ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 1, 1970 Математика

А. В. ЕФИМОВ

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕАКТИВНЫХ J-РАСТЯГИВАЮЩИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Пусть $w(\lambda)$—рациональная матрица-функция, обладающая свойствами

(I) $\overline{w(\overline{\lambda})} \equiv w(\lambda)$,

(II) $w^*(\lambda) J_1 w(\lambda) - J_1 \geq 0$, когда $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$,

(III) $w'(\lambda) J_2 w(\lambda) \equiv J_2$,

(IV) $w^*(\lambda) J_1 w(\lambda) = J_1$, когда $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$.

В статье [1] показано, что проходная матрица произвольного линейного пассивного реактивного $4n$-полюсника является рациональной и обладает свойствами (I)—(IV). В настоящей статье доказывается обратное утверждение: каждая рациональная матрица-функция $w(\lambda)$, обладающая свойствами (I)—(IV), является проходной матрицей некоторого $4n$-полюсника указанного типа. Таким образом, справедлива следующая основная теорема:

Для реализуемости матрицы-функции $w(\lambda)$ (порядка $2n$) в виде линейного пассивного реактивного $4n$-полюсника необходимо и достаточно, чтобы $w(\lambda)$ являлась рациональной матрицей-функцией и обладала свойствами (I)—(IV).

Эта теорема является аналогом известной теоремы Кауэра (см. [2]); она играет в теории J-растягивающих матриц-функций и цепных соединений многополюсников ту же роль, что теорема Кауэра в теории позитивных матриц-функций и последовательно-параллельных соединений многополюсников. Значение подобного рода теорем определяется тем, что они выделяют совокупность математических объектов, являющихся математическим эквивалентом тех или иных физических конструкций.

Доказательство второй части основной теоремы (достаточность) состоит в конструировании линейного пассивного реактивного $4n$-полюсника с наперед заданной проходной матрицей $w(\lambda)$, обладающей свойствами (I)—(IV). Построение такого $4n$-полюсника опирается на теорему статьи [3] В. П. Потапова. В соответствии с этой теоремой матрица-функция $w(\lambda)$ может быть представлена в виде произведения конечного числа простейших (примарных) матриц-функций, также обладающих свойствами (I)—(IV). С математической точки зрения структура примарных матриц весьма сложна. По расположению полюсов в комплексной плоскости различаются следующие пять типов примарных матриц-функций:

$$r(\lambda)=\begin{bmatrix} r_{11}(\lambda) & r_{12}(\lambda) \\ r_{21}(\lambda) & r_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Тип I. $r(\lambda)$ имеет четверку (простых) полюсов:

$$\lambda_0=\sigma_0+i\tau_0,\ -\lambda_0,\ \overline{\lambda}_0,\ -\overline{\lambda}_0\ (\sigma_0>0,\ \tau_0>0).$$

Блоки матрицы $r(\lambda)$ имеют вид (см. [3])

$$r_{11}(\lambda)=I+\frac{4\sigma_0}{\Delta_1}\left[\lambda_0\frac{(\alpha+\delta)\dot{f}_1 f_2-(\theta+\gamma)\dot{f}_1\overline{f}_2}{\lambda^2-\lambda_0^2}+\overline{\lambda}_0\frac{(\alpha+\delta)\dot{\overline{f}}_1\overline{f}_2-(\overline{\theta}+\overline{\gamma})\dot{\overline{f}}_1 f_2}{\lambda^2-\overline{\lambda}_0^2}\right],$$

$$r_{12}(\lambda)=\frac{4\sigma_0\lambda}{\Delta_2}\cdot\left[\frac{(\alpha-\delta)\dot{f}_1 f_1+(\theta-\gamma)\dot{f}_1\overline{f}_1}{\lambda^2-\overline{\lambda}_0^2}+\frac{(\alpha-\delta)\dot{\overline{f}}_1\overline{f}_1+(\overline{\theta}-\overline{\gamma})\dot{\overline{f}}_1 f_1}{\lambda^2-\overline{\lambda}_0^2}\right],$$

$$\lambda_{21}(\lambda)=\frac{4\sigma_0\lambda}{\Delta_1}\left[\frac{(\alpha+\delta)\dot{f}_2 f_2-(\theta+\gamma)\dot{f}_2\overline{f}_2}{\lambda^2-\lambda_0^2}+\frac{(\alpha+\delta)\dot{\overline{f}}_2\overline{f}_2-(\overline{\theta}+\overline{\gamma})\dot{\overline{f}}_2 f_2}{\lambda^2-\overline{\lambda}_0^2}\right],$$

