем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x) \quad (4.35)$$

также расходится почти всюду.

Рассматривая ряд (4.35) в раскрытом виде, мы получим перестановку ряда (4.25), расходящуюся почти всюду. Теорема 4.1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 4.2. В формулировке теоремы 4.2 на систему $\{\varphi_n(x)\}$ было наложено дополнительное условие

$$m\{x : \varphi_n(x) \neq 0\} > C > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если это условие выполняется, то лемма 4.2 верна и в том случае, когда X есть пространство сходимости по мере. Действительно, в доказательстве леммы 4.2 изменится лишь рассуждение, с помощью которого из (4.5) получаются (4.6) и (4.7). В случае, когда X есть пространство сходимости по мере, из (4.5) следуют (4.6) и (4.7), в силу указанного дополнительного условия на систему $\{\varphi_n(x)\}$. В остальной теорема 4.2 доказывается дословным повторением доказательства теоремы 4.1.

Ереванский государственный
университет

Поступило 22. XII. 1969

Յ. Ա. ՔԱՂԱՅԱՆ. Բացարձակ և ոչ պայմանական զուգամիտության մասին (ամփոփում)

Նկարագրված են շարքի ֆունկցիաների այնպիսի սխտեմներ, որոնցով զրված շարքերի համար ոչ պայմանական զուգամիտությունը համարյա ամենուրեք համարժեք է բացարձակ զուգամիտությանը համարյա ամենուրեք:

Ստացված արդյունքների օգնությամբ հետազայում պացուցվում են տեղափոխումից հետո համարյա ամենուրեք տարամիտող օրթոգոնալ շարքերի գոյության մասին Պ. Լ. Ուլյանովի և Ա. Մ. Օլեվսկու թեորեմների որոշ ընդհանրացումներ:

F. A. TALALIAN. On absolute and unconditional convergence (summary)

The paper deals with the systems of measurable functions, for which the a. e. unconditional convergence of series by a system is equivalent to a. e. absolute convergence.

The results obtained permit to generalise the theorems of Uljanov and Olevski on the existence of orthogonal series which diverge after permutations.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Е. М. Никишин и П. Л. Ульянов. Об абсолютной и безусловной сходимости, УМН, 22, № 3, 1967, 240—242.
2. П. Л. Ульянов. Расходящиеся ряды Фурье, УМН, 16, № 3, 1961, 61—142.
3. А. М. Олевский. Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам, ДАН СССР, 138, № 3, 1961, 545—548.
4. П. Л. Ульянов. О множителях Вейля для безусловной сходимости, Матем. сб., 60, 1, 1963, 39—62.

5. А. А. Талалян. О системах функций, ряды по которым представляют в метрике L^p функции пространства L^q , $1 < p < q$, Известия АН АрмССР, „Математика“, 3, №№ 4—5, 1968, 327—357.
6. Ф. Г. Арутюнян. О сходимости почти всюду рядов по базисам пространства L^p , ДАН АрмССР, 41, № 5, 1965, 364—371.
7. М. М. Day. The spaces L^p with $0 < p < 1$, Bull. Amer. Math. Soc., 46, 1940, 816—823.
8. С. Качмаж и Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., 1958.