ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 1, 1970 Математика

Э. М. ПОГОСЯН

О КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ТЕСТОВ

Введение

В работах [1]—[4] дан ряд алгоритмов построения тестов.

Поиск тестов в [1], [2], [3] связан с большим перебором, что ограничивает область применения этих алгоритмов.

В [4] с использованием результатов [3] предложены определенные способы упрощения процесса построения тестов.

В настоящей статье проводится исследование вопросов существования и построения тестов на основе некоторых их количественных характеристик.

Статья состоит из четырех параграфов.

В § 1 приведены основные определения и на основе этих определений изложен алгоритм работ [1], [2].

Объектом исследования в § 2 являются характеристические последовательности (х.п.), которые определенным образом связаны с процессом поиска тестов.

Рассматривается вопрос существования пар множеств булевых векторов с заданной х. п. Для заданной х. п. исследуется вопрос существования и построения тестов определенных длин, а также приводится формула для числа этих тестов.

Доказывается, что по х. п. невозможно в общем случае распознать наличие или отсутствие тестов определенных длин.

Устанавливается также определенная взаимосвязь между алгоритмами работ [1], [2] и [3].

В § 3 рассматриваются характеристические функции (х. ф.). На основе х. ф., с использованием принципа „включения — исключения" [5], получена формула для вычисления числа недопустимых наборов. На основе этой формулы предложен определенный алгоритм построения тестов.

В § 4 исследованы два класса множеств, для которых выражение числа недопустимых наборов имеет простое аналитическое представление, а также приведен пример определения длины минимального теста на основе изложенных методов.

Формулировки некоторых результатов настоящей статьи приведены в [6].

Автор пользуется приятной возможностью выразить благодарность своему руководителю И. Д. Заславскому за постоянное внимание к работе и за ряд существенных замечаний при работе над статьей.

§ 1. *Основные определения*

Мощность множества M будем обозначать через $\mu(M)$. Будем рассматривать пары непустых множеств (M_0, M_1) n-мерных булевых векторов таких, что $M_0 \cap M_1 = \varnothing$, $m' + m'' \leqslant 2^n$, где $m' = \mu(M_0)$, $m'' = \mu(M_1)$.

Обозначим через X систему булевых переменных $\{x_1, \cdots, x_n\}$, задающих n-мерное булево пространство.

Произвольную непустую систему переменных из X, расположенных в том же порядке, что и в X, будем называть *набором*. Набор S_2 назовем *поднабором* набора S_1, если всякая переменная из S_2 входит в S_1. Набор S_2 назовем *собственным поднабором* набора S_1, если S_2 есть поднабор S_1, отличный от S_1. Число элементов $\mu(S_1)$ в наборе S_1 будем также называть *длиной набора* S_1.

Каждый набор $S_1 = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ задает некоторое k-мерное подпространство пространства X.

Набор $S_1 = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ назовем *тестом* для множеств (M_0, M_1), если проекции множеств (M_0, M_1) на k-мерное пространство S_1 не пересекаются. В противном случае набор S_1 назовем *недопустимым набором* (н. н.).

Набор $S_1 = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ назовем *тупиковым тестом* (т. т.) для множеств (M_0, M_1), если S_1 является тестом для (M_0, M_1) и ни один собственный поднабор набора S_1 не есть тест для множеств (M_0, M_1).

Набор $S_1 = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ назовем *минимальным тестом* (м. т.) для множеств (M_0, M_1), если S_1 является тестом наименьшей длины из множества всех тестов для (M_0, M_1). Каждому набору $S_1 = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ сопоставим n-мерный булев вектор $a = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in \{i_1, \cdots, i_k\}, \\ 0, \text{ в противном случае; } i_1 = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

Введенное соответствие является взаимно однозначным соответствием между множеством наборов и множеством булевых векторов, отличных от вектора $(0, \cdots, 0)$. Наборы S_1 и S_2 назовем *сравнимыми*, если сравнимы соответствующие булевы векторы a_1 и a_2. В противном случае наборы S_1 и S_2 назовем *несравнимыми**.

Для произвольных n-мерных булевых векторов $a_1, \cdots, a_r$ введем *r-местный оператор совпадения* φ_r. Результат применения φ_r к векторам $a_1, \cdots, a_r$, обозначаемый через $\varphi_r(a_1, \cdots, a_r)$, есть по определению подмножество всех тех переменных из множества X, для каждой из которых соответствующие значения компонент всех векторов $a_1, \cdots, a_r$ совпадают.

Кратко опишем в введенных терминах основной алгоритм построения м. т. для множеств (M_0, M_1), приведенный в работах [1], [2].

---

* Булевы векторы $a = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ сравнимы друг с другом, если либо $\alpha_i \geqslant \beta_i$, при $i = 1, \cdots, n$, либо $\beta_i \geqslant \alpha_i$, при $i = 1, \cdots, n$.

а. К каждой паре векторов a_i, b_j, $a_i \in M_0$, $b_j \in M_1$, $i=1,\cdots, m'$, $j=1,\cdots, m''$ применяем оператор совпадения φ_2. Множество полученных таким образом н. н. обозначим через B:

$$B=\{\varphi_2(a_i, b_j)\},\ i=1,\cdots, m',\ j=1,\cdots, m''.$$

б. Устраним из множества B все повторения наборов, а также устраним все те наборы, каждый из которых является собственным поднабором хотя бы одного набора из B.

Множество оставшихся в B наборов, которые назовем *максимально недопустимыми наборами* (м.н.н.), обозначим через S. Очевидно наборы множества S попарно несравнимы.

в. Из м.н.н. множества S получим всевозможные различные поднаборы. Множество полученных н.н. обозначим через $\tilde{B}$.

г. Пусть $\tilde{R}$ — множество всевозможных наборов из системы

$$X=\{x_1,\cdots, x_n\}.$$

Очевидно каждый набор из множества $R'=\tilde{R}/\tilde{B}$ будет тестом для множеств (M_0, M_1).

д. Подмножество R тех наборов из R', для каждого из которых ни один собственный поднабор не принадлежит R', образует множество всех т.т. для множеств (M_0, M_1).

е. М.т. для множеств (M_0, M_1) будут наборы из R наименьшей длины.

Построение тестов на основе приведенного алгоритма делает необходимым, вообще говоря, сравнение каждого набора из множества всевозможных наборов $\tilde{R}$ с н.н. множества $\tilde{B}$, т. е. поиск тестов производится посредством полного перебора. Это обстоятельство существенно ограничивает область применения алгоритма.

Мы будем исследовать вопросы, связанные с возможностями менее громоздких алгоритмов построения тестов. В этой связи будут исследоваться свойства определенных количественных характеристик тестов.

§ 2. *Характеристические последовательности*

Дадим некоторые определения. Пусть $S=\{S_1,\cdots, S_m\}$ — некоторое множество попарно несравнимых наборов, составленных из булевых переменных $X=\{x_1,\cdots, x_n\}$ и пусть $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} S_j\right)=p$.

