ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 1, 1970 Математика

Л. Ш. АГАБАБЯН

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений с данными на гиперплоскости вырождения до сих пор рассматривалась либо при условии, что начальная гиперплоскость не касается характеристического коноида ни в одной точке ([1], [2]), либо рассматривался лишь одномерный случай (см. [3] и указанную там литературу).

В предлагаемой заметке рассматривается задача Коши для многомерного гиперболического уравнения, когда гиперплоскость вырождения по одним направлениям касается характеристического коноида, по другим—пересекает его под ненулевым углом.

Именно, в области $G_T\{0<t\leqslant T,\ x\in R_n\}$, $R_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$ изучается следующая задача Коши:

$$L[u]\equiv-u_{tt}+t^{-\alpha_i}u_{x_ix_i}+a_i\,u_{x_i}+bu_t+cu=f, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0;\ x=(x_1,\cdots,x_n), \tag{2}$$

где

$$-\infty<\alpha_i<1\ \ (i=1,2,3,\cdots,n). \tag{3}$$

(Здесь и далее, если не оговорено противное, предполагается суммирование по повторяющимся индексам).

Доказывается следующая

Теорема. *Пусть в области* $\overline{G}_\tau$ *выполнено неравенство*

$$a_i^2\leqslant(1-\alpha_i)\,t^{-\alpha_i-1}\ \ (i=1,2,3,\cdots,n), \tag{4}$$

и пусть, кроме того

$$\int\limits_0^\tau\max_x\{b^2(x,t)\}\,dt<+\infty\ \ (x\in R_n), \tag{5}$$

$$\int\limits_0^\tau\max_x\{c(x,t)\}\,t\,dt<+\infty\ \ (x\in R_n). \tag{6}$$

Тогда, если $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ *и* $f(x,t)$ *имеют в* G_τ *производные по* x *и* t *достаточно высокого порядка, то задача* (1), (2) *является корректной задачей конечного порядка (в смысле работы* [4]).

(*Требуемый порядок гладкости зависит от коэффициентов уравнения* (1) *и легко может быть вычислен*).

1. Рассмотрим уравнение

$$L_\varepsilon[u] \equiv -u_{tt} + (t+\varepsilon)^{-\alpha_i} u_{x_i x_i} + a_i u_{x_i} + b u_t + cu = f \quad (\varepsilon > 0). \tag{7}$$

Нашей целью является получение энергетических оценок для решения однородной задачи Коши уравнения (7) с константами, не зависящими от ε. Согласно схеме работ [1], [2] это позволит доказать теорему.

Введем новую неизвестную функцию по формуле $v = u - u_p$, где

$$u_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{\partial^{k+2} u}{\partial t^{k+2}} \bigg|_{t=0} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \quad (p > 0)$$

— известная функция. Для v получим уравнение

$$L_\varepsilon[v] = f - L_\varepsilon[u_p] \equiv F(x, t). \tag{8}$$

Умножим уравнение (8) на $(t+\varepsilon) w$, где $w = \int\limits_t^\tau v(x, s)\, ds$ и проинтегрируем по области G_τ.

Введем обозначения

$$[\varphi, \psi] \equiv \int\limits_{G_\tau} \varphi \cdot \psi \, dG; \quad (\varphi, \psi)_{t=\tau} = \int\limits_{R_n} \varphi(x, \tau)\, \psi(x, \tau)\, dx.$$

Интегралы преобразуем интегрированием по частям, используя условия (2):

$$[v_{tt}, (t+\varepsilon) w] = \frac{1}{2} (v, (t+\varepsilon) v)_{t=\tau} - \frac{3}{2} [v, v], \tag{9}$$

$$[(t+\varepsilon)^{-\alpha_i} u_{x_i x_i}, (t+\varepsilon) w] = -\frac{1}{2} [(t+\varepsilon)^{-\alpha_i} (1-\alpha_i) w_{x_i}, w_{x_i}] -$$

$$- \frac{1}{2} ((t+\varepsilon)^{-\alpha_i} w_{x_i}, w_{x_i})_{t=0}, \tag{10}$$

$$[a_i v_{x_i}, (t+\varepsilon) w] = -[a_{i x_i} v, (t+\varepsilon) w] - [a_i w_{x_i}, (t+\varepsilon) v], \tag{11}$$

$$[b v_t, (t+\varepsilon) w] = [v, (t+\varepsilon) b v] - [v, (b(t+\varepsilon))_t w]. \tag{12}$$