$$r_{22}(\lambda)=I+\frac{4\sigma_0}{\Delta_2}\left[\lambda_0\frac{(\alpha-\delta)\dot{f}_2 f_1+(\theta-\gamma)\dot{f}_2\overline{f}_1}{\lambda^2-\lambda_0^2}+\overline{\lambda}_0\frac{(\alpha-\delta)\dot{\overline{f}}_2\overline{f}_1+(\overline{\theta}-\overline{\gamma})\dot{\overline{f}}_2 f_1}{\lambda^2-\overline{\lambda}_0^2}\right],$$

где f_1 и f_2 — n-мерные строчные векторы;

$$\alpha=f_2\dot{f}_1+\overline{f}_2\dot{\overline{f}}_1,$$

$$\delta=\frac{\sigma_0}{i\tau_0}\left(f_2\dot{f}_1-\overline{f}_2\dot{\overline{f}}_1\right),$$

$$\gamma=\frac{2\sigma_0}{\overline{\lambda}_0}f_2\dot{\overline{f}}_1;$$

скаляры α, θ, γ, δ связаны соотношениями $\alpha>|\delta|$,

$$\Delta_1=(\alpha+\delta)^2-|\theta+\gamma|^2>0,\ \Delta_2=(\alpha-\delta)^2-|\theta-\gamma|^2>0.$$

Тип II. $r(\lambda)$ имеет пару (простых) полюсов $\lambda_0=\sigma_0>0, -\lambda_0$. Блоки ее имеют вид

$$r_{11}(\lambda)=I+\frac{4\sigma_0^2}{\alpha+\theta}\cdot\frac{\dot{f}_1 f_2}{\lambda^2-\sigma_0^2},\quad r_{12}(\lambda)=\frac{4\sigma_0\lambda}{\alpha-\theta}\cdot\frac{\dot{f}_1 f_1}{\lambda^2-\sigma_0^2},$$

$$r_{21}(\lambda)=\frac{4\sigma_0\lambda}{\alpha+\theta}\cdot\frac{\dot{f}_2 f_2}{\lambda^2-\sigma_0^2},\quad r_{22}(\lambda)=I+\frac{4\sigma_0^2}{\alpha-\theta}\cdot\frac{\dot{f}_2 f_1}{\lambda^2-\sigma_0^2},$$

где f_1, f_2 — вещественные n-мерные строчные векторы, скаляры $\alpha=2f_2\dot{f}_1$, θ — вещественные; при этом $\alpha>|\theta|$.

Тип III. $r(\lambda)$ имеет пару простых полюсов $\lambda_0=i\tau_0\ (\tau_0>0), -\lambda_0$. Блоки ее имеют вид

$$r_{11}(\lambda)=I+\frac{2i\tau_0}{\theta+\delta}\cdot\frac{\dot{f}_1 f_2}{\lambda^2+\tau_0^2},\quad r_{12}(\lambda)=\frac{2\lambda}{\theta-\delta}\cdot\frac{\dot{f}_1 f_1}{\lambda^2+\tau_0^2},$$

$$r_{21}(\lambda)=\frac{2\lambda}{\theta+\delta}\cdot\frac{\dot{f}_2 f_2}{\lambda^2+\tau_0^2},\quad r_{22}(\lambda)=I+\frac{2i\tau_0}{\theta-\delta}\cdot\frac{\dot{f}_2 f_1}{\lambda^2+\tau_0^2},$$

где f_1, f_2 — n-мерные векторы, причем $\bar{f_2} = e^{i\varphi} f_2$, $\bar{f_1} = -e^{i\varphi}\cdot f_1$, θ и $\delta = \frac{f_2 f_1}{i\varphi_0}$ — вещественные скаляры, $\theta > |\delta|$.