Разобьем множество S на непустые подмножества $\Omega_1,\cdots, \Omega_k$, где $k>1$, каждое Ω_l состоит из наборов некоторой фиксированной длины l_l, и длины наборов, входящих в различные подмножества $\Omega_1,\cdots, \Omega_k$, различны. Не нарушая общности, можно считать, что $l_1>l_2>\cdots>l_k$; числа $\mu(\Omega_1),\cdots, \mu(\Omega_k)$ будем обозначать через $m_1,\cdots, m_k$. Последовательность чисел $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots, m_k)$, полученных указанным образом, будем называть *характеристическай последовательностью* (х.п.) *множества* S.

Каждой паре множеств (M_0, M_1) n-мерных булевых векторов однозначно соответствует множество м.н.н. $S=\{S_1,\cdots, S_m\}$. Наборы множества S попарно несравнимы. Поэтому $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots \cdots, m_k)$—х.п. множества попарно несравнимых наборов S мы будем называть также х.п. множества м.н.н. S.

Х.п. χ назовем х.п. пары множеств (M_0, M_1), если χ является х.п. множества м.н.н. S.

Числовую последовательность $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots, m_k)$, где $k\geqslant 1$, будем называть *характеристической последовательностью* (х.п.), если

1. $n\geqslant p\geqslant l_1>l_2>\cdots>l_k>0$,
2. $m_i\neq 0$ при $i=1,\cdots, k$.

Очевидно, что каждой паре множеств (M_0, M_1) однозначно соответствует своя х.п.

Следующая теорема показывает, что при определенных условиях справедливо также и обратное утверждение.

Теорема 1. *Для произвольной х.п.* $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots \cdots, m_k)$, *удовлетворяющей условиям*

$$\sum_{j=1}^{k} m_j l_j\geqslant p\geqslant (l_1-1)+\sum_{j=1}^{k} m_j,\ p>l_1,$$

существуют пары множеств (M_0, M_1) *с х.п.* χ. *При этом количество таких пар не менее* $2^n \prod\limits_{i=1}^{k} C^{m_i}_{\sum_{j=i}^{k} m_j}$.

Утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 1 и 2.

Лемма 1. *Пусть* n, p — *натуральные числа,* $n\geqslant p>0$, *и пусть наборы* $S_1,\cdots, S_m$ *получены из системы булевых переменных* $X=\{x_1,\cdots, x_m\}$ *так, что* $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i\right)=p>l_1$, *где* $l_1=\max\limits_{i\in\{1,\cdots, m\}}\mu(S_i)$.

Тогда для того, чтобы наборы $S_1,\cdots, S_m$ *были м.н.н. для некоторой пары множеств* (M_0, M_1) *n-мерных булевых векторов, необходимо и достаточно, чтобы они были попарно несравнимы.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $S_1,\cdots, S_m$ — попарно несравнимые наборы, содержащие в совокупности p различных переменных. Построим множества (M_0, M_1) с м.н.н. $S_1,\cdots, S_m$. В множество M_0 включим один элемент $a=(\alpha_1,\cdots, \alpha_n)$—произвольный n-мерный булев вектор.

Векторы $b_i=(\beta_{i,1},\cdots, \beta_{i,n})$, $b_i\in M_1$, $i=1,\cdots, m$ получаем следующим построением: $\beta_{i,j}=\bar{\alpha}_j$, если в наборе S_i присутствует переменная x_j и $\beta_{i,j}=\alpha_j$, если в S_i переменной x_j нет, $j=1,\cdots, n$.

Очевидно $M_0 \cap M_1 = \varnothing$ и $\varphi_2(a, b_i) = S_i$, $i = 1, \cdots, m$.

Следствие. *Можно построить не менее 2^n различных пар множеств (M_0, M_1) с множеством м.н.н. $\{S_1, \cdots, S_m\}$.*

Лемма 2. *Для произвольной х.п. $\chi = (n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{j=1}^{k} m_j l_j \geqslant p > (l_1 - 1) + \sum_{j=1}^{k} m_j,$$

из системы булевых переменных $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ можно построить не менее $\prod_{l=1}^{k} C^{m_l}_{\sum_{j=l}^{k} m_j}$ множеств попарно несравнимых наборов с х.п. χ.

Доказательство. Пусть Ω_1—произвольный набор длины (l_1-1) из множества X, Ω_2—произвольный собственный поднабор длины (l_2-1) набора Ω_1, и т. д., Ω_k—произвольный собственный поднабор длины (l_k-1) набора Ω_{k-1}.

Тогда положим

$$S_{11} = \Omega_1 \cup \{x_{j1}\},\ x_{j1} \in X/\Omega_1 = X_1,$$

$$S_{12} = \Omega_1 \cup \{x_{j2}\},\ x_{j2} \in X_1/\{x_{j1}\} = X_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{1m_1} = \Omega_1 \cup \{x_{j,m_1}\},\ x_{j,m_1} \in X_{m_1-1}/\{x_{j,m_1-1}\} = X_{m_1},$$

$$S_{21} = \Omega_2 \cup \{x_{r1}\},\ x_{r1} \in X_{m_1}/\{x_{j,m_1}\} = X_{m_1+1},$$

$$S_{2m_2} = \Omega_2 \cup \{x_{r,m_2}\},\ x_{r,m_2} \in X_{m_1+m_2-1}/\{x_{r,m_2-1}\} = X_{m_1+m_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{k1} = \Omega_k \cup \{x_{t1}\},\ x_{t1} \in X_{m-m_k-1}/\{x_{v,m-m_k}\} = X_{m-m_k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{k,m_k} = \Omega_k \cup \{x_{t,m_k}\},\ x_{t,m_k} \in X_{m-1}/\{x_{t,m_k-1}\}\ X_m.$$

Построенные наборы $S_{11}, \cdots, S_{1m_1}, \cdots, S_{k1}, \cdots, S_{k\cdot m_k}$ попарно несравнимы и имеют х.п. $\chi = (n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$, где $p = (l_1 - 1) + \sum_{j=1}^{k} m_j$. Если $\sum_{j=1}^{k} m_j l_j \geqslant p > (l_1 - 1) + \sum_{j=1}^{k} m_j$, то множество несравнимых наборов с х.п. χ строится в два этапа.

На первом этапе получаем наборы $S_{11}, \cdots, S_{1m_1}, \cdots, S_{k1}, \cdots, S_{k,mk}$ описанным выше способом. При этом $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{t=1}^{m_j} S_{j,t}\right) = (l_1 - 1) + \sum_{j=1}^{k} m_j$ и имеются $r = p - \left(l_1 - 1 + \sum_{j=1}^{k} m_j\right)$ переменных из множества X, не включенных ни в один из полученных наборов, так как $n > p$.

Пусть этими переменными являются $\tilde{x}_1, \cdots, \bar{x}_r$. На втором этапе из множества $\bar{X} = \{\tilde{x}_1, \cdots, \bar{x}_r)$ выделяем подмножество $Q_1 = \{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{l_1-1}\}$ и образуем набор $S'_{12} = (S_{12}/\Omega_1) \cup Q_1$. Затем из множества $\bar{X}/Q_1$ выделяем подмножество $Q_2=\{\bar{x}_{l_1}, \cdots, \bar{x}_{2(l_1-1)}\}$ и образуем набор $S'_{13}= =(S_{13}/\Omega_1)\cup Q_2$, и т. д.