Кроме того, имеем оценку

$$|[F, (t+\varepsilon) w]| \leqslant \left[\frac{\partial^{p+1} F}{\partial t^{p+1}}, \frac{\partial^{p+1} F}{\partial t^{p+1}} \right]^{1/2} \{\tau^{2p+4} [v, (t+\varepsilon)^2 v]\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \tau^{2p+5} + C_2 [v, (t+\varepsilon) v] \quad (C_1, C_2 = \mathrm{const} > 0). \tag{13}$$

Используя неравенства

$$|[g(x, t)\, w, w]| \leqslant \mathrm{const} \cdot \tau^2 [v, v]$$

(где $g(x, t)$ — любая интегрируемая в G_τ функция) и

$$2[\varphi, \psi] \leqslant [\beta\varphi, \varphi] + \left[\frac{1}{\beta} \psi, \psi \right] \quad (\beta > 0),$$

а также условия (4), (5) и (6) для оценки интегралов (9), (10), (11) и (12), получим интегральное неравенство

$$(v,\ (t+\varepsilon)\ v)_{t=\tau} \leqslant C_3\ [v,\ v] + C_4\ \tau^{2p+5}, \tag{14}$$

(C_3, $C_4 = \mathrm{const} > 0$ и не зависят от ε).

Обращая это интегральное неравенство (см., напр., [5], стр. 376), окончательно получим

$$(v,\ v)_{t=\tau} \leqslant C_5$$

($C_5 = \mathrm{const} > 0$ и не зависит от ε).

Энергетические оценки производных решения без труда могут быть получены аналогично.

2. В частном случае, когда $\alpha_l \leqslant 0$, результат п. 1 значительно слабее результатов работ [1], [2], однако здесь, по-видимому, впервые рассматривается случай совместного вырождения разного характера.

Отметим, что в случае $\alpha_l \geqslant 1$ не ясно какого типа задачу надо ставить для уравнения (1), так как в случае чистого касания характеристического коноида вводится вес, [6], а в случае пересечения под ненулевым углом накладываются ограничения лишь на коэффициенты уравнения.

Ереванский армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступило 16.VI.1969

Լ. Շ. ԱՂԱԲԱԲՅԱՆ. Մի երկրորդ կարգի վերածվող հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդրի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է համասեռ Կոշու խնդրի կոռեկտությունը

$$L[u] \equiv -u_{tt} + t^{-\alpha_l} u_{x_l x_l} + a_l u_{x_l} + b u_t + C u = f$$

հավասարման համար։

L. S. AGABABIAN. *The Caushy problem for one second order vanishing hyperbolic equation* (summary)

The character of correctness of Caushy problem for

$$L[u] \equiv -u_{tt} + t^{-\alpha_l} u_{x_l x_l} + a_l u_{x_l} + b u_t + c u = f$$

hyperbolic equation is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *О. А. Олейник.* Задача Коши и краевая задача для гиперболических уравнений второго порядка, вырождающихся в области и на ее границе, ДАН СССР, 1966, 169, № 3, 525—528.
2. *О. А. Олейник.* О гиперболических уравнениях второго порядка, вырождающихся внутри области и на ее границе, УМН, 1, 1969, 229—230.
3. *М. М. Смирнов.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, „Наука“, М., 1966.

4. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для одномерного гиперболического уравнения произвольного порядка с данными на линии вырождения, Дифференциальные уравнения, IV, № 9, 1968, 1658—1662.
5. *А. Ш. Агабабян, А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка, Известия АН АрмССР, „Математика“, 3, №№ 4—5, 1968, 369—385.
6. *С. А. Терсенов.* К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения, Сибирск. матем. журн., 1961, 2, № 6, 1120—1143.