Тип IV. $r(\lambda)$ имеет простой полюс $\lambda_0 = 0$. Блоки ее имеют вид

$$r_{11}(\lambda) \equiv I, \quad r_{12}(\lambda) = \frac{f_1^* f_1}{\theta \cdot \lambda},$$

$$r_{21}(\lambda) = \frac{f_2^* f_2}{\theta \cdot \lambda}, \quad r_{22}(\lambda) \equiv I.$$

Тип V. $r(\lambda)$ имеет простой полюс $\lambda_0 = \infty$. Блоки ее имеют вид

$$r_{11}(\lambda) \equiv I, \quad r_{12}(\lambda) = \theta \cdot \lambda f_1^* f_1,$$

$$r_{21}(\lambda) = \theta \cdot \lambda f_2^* f_2, \quad r_{22}(\lambda) \equiv I.$$

В типах IV, V f_1, f_2 — вещественные n-мерные строчные векторы, один из которых (но не оба) равен нулю; $\theta > 0$.

При цепном соединении многополюсников соответствующие им проходные матрицы перемножаются. Поэтому для реализации матрицы $w(\lambda)$ достаточно реализовать примарные матрицы перечисленных пяти типов.

Примарные матрицы-функции являются простейшими в том смысле, что они не могут быть расщеплены в произведение двух не постоянных матриц с теми же полюсами. С физической точки зрения это означает, что примарные матрицы изображают элементарные ячейки цепной структуры реактивной цепи.

Хотя примарные матрицы и просты, реализация их все еще затруднительна. Имея целью упростить задачу, представим $r(\lambda)$ в виде

$$r(\lambda) = \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\, r(\lambda)\, \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1},$$

где $\mathbf{F}$ — постоянная вещественная матрица, обладающая свойствами

$$\mathbf{F}^* J_1 \mathbf{F} = J_1, \quad \mathbf{F}^* J_2 \mathbf{F} = J_2.$$

Нетрудно видеть, что матрица $\mathbf{F}$ имеет вид

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} T' & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix}$$

и может быть реализована в виде идеального трансформатора (см. [2]). Таким образом, если $\mathbf{F}^{-1} r(\lambda)\, \mathbf{F}$ реализована в виде некоторого многополюсника, то $r(\lambda)$ реализуется в виде цепного соединения этого многополюсника и двух идеальных трансформаторов.

Соответствующим подбором матрицы $\mathbf{F}$ можно добиться упрощения векторов f_1 и f_2, а, следовательно, и матрицы $r(\lambda)$: в преобразованной матрице $\tilde{r}(\lambda) = \mathbf{F}^{-1} r(\lambda)\, \mathbf{F}$ выделяется некоторая ее субматрица-ядро, содержащее по существу всю информацию о матрице $\tilde{r}(\lambda)$. Это ядро имеет порядок 2, 4 или 6.

С физической точки зрения это означает, что элементарные ячейки цепной структуры реактивной цепи, вообще говоря, не сводятся к четырехполюснику. *Они могут представлять собой или 4-полюсник, или 8-полюсник, или 12-полюсник.*

В дальнейшем рассматриваются матрицы $\tilde{r}(\lambda)$ порядка 6, приведенные к простому виду. Вместо $\tilde{r}(\lambda)$ будем писать $r(\lambda)$.

Реализация матрицы $r(\lambda)$ типа *I*.

Анализ этой задачи показывает, что возможны следующие пять случаев:

1) Векторы f_1 и f_2 обладают свойством

$$\bar{f}_1 = e^{i\varphi_1}\cdot f_1, \bar{f}_2 = e^{i\varphi_2}\cdot f_2;$$

в дальнейшем такие векторы будем называть вырожденными.

Можно считать, что

$$f_1 = (z_1,\ 0,\ 0),\ f_2 = (z_2,\ 0,\ 0),\ z_1\neq 0,\ z_2\neq 0.$$

$r(\lambda)$ реализуется в виде цепи, приведенной на рис. 1.

Значения физических параметров:

$$l_1 = \frac{\Delta_1}{4\sigma_0\cdot 2\mathrm{Re}\,[(\alpha+\delta)|z_2|^2-(\theta+\gamma)\,\bar{z}_2^2]}>0,$$

$$C_1 = -\frac{4\sigma_0\cdot\omega^2\cdot 2\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0^2\,[(\alpha+\delta)\,|z_2|^2-(\theta+\gamma)\,\bar{z}_2^2]}{\Delta_1\cdot|\lambda_0|^4\cdot\rho_{11}(0)}>0,$$

$$l_2 = -\frac{\Delta_1\cdot|\omega^2+\lambda_0^2|^2\cdot\rho_{11}(i\omega)}{4\sigma_0\omega^2\cdot 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0^2\,[(\alpha+\delta)\,|z_2|^2-(\theta+\gamma)\,\bar{z}_2^2]}>0,$$

$$C_2 = (l_2\cdot\omega^2)^{-1},\ n_1 = \rho_{11}(0),\ n_2 = \rho_{11}(i\omega),$$

$$\omega^2 = -\frac{\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0^2\,[(\alpha+\delta)\,|z_2|^2-(\theta+\gamma)\,\bar{z}_2^2]}{\mathrm{Re}\,[(\alpha+\delta)\,|z_2|^2-(\theta+\gamma)\,\bar{z}_2^2]}>0,$$

$\rho_{11}(\lambda)$ — левый верхний элемент матрицы $r(\lambda)$.