При построении наборов $S'_{12}, S'_{13}, \cdots, S'_{1m_1}, \cdots, S'_{k1}, \cdots, S'_{k,m_k}$ необходимо различать следующие два случая.

1 случай: $r=\sum\limits_{j=1}^{k}(l_j-1)\,m_j-(l_1-1)$. В этом случае из наборов $S_{12}, S_{13}, \cdots, S_{1m_1}, \cdots, S_{k1}, \cdots, S_{k,m_k}$ указанным способом получаются наборы $S'_{12}, S'_{13}, \cdots, S'_{1m_1}, \cdots, S'_{k1}, \cdots, S'_{k,m_k}$, которые вместе с набором S_{11} образуют множество попарно несравнимых наборов с х.п. χ.

2 случай: $r<\sum\limits_{j=1}^{k}(l_j-1)\,m_j-(l_1-1)$. В этом случае существуют такие два последовательных набора

$S_\alpha, S_\beta\in\{S_{12}, S_{13}, \cdots, S_{1m_1}, \cdots, S_\alpha, S_\beta, S_\delta, \cdots, S_{k1}, \cdots, S_{k,m_k}\}$,

что $S'_\alpha=(S_\alpha/\Omega_\alpha)\cup Q_\gamma$, где $\mu(Q_\gamma)=\mu(S_\alpha)-1$,

но $\mu(Q_{\gamma+1})=\mu\left(\widetilde{X}/\bigcup\limits_{t=1}^{\gamma}Q_t\right)<\mu(S_\beta)-1$.

Пусть $S_\beta=\Omega_\beta\cup\{x_\beta\}$ и Ω'_β — подмножество Ω_β, полученное после удаления из Ω_β произвольных $\mu(Q_{\gamma+1})$ переменных.

Тогда полагаем $S'_\beta=\Omega'_\beta\cup\{x_\beta\}\cup Q_{j+1}$. Очевидно, наборы $S_{11}, S'_{12}, S'_{13}, \cdots, S'_{1m_1}, \cdots, S'_\alpha, S'_\beta, S_\delta, \cdots, S_{k1}, \cdots, S_{k,mk}$ попарно несравнимы и имеют х.п. χ.

При каждом из приведенных выше построений множества попарно несравнимых наборов с х.п. χ, первые m_1 наборов $S_{11}, \cdots, S_{1m_1}$ можно выбрать не менее $C^{m_1}_{\sum\limits_{j=1}^{k}m_j}$ способами, при выбранных наборах $S_{11}, \cdots, S_{1m_1}$ последующие m_2 наборов $S_{21}, \cdots, S_{2m_2}$ можно выбрать не менее $C^{m_2}_{\sum\limits_{j=2}^{k}m_j}$ способами, и т. д., последние m_k наборов $S_{k1}, \cdots, S_{k,m_k}$ наборов, при выбранных наборах $S_{11}, \cdots, S_{1m_1}, \cdots, S_{k-1,1}, \cdots, S_{k-1,m_{k-1}}$, можно выбрать не менее $C^{m_k}_{m_k}=1$ способом.

Всего получаем не менее $\prod\limits_{l=1}^{k}C^{m_l}_{\sum\limits_{j=l}^{k}m_j}$ различных способов выбора множества наборов $\{S_{11}, \cdots, S_{1m_1}, \cdots, S_{k1}, \cdots, S_{k,m_k}\}$. Лемма доказана.

Замечание. В условиях леммы 2 верхняя оценка для p, $p\leqslant \leqslant\sum\limits_{j=1}^{k}m_j l_j$ является окончательной, чего нельзя утверждать для нижней оценки p.

В § 4 будет приведен пример такого класса х.п. $\chi=(n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$, что $p=l_1+1$, $1<\sum_{j=1}^{k} m_j \leqslant l_k+1$, и для каждой х.п. χ из этого класса можно построить множество попарно несравнимых наборов с х.п. χ.

Х.п. $\chi=(n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$ для множеств (M_0, M_1) позволяет предсказать существование тестов определенных длин.

Легко видеть, например, что если в х.п. χ для некоторой пары (M_0, M_1) будет $n \succ p$, то для этой пары длина м.т. есть 1. В нижеследующей теореме рассматриваются факты аналогичного рода.

Пусть $S=\{S_1, \cdots, S_m\}$—множество м.н.н. для (M_0, M_1) с х.п. χ, $R_j=\{S_{j1}, \cdots, S_{j, m_j}\}$, $R_j \subseteq S$, $\mu(S_{j,r})=l_j$, $r=1, \cdots, m_j$, $j=1, \cdots, k$. Введем функции $N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_t})$, $t=1, \cdots, v_j$, $v_j=\min(l_j+1, m_j)$, которые определены для $p_1, \cdots, p_t \in \{1, \cdots, m_j\}$, так, что $N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_t})=1$, если существует набор длины (l_j+1), из которого можно получить поднаборы $S_{p_1}, \cdots, S_{p_t} \in R_j$, и $N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_t})=0$, в противном случае.

Теорема 2. *Для пар множеств (M_0, M_1) с х.п. $\chi=(n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$ при каждом $j \in \{1, \cdots, k\}$ существуют тесты длины l_j+1.*

При этом количество $N(R_j)$ таких тестов не превосходит $m_j(n-l_j)$ и равняется

$$\bar{N}(R_j)=\sum_{p_1 \in \{1, \cdots, m_j\}} N(a_{p_1})-\sum_{\substack{p_1, p_2 \in \{1, \cdots, m_j\}, \\ p_1 \neq p_2}} N(a_{p_1}, a_{p_2})+\cdots+(-1)^{v_j} \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_{v_j} \in \{1, \cdots, m_j\} \\ p_1 \neq \cdots \neq p_{v_j}}} N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_{v_j}}).$$

Доказательство. Рассмотрим множество $Q_j=S/R_j$, $j \in \{1, \cdots, k\}$. Через $\tilde{Q}_j$ обозначим множество всех различных н.н. длины (l_j+1), являющихся подборами наборов множества Q_j. Для любых наборов S_α, $S_{j,r}$, $S_\alpha \in \tilde{Q}_j$, $S_{j,r} \in R_j$, набор $S_{j,r}$ не может быть поднабором набора S_α, так как в противном случае м.н.н. $S_{j,r}$ был бы поднабором некоторого м.н.н. S_γ, из которого получен набор S_α, а это противоречит определению м.н.н.

Следовательно, каждый набор $S_{j,r}$, $S_{jr} \in R_j$ является подбором некоторого набора S_δ длины (l_j+1), который не принадлежит $\tilde{Q}_j$, т. е. S_δ является тестом для множеств (M_0, M_1). В частности, множеству $\tilde{Q}_j$ не могут принадлежать наборы $S_\delta=S_{j,r} \cup \{x_t\}$, где $S_{j,r} \in R_j$, $x_t \in \{x_1, \cdots, x_n\}/S_{j,r}$.

