А. М. БАДАЛЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ,
 МЕРОМОРФНЫХ НА ВСЕЙ ПЛОСКОСТИ

1°. В монографии М. М. Джрбашяна [1] построена теория классов N_α ($-1 < \alpha < +\infty$) мероморфных в единичном круге функций.

Основным аппаратом этой теории является естественное обобщение формулы Иенсена-Неванлинны для мероморфных в круге $|z| < R$ функций. Напомним эту формулу и определение класса N_α .

Пусть функция $F(z)$ мероморфна в круге $|z| < R < +\infty$, $\alpha \{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — соответственно последовательности ее нулей и полюсов, отличных от $z = 0$ и пронумерованных в порядке неубывания их модулей, причем каждый нуль или полюс записывается столько раз, какова его кратность. Тогда для любых $\rho \in (0, R)$ и α ($-1 < \alpha < +\infty$) имеет место формула

$$F(z) = e^{i \arg c_\lambda + i k_\alpha} \left(\frac{z}{\rho}\right)^\lambda \frac{\prod_{0 < |a_n| < \rho} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{-w_\alpha^{(\rho)}(z; a_n)}}{\prod_{0 < |b_n| < \rho} \left(1 - \frac{z}{b_n}\right) e^{-w_\alpha^{(\rho)}(z; b_n)}} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha \left(e^{-i\theta} \frac{z}{\rho} \right) [\rho^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |F(\rho e^{i\theta})|] d\theta \right\} \quad (|z| < \rho), \quad (1)$$

где λ и c_λ определяются из разложения функции $F(z)$ в окрестности точки $z = 0$

$$F(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \dots, \quad c_\lambda \neq 0,$$

$$w_\alpha^{(\rho)}(z; \zeta) = \int_{\frac{|z|}{\rho}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)} \left\{ \left(\frac{z}{\rho}\right)^n \int_0^{\frac{|z|}{\rho}} (1-x)^\alpha \times \right.$$

$$\left. \times x^{n-1} dx - \left(\frac{\zeta}{\rho}\right)^n \int_{\frac{|z|}{\rho}}^1 (1-x)^\alpha x^{n-1} dx \right\}, \quad (2)$$

$$S_x \left(\frac{z}{\rho} e^{-i\theta} \right) = \Gamma(1+x) \left\{ \frac{2}{\left(1 - \frac{z}{\rho} e^{-i\theta}\right)^{1+x}} - 1 \right\} = \\ = \Gamma(1+x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+x+k)}{\Gamma(1+k)} \left(\frac{ze^{-i\theta}}{\rho} \right)^k$$

и, наконец,

$$k_x = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)}.$$

Формула (1) при $z=0$ приводит к определению x -характеристической функции

$$T_x(\rho; F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho^{-x} D_{(-)}^{-x} \log |F(\rho e^{i\theta})| d\theta + \\ + \frac{\rho^{-x}}{\Gamma(1+x)} \int_0^{\rho} \frac{(\rho-t)^x}{t} [n(t; \infty) - n(0; \infty)] dt + \\ + \frac{n(0; \infty)}{\Gamma(1+x)} [\log \rho - k_x] \equiv m_x(\rho; F) + N_x(\rho; F), \quad (3)$$

где $D_{(-)}^{-x}$ — оператор дробного интегрирования в смысле Римана-Лиувилля.

Наконец, класс N_x определяется как множество мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0 < \rho < 1} |T_x(\rho; F)| < +\infty. \quad (4)$$

Одним из основных результатов М. М. Джрбашяна является следующая теорема о факторизации класса N_x .

Теорема. Класс N_x ($-1 < x < +\infty$) совпадает с множеством функций, которые в круге $|z| < 1$ допускают представление вида

$$F(z) = e^{i\gamma + \lambda k_x} z^\lambda \frac{B_x(z; a_\mu)}{B_x(z; b_\nu)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(ze^{-i\theta}) d\psi(\theta) \right\}, \quad (5)$$

где $B_x(z; a_\mu)$ и $B_x(z; b_\nu)$ — сходящиеся произведения типа Бляшке, $\psi(\theta)$ — вещественная функция на $[-\pi, \pi]$ с конечным полным изменением, λ — любое целое, а γ — любое вещественное число и

$$k_x = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)}.$$

2°. В настоящей работе вводятся классы U_σ ($0 < \sigma < +\infty$) мероморфных на всей плоскости функций и устанавливается теорема об их факторизации.