2) Вектор f_1—вырожденный, вектор f_2—невырожденный. Можно считать, что $f_1 = (z_1,\ 0,\ 0)$, $f_2 = (z_2,\ x_2,\ 0)$,

$$\mathrm{Im}\,z_1\neq 0,\ \mathrm{Im}\,z_2\neq 0,\ x_2\neq 0,\ \bar{x}_2 = x_2,$$

$r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 2.

Значения физических параметров

$$l_1 = -\frac{2\,\mathrm{Re}\,[(\alpha+\delta)\,x_2^2-(\theta+\gamma)\,x_2^2]}{4\sigma_0\cdot x_2^2\cdot(z_2-\bar{z}_2)^2}>0,$$

$$l_2 = -\frac{2\mathrm{Re}\,[(\alpha+\delta)\,|z_2|^2-(\theta+\gamma)\,\bar{z}_2^2]}{4\sigma_0\cdot x_2^2\cdot(z_2-\bar{z}_2)^2}>0,$$

$$l = \frac{2\mathrm{Re}\,[(\alpha+\delta)\,\bar{z}_2x_2-(\theta+\gamma)\,\bar{z}_2x_2]}{4\sigma_0\cdot x_2^2\cdot(z_2-\bar{z}_2)^2},$$

$$p_1 = \frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2\,[(\alpha+\delta)\,x_2^2-(\theta+\gamma)\,\bar x_2^2]+8\sigma_0\cdot\operatorname{Re}\bar\lambda_0 x_2 z_1\,(z_2-\bar z_2)}{4\sigma_0\, x_2^2\,(z_2-\bar z_2)^2}>0,$$

$$p_2 = \frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2\,[(\alpha+\delta)\,|z_2|^2-(\theta+\gamma)\,\bar z_2^2]}{4\sigma_0\, x_2^2\,(z_2-\bar z_2)^2}>0,$$

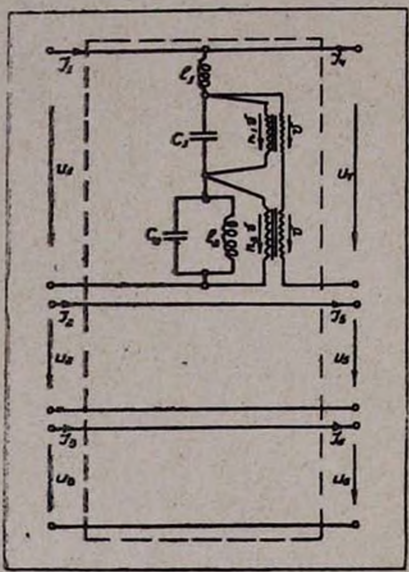

Рис. 1.

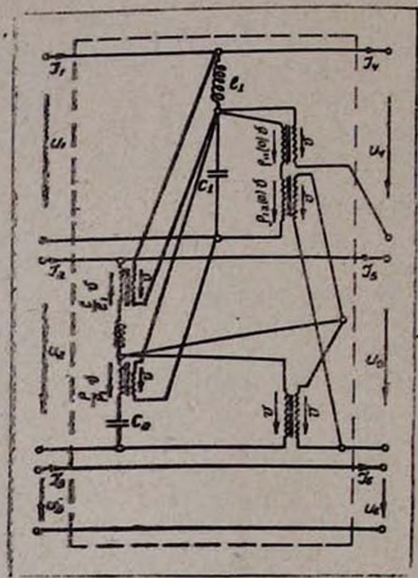

Рис. 2.

$$p = -\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2\,[(\alpha+\delta)\,x_2\cdot z_2-(\theta+\gamma)\,x_2\bar z_2]}{4\sigma_0 x_2^2\,(z_2-\bar z_2)^2},$$

$$L=\frac{l_1l_2-l^2}{l_1}>0,\quad C_1=p_1^{-1},\quad C_2=\frac{p_1}{p_1p_2-p^2}>0;$$

$\rho_{11}(0)$, $\rho_{12}(0)$ — значения элементов матрицы $r(\lambda)$.