Найдем число $\bar{N}(R_j)$ всех таких различных наборов S_δ. Воспользуемся принципом „включения—исключения", который формулируется следующим образом [5]:

Если из N объектов $N(a_1)$ обладают свойством a_1, $N(a_2)$ — свойством $a_2, \cdots$, $N(a_r)$— свойством a_r, $N(a_1, a_2)$ — обладают как *свойством a_1, так и свойством $a_2, \cdots$, $N(a_{r-1}, a_r)$—свойствами a_{r-1} и a_r, $\cdots$, $N(a_1, \cdots, a_r)$ обладают свойствами $a_1, \cdots, a_r$, то число объектов $N(a_1', a_2', \cdots, a_r')$, не обладающих ни одним из этих свойств $a_1, \cdots, a_r$, находится по формуле*

$$N(a_1', \cdots, a_r') = N - \sum_{p_1 \in \{1, \cdots, r\}} N(a_{p_1}) + \sum_{\substack{p_1, p_2 \in \{1, \cdots, r\} \\ p_1 \neq p_2}} N(a_{p_1}, a_{p_2}) - \cdots + (-1)^r N(a_1, \cdots, a_r). \tag{1}$$

В интересующем нас случае $N = \overline{N}(R_j)$, т. е. объектами нашего рассмотрения являются все различные наборы S_δ длины $(l_j + 1)$, которые получаются из наборов $S_{j,r} \in R_j$, добавлением к $S_{j,r}$ переменных $x_t \in X/S_{j,r}$.

Обозначение a_r, $r = 1, \cdots, m_j$ понимается нами как свойство быть полученным из набора $S_{j,r}$ добавлением какой-либо переменной $x_t \in X/S_{j,r}$, а a_r'—означает отсутствие этого свойства. Тогда $N(a_1', \cdots \cdots, a_r') = 0$, так как каждый рассматриваемый нами набор S_δ длины $(l_j + 1)$ обладает хотя бы одним из свойств $a_1, \cdots, a_{m_j}$. Также каждая из величин $N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_t})$, $p_1, \cdots, p_t \in \{1, \cdots, m_j\}$ равна нулю при $t > l_j + 1$, так как из одного набора длины $(l_j + 1)$ можно получить не более $(l_j + 1)$ наборов длины l_j. Учитывая эти обстоятельства, из (1) для каждого $j \in \{1, \cdots, k\}$ получаем

$$\overline{N}(R_j) = \sum_{p_1 \in \{1, \cdots, m_j\}} N(a_{p_1}) - \sum_{\substack{p_1, p_2 \in \{1, \cdots, m_j\} \\ p_1 \neq p_2}} N(a_{p_1}, a_{p_2}) + \cdots + (-1)^{v_j} \sum_{\substack{p_1, p_2, \cdots, p_{v_j} \in \{1, \cdots, m_j\} \\ p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_{v_j}}} N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_{v_j}}),$$

где $v_j = \min(l_j + 1, m_j)$.

При этом $\overline{N}(R_j) \leqslant m_j (n - l_j)$, так как каждый набор длины l_j может быть собственным поднабором ровно $(n - l_j)$ различных наборов длины $(l_j + 1)$. Теорема доказана.

Заметим, что результат, полученный в теореме 2 работы [4], содержится в утверждении теоремы 2 для частного случая $j = k$, $m_k = 1$. Этот факт непосредственно следует из нижеследующей теоремы 3, которая устанавливает определенную взаимосвязь между алгоритмами поиска тестов работ [1], [2] и [3].

Пусть $B = \{B_{ij}\}$, $i = 1, \cdots, m'$, $j = 1, \cdots, m''$, — множество н.н. и S — множество м.н.н. для множеств (M_0, M_1), полученных согласно основному алгоритму (пункты „а“ и „б“), и пусть $P_{ij} = X/B_{ij}$, где $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Рассмотрим конъюнктивную нормальную форму (к.н.ф.) f такую, что $f = \mathop{\&}\limits_{j=1}^{m''} \mathop{\&}\limits_{i=1}^{m'} (x_{ij}^1 \vee \cdots \vee x_{ij}^{l_{ij}})$, где каждая элементарная дизъюнкция $(x_{ij}^1 \vee \cdots \vee x_{ij}^{l_{ij}})$ составлена из всех булевых переменных, входящих в P_{ij}, [3], [4].

Произведем в f все поглощения вида $Y\&(YVZ)=Y$, где Y, Z — конъюнктивные члены f. В результате получим к.н.ф. $f^*=\underset{p=1}{\overset{m}{\&}}(x_{p_1}V\cdots Vx_{p,r_p})$. Обозначим через A множества $A_1,\cdots,A_m$, каждое из которых составлено из переменных соответствующего члена $x_{p1}V\cdots Vx_{p,r_p}$:

$$A_p=\{x_{p1},\cdots,x_{p,r_p}\},\ p=1,\cdots,m.$$

Теорема 3. *Множества* $\{X/A_1, X/A_2,\cdots,X/A_m\}$ *и* S *совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим множество V пар наборов $V_{ij}=(B_{ij},P_{ij})$, $B_{ij}\cup P_{ij}=X$, $i=1,\cdots,m'$, $j=1,\cdots,m''$. Доказательство теоремы очевидным образом следует из свойств, которым удовлетворяют произвольные пары наборов V_α, $V_\beta\in V$:

1. $(B_\alpha\subset B_\beta)\longleftrightarrow(P_\alpha\supset P_\beta)$.

2. $(B_\alpha=B_\beta)\longleftrightarrow(P_\alpha=P_\beta)$.

Поскольку каждая пара множеств (M_0, M_1) с х.п. $\gamma=(n,p,l_1,\cdots,l_k,m_1,\cdots,m_k)$ имеет тест длины (l_k+1), который найти сравнительно легко, было бы полезно уметь простыми средствами отличать множества (M_0, M_1) с длиной м.т., равной (l_k+1), от пар множеств (M_0, M_1) с меньшей длиной м.т.

Из нижеследующей теоремы 4 следует, что информация о длинах тестов, заключенная в х.п. γ множеств (M_0, M_1), в общем случае не достаточна для такого распознавания. Это обстоятельство накладывает определенные ограничения на область использования х.п.

Рассмотрим всевозможные пары непустых непересекающихся множеств (M_0, M_1) n-мерных булевых векторов при $n=1, 2,\cdots$. Для каждой пары множеств (M_0, M_1) укажем множество м.н.н. S и х.п. γ. Объединим все множества м.н.н. S в множество W, а все х.п. γ — в множество U. Обозначим через W_1, W_2 подмножества W такие, что

1. Для каждого множества $S\in W_1$ длина м.т. для пары (M_0, M_1) с множеством м.н.н. S равна (l_k+1).

2. Для каждого множества $S\in W_2$ длина м.т. для пары (M_0, M_1) с множеством м.н.н. S меньше (l_k+1).

Очевидно, $W_1\cap W_2=\varnothing$, $W_1\cup W_2=W$, и по каждому множеству м.н.н. S можно однозначно определить, к какому из множеств W_1 или W_2 принадлежит S. Каждому множеству $S\in W$ соответствует х.п. $\gamma\in U$. Пусть U_1, U_2—подмножества множества U, образованные из х.п., соответствующих элементам множеств W_1, W_2. Очевидно, что $U_1\cup U_2=U$.