Классе U_σ ($0 < \sigma < +\infty$) определяется как множество мероморфных на всей плоскости z функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0 < \rho < +\infty} \{\Gamma(1 + \sigma\rho) T_{\sigma\rho}(\rho; F)\} < +\infty,$$

где $T_{\sigma\rho}(\rho; F)$ — значение α -характеристической функции $T_\alpha(\rho)$ при $\alpha = \sigma\rho$.

Теорема о факторизации класса U_σ устанавливается путем предельного перехода в представлении (1).

Автор выражает искреннюю благодарность проф. М. М. Дзр-башяну за постановку задачи и советы при ее решении.

1. Построение специальных целых функций с заданным распределением нулей

1.1. Введем в рассмотрение целую функцию

$$E_\sigma(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) e^{-Q_\sigma(z; \zeta)} \quad (1.1)$$

$$(0 < |\zeta| < +\infty, 0 < \sigma < +\infty),$$

где

$$Q_\sigma(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma z)^n}{n!} \left\{ \zeta^{-n} \int_{\zeta}^{|\zeta|} e^{-\sigma t} t^{n-1} dt - \bar{\zeta}^n \int_{|\zeta|}^{\infty} e^{-\sigma t} t^{-n-1} dt \right\}. \quad (1.2)$$

Докажем теорему.

Теорема 1. Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ пронумерована в порядке возрастания модулей

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_k| \leq \dots \quad (1.3)$$

и удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|z_k|}}{|z_k|} < +\infty. \quad (1.4)$$

Тогда бесконечное произведение

$$K_\sigma(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} E_\sigma(z; z_k) \quad (1.5)$$

сходится равномерно и абсолютно в каждом замкнутом круге $|z| \leq r < +\infty$ и представляет целую функцию в плоскости $|z| < +\infty$ с нулями $\{z_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Отметим, что функцию $Q_\sigma(z; \zeta)$ можно записать в виде

$$Q_0(z; \zeta) = \int_{|z|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma z)^n}{n!} \left\{ \zeta^{-n} \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} t^{n-1} dt - \right. \\ \left. - \zeta^{-n} \int_{|z|}^{\infty} e^{-\sigma t} t^{n-1} dt - \bar{\zeta}^n \int_{|z|}^{\infty} e^{-\sigma t} t^{-n-1} dt \right\}$$

и, поскольку

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} t^{n-1} dt = \frac{(n-1)!}{\sigma^n},$$

то имеет место

$$Q_0(z; \zeta) = \int_{|z|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma z)^n}{n!} \zeta^{-n} \frac{(n-1)!}{\sigma^n} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma z)^n}{n!} \left\{ \zeta^{-n} \int_{|z|}^{\infty} e^{-\sigma t} t^{n-1} dt + \bar{\zeta}^n \int_{|z|}^{\infty} e^{-\sigma t} t^{-n-1} dt \right\} = \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \zeta^{-n}}{n} - \int_{|z|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt + \\ + \int_{|z|}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma z \zeta^{-1} t)^n}{n!} \right\} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt + \int_{|z|}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma z \bar{\zeta}^{-1} t^{-1})^n}{n!} \right\} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt = \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \zeta^{-n}}{n} - \int_{|z|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt + \int_{|z|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma t \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)}}{t} dt + \int_{|z|}^{\infty} e^{\frac{\sigma z \bar{\zeta}}{t}} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt.$$

Полагая далее, что $|z| < |\zeta|$, будем иметь

$$Q_0(z; \zeta) = \log \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) - \int_{|z|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt + \int_{|z|}^{\infty} e^{-\sigma t \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)} \frac{dt}{t} + \\ + \int_{|z|}^{\infty} e^{\frac{\sigma z \bar{\zeta}}{t}} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt \equiv \log \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) + P_0(z; \zeta),$$