3) Вектор f_1—невырожденный, вектор f_2—вырожденный. Можно считать, что $f_1=(z_1, x_1, 0)$, $f_2=(z_2, 0, 0)$,

$$\operatorname{Im} z_1\neq 0,\ \operatorname{Im} z_2\neq 0,\ x_1\neq 0,\ \bar x_1=x_1.$$

$r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 3. Значения физических параметров

$$C_1=-\frac{2\operatorname{Re}\,[(\alpha-\delta)\,x_1^2+(\theta-\gamma)\,\bar x_1^2]}{4\sigma_0\,x_1^2\,(z_1-\bar z_1)^2}>0,$$

$$C_2=-\frac{2\operatorname{Re}[(\alpha-\delta)\,|z_1|^2+(\theta-\gamma)\,\bar z_1^2]}{4\sigma_0\,x_1^2\,(z_1-\bar z_1)^2}>0,$$

$$C=\frac{2\operatorname{Re}[(\alpha-\delta)\bar z_1\,x_1+(\theta-\gamma)\,\bar z_1\,x_1]}{4\sigma_0\,x_1^2\,(z_1-\bar z_1)^2},$$

$$l_1=\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2\,[(\alpha-\delta)\,x_1^2+(\theta-\gamma)\,\bar x_1^2]}{4\sigma_0x_1^2\,(z_1-\bar z_1)^2}+\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0z_2\,(z_1-\bar z_1)}{(z_1-\bar z_1)^2}>0,$$

$$l_2=\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2[(\alpha-\delta)\,|z_1|^2+(\theta-\gamma)\,\bar z_1^2]}{4\sigma_0x_1^2\,(z_1-\bar z_1)^2}>0,$$

$$l=-\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2\,[(\alpha-\delta)\,z_1x_1+(\theta-\gamma)\,\bar z_1x_1]}{4\sigma_0x_1^2\,(z_1-\bar z_1)^2},$$

$$D=\frac{C_1C_2-C^2}{C_1}>0,\quad L=\frac{l_1}{l_1l_2-l^2}>0;$$

$\rho_{st}(\lambda)$ — элементы матрицы $r(\lambda)$.

4) Векторы f_1, f_2 — невырожденные, $(\operatorname{Re}f_2\cdot\operatorname{Re}\overset{*}{f_1})\cdot(\operatorname{Im}f_2\cdot\operatorname{Im}\overset{*}{f_1})\neq$ $\neq(\operatorname{Im}f_2\cdot\operatorname{Re}\overset{*}{f_1})\cdot(\operatorname{Re}f_2\cdot\operatorname{Im}\overset{*}{f_1})$.

Можно считать, что $f_1=(z_1,\ x_1,\ 0)$, $f_2=(z_2,\ x_2,\ 0)$,

$$\operatorname{Im}z_1\neq0,\ \operatorname{Im}z_2\neq0,\ x_1\neq0,\ x_2\neq0,\ \bar x_1=x_1,\ \bar x_2=x_2;$$

$r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 4. Значения физических параметров l_1, l_2, l, L, p_1, C_1, C_2 см. случай 2). Остальные:

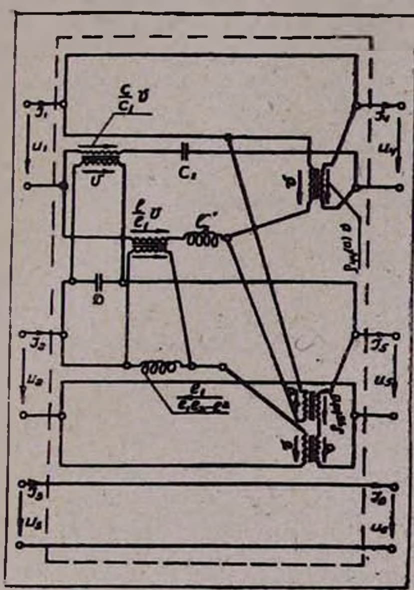

Рис. 3.