Теорема 4. *Множества* U_1, U_2 *удовлетворяют следующим соотношениям:*

а. $U_1\overline{\in}U_2$,

б. $U_2\overline{\in}U_1$,

в. $U_1\cap U_2\neq\varnothing$.

Доказательство. Доказательство теоремы основано на построении непустых множеств T_1, T_2, T_3, для которых выполняется

$$(T_1 \subset U_1)\ \&\ (T_1 \cap U_2) = \varnothing),$$
$$(T_2 \subset U_2)\ \&\ (T_2 \cap U_1 = \varnothing),$$
$$T_3 \subset (U_1 \cap U_2).$$

1. Множество T_1 образовано из х.п. $\chi = (n, p, l_1, m_1)$, где $n=p$, $p > l_1$, $m_1 = C_n^{l_1}$.

Рассмотрим все наборы длины l_1, полученные из системы $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Очевидно они попарно несравнимы и потому согласно лемме 1 множество пар множеств (M_0, M_1) с х.п. $\chi \in T_1$ непусто. Очевидно, что для множеств (M_0, M_1) с х.п. χ тестов длины l_1 и менее не существует.

2. Множество T_2 образовано из х.п. $\chi = (n, p, l_1, m_1)$, где числа p и m_1 удовлетворяют условиям

$$m_1 = C_p^{l_1},\ 1 \leqslant m_1 < C_p^{l_1}.$$

Пусть $S_1, \cdots, S_{m_1}$—все наборы длины l_1, полученные из системы $\{x_1, \cdots, x_p\}$. Очевидно наборы $S_1, \cdots, S_{m_1}$ попарно несравнимы и множество пар множеств (M_0, M_1) с х.п. $\chi \in T_2$ и м.н.н. $S_1, \cdots, S_{m_1}$ непусто (лемма 1). Также очевидно, что длина м.т. для пар (M_0, M_1) с х.п. $\chi \in T_2$ не может быть равна (l_1+1), так как по условию $m_1 < C_n^{l_1}$, а потому существует хотя бы один тест длины l_1.

3. Множество T_3 составлено из х.п. $\chi = (n, p, l_1, l_2, m_1, m_2)$, где $n \geqslant 2l_1$, $p = n$, $l_2 > 1$, $m_1 = 2$, $m_2 = C_n^{l_2} - 2C_{l_1}^{l_2}$.

Пусть χ—произвольная х.п., $\chi \in T_3$. Рассмотрим попарно несравнимые наборы $S_{11}, S_{12}, S_{21}, \cdots, S_{2m_2}$, полученные следующим образом. S_{11}, S_{12} — произвольные различные наборы длины l_1 из системы $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, имеющие y общих переменных, $0 \leqslant y < l_1$. Из наборов S_{11}, S_{12} образуем все $(2C_{l_1}^{l_2} - C_y^{l_2})$ различных собственных поднаборов длины l_2 и исключим их из множества всевозможных различных наборов длины l_2 системы X. Множество оставшихся наборов обозначим через P_2. Так как $(C_n^{l_2} - (2C_{l_1}^{l_2} - C_y^{l_2})) - m_2 = C_y^{l_2} \geqslant 0$, то из P_2 можно всегда выбрать наборы $S_{21}, \cdots, S_{2m_2}$ так, чтобы наборы $S_{11}, S_{12}, S_{21}, \cdots, S_{2m_2}$ были попарно несравнимы.

Следовательно существуют пары множеств (M_0, M_1) с м.н.н. $S_{11}, S_{12}, S_{21}, \cdots, S_{2m_2}$ (лемма 1).

Покажем, что полученные вышеуказанным способом наборы могут иметь одну и ту же х.п. χ, однако м.т. может быть как длины (l_2+1), так и меньшей длины. Это и послужит доказательством утверждения: $T_3 \subset (U_1 \cap U_2)$.

Действительно, при $y < l_2$ число всех наборов длины l_2 есть $(2C_{l_1}^{l_2} - C_y^{l_2}) + m_2 = C_n^{l_2} - C_y^{l_2} = C_n^{l_2}$ и потому длина м.т. будет равна (l_2+1). Очевидно при этом $p = n$.

Пусть $y = l_2$, тогда число всех наборов длины l_2 есть $C_n^{l_2} - 1$, и существует ровно один тест длины l_2.

Покажем, что и в этом случае $p = n$. Предположим $\mu(S_{11} \cup S_{12} \cup \cup \cdots \cup S_{2m_2}) < n$. Тогда наш единственный тест длины l_2 должен содержать хотя бы одну переменную x_α такую, что $x_\alpha \overline{\in} (S_{11} \cup S_{12} \cup S_{21} \cup \cup \cdots \cup S_{2m_2})$. Одноэлементный набор, составленный из переменной x_α есть тест, и тогда мы имеем по крайней мере $C_n^{l_2-1} > 1$ тестов длины l_2, что опровергает наше предположение. Теорема доказана.

Заметим, что построенные множества T_1, T_2, T_3 бесконечны.

Следствие. *Существуют классы* Ω_1 *и* Ω_2 *таких пар множеств* (M_0, M_1), *что если* $(M_0, M_1) \in \Omega_1$ *(соответственно,* $(M_0, M_1) \in \in \Omega_2$*), то по х.п.* χ *пары* (M_0, M_1) *возможно (соответственно, невозможно) однозначно определить: длина м.т. равна* (l_k+1) *или меньше этой величины.*

§ 3. *Характеристические функции*

Пусть $S = \{S_1, \cdots, S_m\}$—множество попарно несравнимых наборов с х.п. $\chi = (n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$. Определим функцию $\Pi(i_1, \cdots \cdots, i_t)$ следующим образом:

$$\Pi(i_1, \cdots, i_t) = \begin{cases} \mu(S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_t}), & \text{при } 1 \leqslant i_r \leqslant m,\ r = 1, \cdots, t, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функцию $\Pi(i_1, \cdots, i_t)$ будем называть *характеристической функцией* (х.ф.) множества S. Приведем некоторые свойства х.ф.

1. $\Pi(i_1, \cdots, i_t)$ не зависит от порядка аргументов $i_1, \cdots, i_t$.
2. $0 \leqslant \Pi(i_1, \cdots, i_t) \leqslant l_1$.
3. $\Pi(i) \neq 0$ при $i \in \{1, \cdots, m\}$, $m \neq 0$.
4. Если $\{i_1, \cdots, i_t\} \subseteq \{j_1, \cdots, j_p\}$, где $i_1, \cdots, i_t$, $j_1, \cdots, j_p$ — произвольные натуральные числа, то $\Pi(i_1, \cdots, i_t) \geqslant \Pi(j_1, \cdots, j_p)$.
5. Если $\mu(S_{i_1}) \leqslant \mu(S_{i_2}) \leqslant \cdots \leqslant \mu(S_{i_t})$ и $t > 1$, то $\Pi(i_1, \cdots, i_t) \leqslant \leqslant \mu(S_{i_1}) - 1$.