и окончательно из (1.1) получим

$$E_0(z; \zeta) = e^{-P_0(z; \zeta)} \quad (|z| < |\zeta|). \quad (1.6)$$

Теперь оценим функцию $P_0(z; \zeta)$

$$\begin{aligned}
 |P_\sigma(z; \zeta)| &\leq \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{\sigma|\zeta|} + \int_{|\zeta|}^{\infty} |e^{-\sigma t(1-\frac{z}{\zeta})}| \frac{dt}{t} + \int_{|\zeta|}^{\infty} |e^{\frac{\sigma z \bar{z}}{t}}| \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt \leq \\
 &\leq \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{\sigma|\zeta|} + \frac{e^{-\sigma|\zeta|(1-|z||\zeta|^{-1})}}{\sigma|\zeta|(1-|z||\zeta|^{-1})} + \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{\sigma|\zeta|} e^{\sigma|z|} \leq \\
 &\leq \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{\sigma|\zeta|} \left\{ 1 + \frac{e^{\sigma r}}{(1-r|\zeta|^{-1})} + e^{\sigma r} \right\} \quad (|z| \leq r < |\zeta|).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \frac{|P_\sigma(z; \zeta)|}{|\zeta|^{-1} e^{-\sigma|\zeta|}} \leq \varphi(r), \quad \varphi(r) = \frac{1+2e^{\sigma r}}{\sigma},$$

но тогда имеем также

$$\begin{aligned}
 \overline{\lim}_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \frac{1 - |E_\sigma(z; \zeta)|}{|\zeta|^{-1} e^{-\sigma|\zeta|}} &= \overline{\lim}_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} P_\sigma(z; \zeta)}}{|\zeta|^{-1} e^{-\sigma|\zeta|}} \leq \\
 &\leq \overline{\lim}_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-|P_\sigma(z; \zeta)|}}{|\zeta|^{-1} e^{-\sigma|\zeta|}} \leq \varphi(r) \quad (|z| \leq r).
 \end{aligned}$$

Это неравенство означает, что при условии (1.4) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{1 - |E_\sigma(z; z_k)|\}$$

сходится равномерно в каждом круге $|z| \leq r$, что эквивалентно утверждениям теоремы.

Отметим, наконец, что условие (1.4) не только достаточно, но и необходимо для сходимости произведения $K_\sigma(z; z_k)$.

В самом деле, если произведение $K_\sigma(z; z_k)$ сходится, то

$$K_\sigma(0; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} E_\sigma(0; z_k) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} Q_\sigma(0; z_k) \right\} = c_0 > 0. \quad (1.7)$$

Но

$$Q_\sigma(0; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx,$$

причем нетрудно убедиться, что

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \frac{Q_\sigma(0; \zeta)}{\{e^{-\sigma|\zeta|} |\zeta|^{-1}\}} = \sigma.$$

И поэтому при $|z| > R_0$ имеем

$$Q_\sigma(0; \zeta) > \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}. \quad (1.8)$$

Наконец, из (1.7) и (1.8) следует, что вместе с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(0; z_k)$ сходится также ряд (1.4).

1.2. Установим теперь одно глобальное граничное свойство функции $K_\sigma(z; z_k)$ при $z \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Для любого сходящегося произведения $K_\sigma(z; z_k)$ справедливо соотношение

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(1 + \sigma\rho)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\rho^{-\sigma\rho} D^{-\sigma\rho} \log |K_\sigma(\rho e^{i\theta}; \zeta)|\} d\theta = 0. \quad (1.9)$$

Доказательство. Пусть

$$K_\sigma(z; \zeta) = c_0 + c_1 z^2 + \dots \quad (|z| < +\infty),$$

тогда имеем

$$c_0 = K_\sigma(0; z_k) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(0; z_k) \right\}, \quad (1.10)$$

где

$$Q_k(0; z_k) = \int_{|z|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx.$$

Запишем формулу (2.34) ([1], стр. 605) для функции $K_\sigma(z; z_k)$, заметив, что в нашем случае $\lambda = 0$, $\alpha = \sigma\rho$,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1 + \sigma\rho)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\rho^{-\sigma\rho} D^{-\sigma\rho} \log |K_\sigma(\rho e^{i\theta}; z_k)|\} d\theta &= \log |c_0| + \\ &+ \sum_{0 < |z_k| < \rho} w_{\sigma\rho} \left(0; \frac{z_k}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$w_{\sigma\rho} \left(0; \frac{\zeta}{\rho} \right) = \int_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^1 \frac{(1-x)^{\sigma\rho}}{x} dx.$$

Таким образом, из (1.10) и (1.11) получим соотношение

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(1 + \sigma\rho)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\rho^{-\sigma\rho} D^{-\sigma\rho} \log |K_\sigma(\rho e^{i\theta}; z_k)|\} d\theta = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx + \sum_{0 < |z_k| < \rho} \int_{|z_k|}^{\rho} \frac{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx \quad (0 < \rho < +\infty). \end{aligned}$$