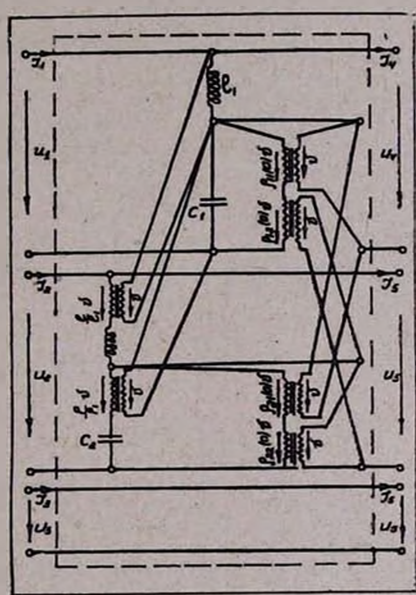

Рис. 4.

$$p_2=\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2\,[(\alpha+\delta)\,|z_2|^2-(\theta+\gamma)\,\bar z_2^2]-8\sigma_0\operatorname{Re}\bar\lambda_0x_1x_2\bar z_2\,(z_2-\bar z_2)}{4\sigma_0\,x_2^2\,(z_2-\bar z_2)^2}>0,$$

$$p=-\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2\,[(\alpha+\delta)\,x_2z_2-(\theta+\gamma)\,x_2\bar z_2]-8\sigma_0\operatorname{Re}\bar\lambda_0\,x_1x_2^2\,(z_2-\bar z_2)}{4\sigma_0\,x_2^2\,(z_2-\bar z_2)^2}.$$

5) Векторы f_1, f_2 — невырожденные, $(\operatorname{Re}f_2\cdot\operatorname{Re}\overset{*}{f_1})\,(\operatorname{Im}f_2\cdot\operatorname{Im}\overset{*}{f_1})=$ $=(\operatorname{Im}f_2\cdot\operatorname{Re}\overset{*}{f_1})\cdot(\operatorname{Re}f_2\cdot\operatorname{Im}\overset{*}{f_1})\neq0$.

Можно считать, что $f_1 = (z_1, 0, x_1)$, $f_2 = (z_2, x_2, 0)$,

$$\operatorname{Im} z_1 \neq 0,\ \operatorname{Im} z_2 \neq 0,\ x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0,\ \bar{x}_1 = x_1,\ \bar{x}_2 = x_2.$$

$r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 5. Значения параметров см. случай 4).

Следует отметить, что *этот случай особенно труден в смысле реализации, так как цепь на рис. 5 не имеет ни матрицы сопротивления, ни матрицы проводимости.*

Реализация матрицы $r(\lambda)$ типа II.

Можно считать, что $f_1 = (x_1, 0, 0)$, $f_2 = (x_2, 0, 0)$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{x}_2 = x_2$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 6. Значения физических параметров

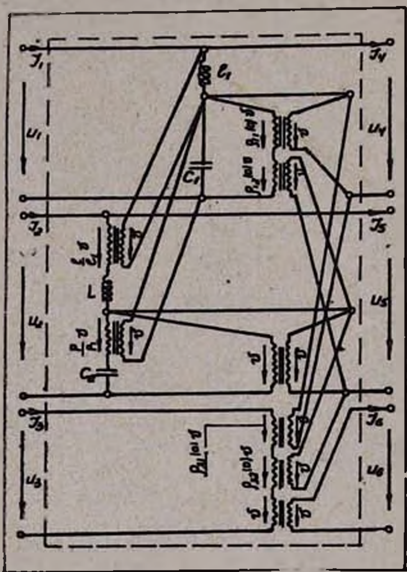

Рис. 5.

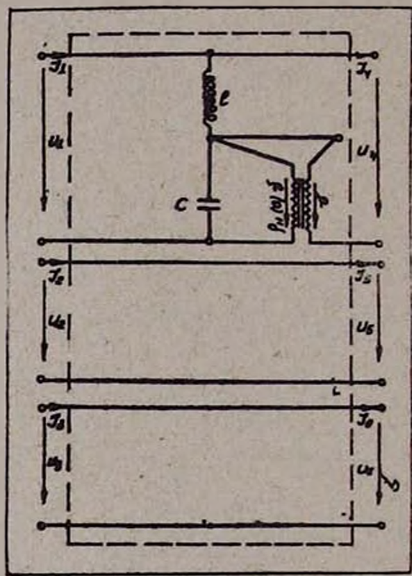

Рис. 6.

$$l = \frac{\alpha + \theta}{4\sigma_0 x_2^2},\quad C = \frac{4x_2^2}{(\alpha - \theta)\sigma_0} > 0.$$

Реализация матрицы $r(\lambda)$ типа III.