Рассмотрим множество $S = \{S_1, \cdots, S_m\}$ попарно несравнимых наборов с х.п. $\chi = (n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$ и х.ф. $\Pi(p_1, \cdots, p_t)$. Из каждого набора S_r, $r = 1, \cdots, m$ получим всевозможные различные поднаборы длины i, где i—произвольное натуральное число. Через $N_i(S)$ обозначим число всех различных таких наборов длины i.

Заметим, что если S—множество м.н.н. и χ — х.п. для пары (M_0, M_1), то $N_i(S)$ будет числом всех различных н.н. длины i.

Теорема 5. $N_i(S) = \sum\limits_{t=1}^{m} (-1)^{t-1} \sum\limits_{\{p_1, \cdots, p_t\} \subseteq \{1, \cdots, m\}} C^i_{\Pi(p_1, \cdots, p_t)}$, *где полагаем* $C_k^i = 0$ *при* $i > k$.

Доказательство. Используем принцип „включения — исключения" (см. доказательство теоремы 2).

В данном случае $N = N_i(S)$, т. е. объектами нашего рассмотрения являются все различные поднаборы длины i, полученные из наборов множества S.

Обозначение a_r, $r = 1, \cdots, m$ в данном случае понимается как свойство быть поднабором набора S_r, а a'_r означает отсутствие этого свойства. Тогда $N(a'_1, \cdots, a'_m) = 0$, так как каждый рассматриваемый набор длины i получен из какого-либо набора $S_r \in S$ и потому обладает по меньшей мере свойством a_r. Учитывая, что $N(a_{p_1}, \cdots$ $\cdots, a_{p_t}) = C^i_{\Pi(p_1, \cdots, p_t)}$, $t = 1, \cdots, m$, из формулы „включения—исключения", получим утверждение теоремы.

Теорема 6. *Для существования теста длины i для множеств (M_0, M_1) n-мерных булевых векторов необходимо и достаточно, чтобы $N_i(S) < C^i_n$, $i \in \{1, \cdots, n\}$.*

Теорема 7. *Если при некоторой длине i, $i \in \{1, \cdots, n\}$.* $N_i(S) = C^i_n$, то для каждого $t < i$, $N_t(S) = C^t_n$.

Теоремы 8. *Для $t < i$, если $N_i(S) > C^i_n - C^{i-t}_{n-t}$, то теста длины t и менее не существует.*

Теоремы 6, 7, 8 легко доказать, используя результаты [4], теорему 3 и лемму 1.

В работе [4] приведен алгоритм поиска м.т. для множеств (M_0, M_1), согласно которому вначале определяется длина м.т. $i_{м.т.}$, а сам м.т. ищется уже среди тестов длины $i_{м.т.}$. Исходя из основного алгоритма, теорем 2, 5, 6, 7, 8 можно предложить следующий алгоритм построения м.т. для множеств (M_0, M_1) с х.п. $\chi = (n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$:

а. Находим множество S м.н.н. для множеств (M_0, M_1).

б. Вычисляем длину м.т. $i_{м.т.}$. Для этого необходимо провести не более $[\log_2 l_k + 1]$ проверок условия $N_i(S) = C^i_n$. Использование теоремы 8 может уменьшить число таких проверок.

в. Определяем тесты длины $i_{м.т.}$. Для этого последовательно получаем всевозможные наборы длины $i_{м.т.}$ из $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ (такой алгоритм не трудно указать).

Каждый из полученных наборов, не являющихся поднабором ни одного набора множества S будет м.т.

В приведенном алгоритме построения м.т. для выяснения вопроса существования тестов длины i, вместо вычисления величины $N_i(S)$ и проверки условия $N_i(S) = C^i_n$ можно последовательно сравнивать каждый набор длины i с наборами из множества S, $i \in \{i_1, \cdots, i_t\}$, $t \leqslant$ $\leqslant [\log_2 l_k + 1]$.

Разнообразие алгоритмов вычисления м.т. ставит вопрос о необходимости получения точных сравнительных оценок для сложностей этих алгоритмов и требует дополнительного исследования.

§ 4. *Некоторые классы множеств*

В этом параграфе исследуются два класса множеств несравнимых наборов, для которых значение $N_l(S)$ можно представить в виде достаточно простого аналитического выражения.

Пусть $S=\{S_1,\cdots,S_m\}$—множество попарно несравнимых наборов с х.п. $\chi=(n,p,l_1,\cdots,l_k,m_1,\cdots,m_k)$ и х.ф. $\Pi(j_1,\cdots,j_r)$. Множество S назовем *„+“-множеством,* если существуют переменные $x_1,\cdots,x_m$, $x_j\in S_j$, $j=1,\cdots,m$ и перестановка $j_1,\cdots,j_m$ чисел $1,\cdots,m$ такая, что

$$S_{j_1}/\{x_{j_1}\}\subseteq S_{j_2}/\{x_{j_2}\}\subseteq\cdots\subseteq S_{j_m}/\{x_{j_m}\}.$$

Множество S назовем *„—“-множеством,* если существуют переменные $x_1,\cdots,x_m$, $x_j\bar{\in} S_j$, $j=1,\cdots,m$ и перестановка $j_1,\cdots,j_m$ чисел $1,\cdots,m$ такая, что

$$S_{j_1}\cup\{x_{j_1}\}\subseteq S_{j_2}\cup\{x_{j_2}\}\subseteq\cdots\subseteq S_{j_m}\cup\{x_{j_m}\}.$$

Приведем некоторые свойства „+“-множеств.

Свойство 1. $x_{j_1}\neq x_{j_2}\neq\cdots\neq x_{j_m}$, так как мы рассматриваем попарно несравнимые наборы.

Свойство 2. Если $\mu(S_{j_r})=\mu(S_{j_l})$, $j_r, j_l\in\{1,\cdots,m\}$, то $S_{j_r}/\{x_{j_r}\}=S_{j_l}/\{x_{j_l}\}$.

Свойство 3.

$$\Pi(j_1,\cdots,j_r)=\begin{cases}\mu(S_{j_1}), \text{ если } r=1,\ j_r\in\{1,\cdots,m\},\\ \min\limits_{j\in\{j_1,\cdots,j_r\}}\mu(S_j)-1, \quad \text{если } r>1, \\ \qquad \{j_1,\cdots,j_r\}\subseteq\{1,\cdots,m\},\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Свойство 4. $p=\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m}S_j\right)=(l_1-1)+\sum\limits_{j=1}^{k}m_j=(l_1-1)+m.$

Свойство 5. $N_l(S)=C_{l_1-1}^{l}+\sum\limits_{j=1}^{k}m_j\,C_{l_j-1}^{l-1}.$

Заметим, что построенное при доказательстве леммы 2 множество попарно несравнимых наборов при $p=(l_1-1)+\sum\limits_{j=1}^{k}m_j$ является „+“-множеством.

Приведем некоторые свойства „—“-множеств.

Свойство 1. $x_{j_1}\neq x_{j_2}\neq\cdots\neq x_{j_m}$, так как наборы $S_1,\cdots,S_m$ попарно несравнимы.

Свойство 2. Для любых $S_{j_l}, S_{j_r}\in S$, если $\mu(S_{j_l})<\mu(S_{j_r})$, то $S_{j_l}/\{x_{j_l}\}\subset S_{j_r}\}/\{x_{j_l}\}$, и если $\mu(S_{j_l})=\mu(S_{j_r})$, то $S_{j_l}/\{x_{j_r}\}=S_{j_r}/\{x_{j_l}\}$.

Свойство 3.

$$p=\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} S_j\right)=\begin{cases} l_1+1, & \text{если } m>1, \\ l_1, & \text{если } m=1. \end{cases}$$

Действительно, $\mu(S_{j_m})=l_1$ и x_{j_m} не равно ни одному из $x_{j_1},\cdots,x_{j_{(m-1)}}$. Следовательно $x_{j_m}\in\bigcup_{j=1}^{m-1} S_j$.

Свойство 4. Наборы $S_1,\cdots,S_m$ можно представить следующим образом:

$$S_{j_1}=\{x_{j_2},x_{j_3},\cdots,x_{j_m}\}\cup S'_{j_1},$$

$$S_{j_2}=\{x_{j_1},x_{j_3},\cdots,x_{j_m}\}\cup S'_{j_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{j_m}=\{x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},\cdots,x_{j_{(m-1)}}\}\cup S'_{j_m}, \text{ где}$$

$$S'_{j_1}\subseteq S'_{j_2}\subseteq\cdots\subseteq S'_{j_m}.$$

Действительно, из определения „—"-множеств и свойства 1 следует, что для каждого $t\in\{2,\cdots,m\}$ набор S_{j_t} представим в виде

$$S_{j_t}=\{x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_{(t-2)}},x_{j_{(t-1)}}\}\cup S''_{j_t}.$$

При этом переменная $x_{j_t}\in S_{j_r}$, $r\in\{1,\cdots,t-1\}$. Предположим, что для некоторого r $x_{j_t}\overline{\in} S_{j_r}$. Тогда, поскольку $S_{j_r}\subseteq S_{j_t}\cup\{x_j\}$, то и $S_{j_r}\subseteq S_{j_t}$, что противоречит несравнимости наборов S_{j_t} и S_{j_r}. Данное рассуждение, примененное последовательно к наборам $S_{j_1},\cdots$ $\cdots,S_{j_m}$, убеждает нас в справедливости свойства 4.

Свойство 5. $l_k=m-1+\mu(S'_{j_1})$, $m\leqslant l_k+1$, так как $S_{j_1}=\{x_{j_2},\cdots,x_{j_m}\}\cup S'_{j_1}$ и $\mu(S_{j_1})=l_k$.

Свойство 6.

$$\Pi(j_1,\cdots,j_r)=\begin{cases}(m-1)-(r-1)+\min\limits_{j\in\{j_1,\cdots,j_r\}}\mu(S'_j), \text{ при} \\ \varnothing\neq\{j_1,\cdots,j_r\}\subseteq\{1,\cdots,m\}, \\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Свойство 7.

$$N_l(S)=\sum_{j=1}^{k}\left(C_{l_j-\sum_{t=1}^{j-1}m_t+1}^{l-\sum_{t=1}^{j-1}m_t}-C_{l_j-\sum_{t=1}^{l}m_t+1}^{l-\sum_{t=1}^{j}m_t}\right),$$

где $C_r^t=0$, при $t<0$.

Действительно, согласно свойству 4 наборы „—"-множества $S=\{S_1,\cdots$ $\cdots,S_m\}$ можно представить в виде

$$S_{j_m}=\{x_{j_{(m-1)}},x_{j_{(m-2)}},\cdots,x_{j_3},x_{j_2},x_{j_1}\}\cup S'_{j_m},$$

$$S_{j_{(m-1)}} = \{x_{j_m}, x_{j_{(m-2)}}, \cdots, x_{j_2}, x_{j_1}, x_{j_1}\} \cup S'_{j_{(m-1)}},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$S_{j_1} = \{x_{j_m}, x_{j_{(m-1)}}, x_{j_{(m-2)}}, \cdots, x_{j_2}, x_{j_1}\} \cup S'_{j_1},$$

где $S'_{j_m} \supseteq S'_{j_{(m-1)}} \supseteq \cdots \supseteq S'_{j_1}$.

Из набора S_{j_m} можно получить $C^i_{l_1}$ различных подноборов длины i. Из набора $S_{j_{(m-1)}}$ можно получить C^{i-1}_{a-1} поднаборов длины i, не являющихся поднаборами S_{j_m}, где $a = \mu\,(S_{j_{(m-1)}})$, так как такие поднаборы должны обязательно содержать переменную x_{j_m}. Из набора $S_{j_{(m-2)}}$ можно получить C^{i-2}_{b-2} поднаборов длины i, не являющихся поднаборами S_{j_m} и $S_{j_{(m-1)}}$, где $b = \mu\,(S_{j_{(m-2)}})$, так как такие поднаборы обязательно должны содержать переменные x_{j_m} и $x_{j_{(m-1)}}$.

Аналогичным рассуждением получаем, что из набора S_{j_t}, $t=m-$ $-3,\cdots, 2, 1$ можно получить $C^{i-(t-1)}_{d-(t-1)}$ поднаборов длины i, не являющихся поднаборами $S_{j_{(t+1)}}, S_{j_{(t+2)}}, \cdots, S_{j_m}$, где $d = \mu\,(S_{j_t})$. Учитывая, что m_r наборов из S имеют одинаковую длину l_r, $r = 1,\cdots, k$, получаем

$$N_i(S) = (C^i_{l_1} + C^{i-1}_{l_1-1} + \cdots + C^{i-m_1+1}_{l_1-m_1+1}) + (C^{i-m_1}_{l_2-m_1} + C^{i-m_1-1}_{l_2-m_1-1} +$$

$$+ \cdots + C^{i-(m_1+m_2)+1}_{l_2-(m_1+m_2)+1}) + \cdots + (C^{i-\sum\limits_{t=1}^{k-1} m_t}_{l_k-\sum\limits_{t=1}^{k} m_t} + C^{i-\sum\limits_{t=1}^{k-1} m_t-1}_{l_k-\sum\limits_{t=1}^{k-1} m_t-1} + \cdots +$$

$$+ C^{i-\sum\limits_{t=1}^{k} m_t+1}_{l_k-\sum\limits_{t=1}^{k} m_t+1}).$$

Так как

$$C^p_v = C^p_{v+1} - C^{p-1}_v = C^p_{v+1} - (C^{p-1}_{v-1} + C^{p-2}_{v-2} + \cdots + C^{p-(u-1)}_{v-(u-1)} + C^{p-u}_{v-(u-1)},$$

то каждое выражение

$$C^{i-h}_{l_j-h} + C^{i-h-1}_{l_j-h-1} + \cdots + C^{i-h-(m_j-1)}_{i-h-(m_j-1)},\ \text{где}\ j = 1,\cdots, k,\ h = \sum_{t=1}^{j-1} m_t,\ \text{если}$$