Возможны четыре случая.

1) $f_1 = 0$, $f_2 \neq 0$. Можно считать, что $f_2 = (z_2, 0, 0)$, $z_2 \neq 0$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 6. Значения физических параметров

$$l = \frac{\theta}{2|z_2|^2} > 0,\ C = \frac{2|z_2|^2}{\theta \cdot \tau_0^2} > 0,\ \rho_{11}(0) = 1.$$

2) $f_1 \neq 0$, $f_2 = 0$. Можно считать, что

$$f_1 = (z_1, 0, 0)\ z_1 \neq 0.$$

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 7. Значения физических параметров

$$C=\frac{\theta}{2|z_1|^2}>0,\quad l=\frac{2|z_1|^2}{\theta\cdot\tau_0^2}>0.$$

3) $f_1\neq 0$, $f_2\neq 0$; хотя бы одно из скалярных произведений

$$\operatorname{Re} f_2\cdot\operatorname{Re}\overset{*}{f_1},\ \operatorname{Im} f_2\cdot\operatorname{Im}\overset{*}{f_1},\ \operatorname{Im} f_2\cdot\operatorname{Re}\overset{*}{f_1},\ \operatorname{Re} f_2\cdot\operatorname{Im}\overset{*}{f_1}$$

отлично от нуля.

Можно считать, что $f_1=(z_1,\ 0,\ 0)$, $f_2=(z_2,\ 0,\ 0)$, $z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 6.

Значения физических параметров

$$l=\frac{\theta+\delta}{2|z_2|^2}>0,\quad C=\frac{2|z_2|^2}{(\theta-\delta)\tau_0^2}>0.$$

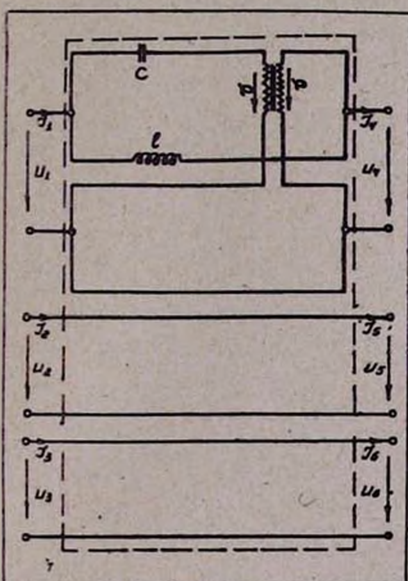

Рис. 7.

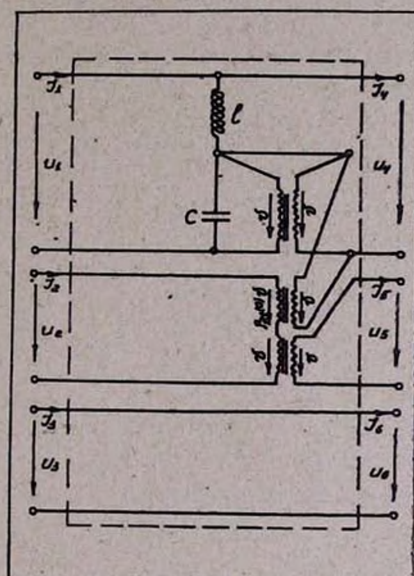

Рис. 8.

4) $f_1\neq 0$, $f_2\neq 0$; все скалярные произведения (см. случай 3)) равны нулю. Можно считать, что $f_1=(0,\ z_1,\ 0)$, $f_2=(z_2,\ 0,\ 0)$, $z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 8. Значения физических параметров

$$l=\frac{\theta}{2|z_2|^2}>0,\ C=\frac{2|z_2|^2}{\theta\cdot\tau_0^2}>0.$$

Реализация матрицы $r(\lambda)$ типа IV.

Возможны два случая.

1) $f_1=0$, $f_2\neq 0$; можно считать, что $f_2=(x_2,\ 0,\ 0)$, $x_2\neq 0$, $\bar{x}_2=x_2$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 9. При этом $l=\frac{\theta}{x_2^2}>0$.