считать $p = i - h$, $v = l_j - h$, $u = m_j$, примет вид:

$$C^p_{v+1} - C^{p-u}_{v-(u-1)} = C^{i-\sum\limits_{t=1}^{j-1} m_t}_{l_j-\sum\limits_{t=1}^{j-1} m_t+1} - C^{i-\sum\limits_{t=1}^{j} m_t}_{l_j-\sum\limits_{t=1}^{j} m_t+1}.$$

После подстановки в формулу для $N_i(S)$ получаем

$$N_i(S) = \sum_{j=1}^{k} (C^{i-\sum\limits_{t=1}^{j-1} m_t}_{l_j-\sum\limits_{t=1}^{j-1} m_t+1} - C^{i-\sum\limits_{t=1}^{j} m_t}_{l_j-\sum\limits_{t=1}^{j} m_t+1}).$$

Теорема 9. *Для того чтобы при произвольной х.п.* $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots, m_k)$ *существовало „—"-множество с х.п.* χ, *необходимо и достаточно выполнение условий* $p=l_1+1$, $1<m\leqslant l_k+1$ *или* $p=l_1, m=1$, *где* $m=\sum_{j=1}^{k} m_j$.

Доказательство. Необходимость следует из свойств 3 и 4 „—"-множеств. Достаточность. Если $p=l_1$, $m=1$, то доказательство очевидно. Рассмотрим случай $p=l_1+1$, $1<m\leqslant l_k+1$.

Пусть $S_{j_1},\cdots, S_{j_m}$ — всевозможные различные наборы длины $(m-1)$, полученные из произвольного набора S_j длины m в системе $X=\{x_1,\cdots, x_p\}$ такие, что

$S_{j_t}\cup\{x_{j_t}\}=S_j$, $t=1,\cdots, m$, и $X/S_j=\{x_{r_1},\cdots, x_{r_{a_1}}\}$, где $a_1=l_1-m+1$.

Нетрудно видеть, что наборы

$$
\begin{array}{l}
S_{j_1}\cup\{x_{r_1},\cdots, x_{r_{a_1}}\},\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
S_{j_{m_1}}\cup\{x_{r_1},\cdots, x_{r_{a_1}}\},\\
S_{j_{(m_1+1)}}\cup\{x_{r_1},\cdots, x_{r_{a_2}}\},\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
S_{j_{\left(\sum\limits_{t=1}^{k} m_t+1\right)}}\cup\{x_{r_1},\cdots, x_{r_{a_k}}\},\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
S_{j_m}\cup\{x_{r_1},\cdots, x_{r_{a_k}}\}, \text{ где } a_v=(l_v-m+1),
\end{array}
$$

$v=1,\cdots, k$ образуют „—"-множество с х.п. χ.

Заметим, что существует не менее $C_{l_1+1}^{m_1}$ „—"-множеств, с рассматриваемой х.п. χ.

Теорема 10. *Для х.п.* $\chi=(n, p, l_1, m_1)$, *где* $p=l_1+1$, $m_1\leqslant\leqslant l_1+1$ *каждое множество попарно несравнимых наборов с х.п.* χ *является „—"-множеством.*

Доказательство немедленно следует из того, что каждый набор длины l_1 может быть получен лишь удалением одной переменной из системы переменных $\{x_1,\cdots, x_{l+1}\}$.

Теорема 11. *Для произвольной х.п.* $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots$ $\cdots, m_k)$, *при* $m=\sum_{j=1}^{k} m_j\overline{\in}\{1, 2\}$, *одновременно не могут существовать „+" и „—"-множества.*

Утверждение теоремы непосредственно следует из свойства 4 для „+"-множеств и свойства 3 для „—"-множеств.

Приведем пример вычисления длины м.т. на основании приведенных методов.

Пусть множества (M_0, M_1) образованы из следующих 10-мерных булевых векторов:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1.
\end{array}
$$

Множество м.н.н. для (M_0, M_1):

$$\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\},$$
$$\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\},$$
$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}$$

образуют, как нетрудно заметить, „—"-множество с х.п. $\chi=(10, 10, 9, 7, 6, 4, 1, 1)$. $l_3=6$, поэтому тесты длины 7 существуют и м.т. имеет длину $1 \leqslant l_{\text{м.т.}} \leqslant 7$. Выражение $N_l(S)$ (см. свойство 7 для „—"-множеств) после подстановки числовых значений принимает вид

$$N_l(S) = C_{10}^l - C_6^{l-4} + C_4^{l-4} + C_3^{l-5} + C_2^{l-5} - C_1^{l-6}.$$

При $l \leqslant 4$, $N_l(S) = C_{10}^l$, так как $C_6^{l-4} = C_4^{l-4} = C_3^{l-5} = C_2^{l-5} = C_1^{l-6} = 0$. При $l=5$, $N_5(S) = C_{10}^5 - 2 < C_{10}^5$. Поэтому существуют в точности два м.т. длины 5. Это тесты $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_9\}$ и $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_{10}\}$.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступило 11.III.1969

Է. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ. Ստուգիչների քանակական բնութագրիչների մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում հետազոտվում են n-չափանի բուլյան վեկտորների չհատվող բազմությունների տարրերը տարբերելու համար հատկացված ստուգիչների կառուցման հարցերը։

Նշված բազմությունների համար սահմանվում են բնութագրող հաջորդականություններ և բնութագրող ֆունկցիաներ, հետազոտվում են այդ քանակական բնութագրիչների հատկությունները, հաստատվում են նրանց օգտագործման հնարավորությունները տվյալ երկարություն ունեցող ստուգիչների կառուցման հարցերում։ Առանձնացվում են բազմությունների զույգերի երկու դաս, որոնց համար ստուգիչների գոյության հայտանիշները ընդունում են համեմատաբար պարզ անալիտիկ ձև։

E. M. POGOSIAN. *On the quantitative characteristics of the tests* (summary)

In this paper the tests for the distinction of the objects belonging to two non—intersecting sets of n-dimensional boolean vectors are investigated. The characteristic sequences and characteristic functions for such pairs of sets are defined. The properties of these quantitative characteristics of a pair of sets are investigated and the pos-

sibility of their use in the proofs of the existence for tests of given length and in the algorithms for test construction is established.

Two classes of pairs of sets are described for which the criteria of the existence of the tests have comparatively simple analytic form.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. И. Журавлев.* О отделимости подмножеств n-мерного единичного куба, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, т. 1, 1958.
2. *А. Н. Дмитриев, Ю. И. Журавлев, Ф. П. Кренделев.* О математических принципах классификации предметов и явлений, Сборник Дискретный анализ, вып. 7, 1966.
3. *И. А. Чегис, С. В. Яблонский.* Логические способы контроля работы электрических схем, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, т. 1, 1958.
4. *Е. С. Согомонян.* Об одном подходе к задаче построения тестов, Автоматика и телемеханика, № 10, 1968.
5. *Дж. Риордан.* Введение в комбинаторный анализ, Москва, ИИЛ, 1963.
6. *Э. М. Погосян.* О нижних оценках длин минимальных тестов, ДАН АрмССР, L, № 2, 1970.