2) $f_1 \neq 0$, $f_2 = 0$; можно считать, что $f_1 = (x_1, 0, 0)$, $x_1 \neq 0$, $\bar{x}_1 = x_1$. Матрица реализуется в виде цепи на рис. 10. При этом

$$C = \frac{\theta}{x_1^2} > 0.$$

Реализация матрицы $r(\lambda)$ типа V.

Возможны два случая.

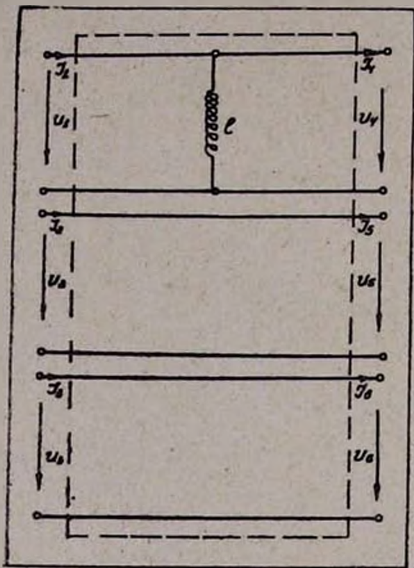

Рис. 9.

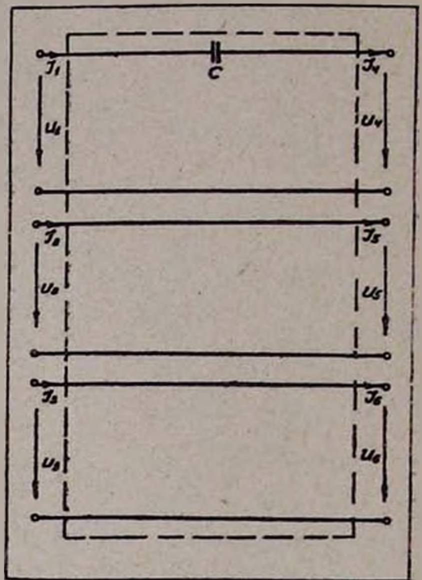

Рис. 10.

1) $f_1 = 0$, $f_2 \neq 0$; можно считать, что $f_2 = (x_2, 0, 0)$, $x_2 \neq 0$, $\bar{x}_2 = x_2$. Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 9 с заменой катушки l на конденсатор C, причем

$$C = \theta \cdot x_2^2 > 0.$$

2) $f_1 \neq 0$, $f_2 = 0$; можно считать, что $f_1 = (x_1, 0, 0)$, $x_1 \neq 0$, $\bar{x}_1 = x_1$. Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 10 с заменой конденсатора C на катушку l, причем

$$l = \theta \cdot x_1^2 > 0.$$

Во всех случаях соответствие проходных матриц цепям проверено расчетом.

Достаточность условий (I)—(IV) для реализуемости $w(\lambda)$ доказана полностью.

Отметим, что, попутно, исчерпывающим образом описана цепная структура пассивной реактивной цепи.

Одесский педагогический институт

Поступило 19.IV.1969

Ա. Վ. ԵՖԻՄՈՎ. Ռեակտիվ J-երկարացնող մատրից-ֆունկցիաների իրացումը (ամփոփում)

Ամեն մի ռեակտիվ (այսինքն՝ (I)—(IV) հատկություններով օժտված) w(λ) մատրից-ֆունկցիա կարող է իրացվել գծային պասիվ CL-բազմաբևեռի տեսքով, որի համար այն հանդիսանում է անցումային մատրից։ Բերված են էլեկտրական շղթայի պարզագույն բջիջների բոլոր հնարավոր սխեմաները։ Դրանով իսկ սպառիչ կերպով նկարագրված է ռեակտիվ շղթայի շղթայական ստրուկտուրան։

A. V. EFIMOV. *Realisation of reactive J-stretching matrix-functions*
(summary)

Every matrix function $w(\lambda)$ with properties (I)—(IV) may be realised as a transitions matrix for a linear passive *CL*. The circuits of all simplest electric cells are attained, so that comprehensive description of structure of reactive chains may be given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Ефимов.* Об одном применении теоремы Ланжевена в теории цепей, ДАН АрмССР, 1969, XLIX, № 3, 118—123.
2. *W. Cauer.* Theorie der linearen wechselstramschaltungen, Berlin, 1954.
3. *В. П. Потапов.* Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций, ДАН АрмССР, 1969, XLVIII, № 5, 257—263.