Отметим, что на основании неравенства $\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} \leq e^{-\sigma x}$ ($0 \leq x \leq \rho$),

имеем

$$\int_{|z_k|}^{\rho} \frac{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx \leq \int_{|z_k|}^{\rho} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx \leq \int_{|z_k|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx \leq \frac{e^{-\sigma|z_k|}}{\sigma|z_k|},$$

причем ввиду сходимости произведения $K_{\sigma}(z; z_k)$ сходится также и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|z_k|}}{|z_k|} < +\infty.$$

Теперь для данного фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем $\rho_0 = \rho_0(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при $\rho > \rho_0(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$\sum_{\rho_0 < |z_k| < \rho} \int_{|z_k|}^{\rho} \frac{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx \leq \sum_{\rho_0 < |z_k| < +\infty} \int_{|z_k|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем далее $\rho_1 = \rho_1(\varepsilon) > \rho_0(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\left| \sum_{|z_k| < \rho_0} \left\{ \int_{|z_k|}^{\rho} \frac{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx - \int_{|z_k|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\rho_1 < \rho < +\infty).$$

Таким образом, при $\rho > \rho_1(\varepsilon)$ будем иметь

$$\left| \frac{\Gamma(1 + \sigma\rho)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\rho^{-\sigma\rho} D^{-\sigma\rho} \log |K_{\sigma}(\rho e^{i\theta}; \zeta)|\} d\theta \right| < \varepsilon,$$

что эквивалентно утверждению (1.9) теоремы.

1.3. С помощью некоторых вспомогательных лемм установим еще одно важное свойство функции $K_{\sigma}(z; \zeta)$.

Пусть $K_{\sigma}(z; z_k)$ — некоторые сходящиеся произведения

$$K_{\sigma}(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-Q_{\sigma}(z; z_k)} = \prod_{k=1}^{\infty} E_{\sigma}(z; z_k).$$

Обозначим

$$D_{\sigma_1}(re^{i\varphi}; \zeta) = \Gamma(1 + \sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log |E_{\sigma}(re^{i\varphi}; \zeta)|, \quad (1.12)$$

и докажем лемму.

Лемма 1. Для любого $\sigma_1 > \sigma > 0$ имеет место интегральное представление

$$D_{\sigma_1} (re^{i\varphi}; \zeta) = -r^{-\sigma_1 r} \operatorname{Re} e^{i(\varphi - \arg \zeta)} \frac{e^{-\sigma_1 |\zeta|}}{|\zeta|} \int_0^r \frac{e^{\sigma_1 x e^{i(\varphi - \arg \zeta)}}}{1 - \frac{x e^{i\varphi}}{\zeta}} (r-x)^{\sigma_1 r} dx -$$

$$- \operatorname{Re} \sigma_1 r^{1-\sigma_1 r} \int_{|\zeta|}^{\infty} \left\{ \int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r-1} e^{\frac{\sigma_1 x e^{i\varphi}}{t}} dx \right\} \frac{e^{-\sigma_1 t}}{t} dt. \quad (1.13)$$

Доказательство. Заметим, что

$$r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log |E_{\sigma} (re^{i\varphi}; \zeta)| = r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right| -$$

$$- r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \operatorname{Re} Q_{\sigma} (re^{i\varphi}; \zeta).$$

Очевидно, что

$$r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right| = - \operatorname{Re} \frac{r^{-\sigma_1 r}}{\Gamma(1 + \sigma_1 r)} \int_0^r \frac{\frac{e^{i\varphi}}{\zeta}}{1 - \frac{te^{i\varphi}}{\zeta}} (r-t)^{\sigma_1 r} dt,$$

$$\operatorname{Re} r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} Q_{\sigma} (re^{i\varphi}; \zeta) = \operatorname{Re} \frac{1}{\Gamma(1 + \sigma_1 r)} \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_1 t}}{t} dt -$$

$$- \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma_1 r e^{i\varphi})^n}{\Gamma(1 + \sigma_1 r + n)} \left\{ \zeta^{-n} \int_0^{|\zeta|} e^{-\sigma_1 t} t^{n-1} dt + \bar{\zeta}^n \int_{|\zeta|}^{\infty} e^{-\sigma_1 t-n-1} dt \right\},$$

и следовательно

$$r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log |E_{\sigma} (re^{i\varphi}; \zeta)| = - \operatorname{Re} \frac{r^{-\sigma_1 r}}{\Gamma(1 + \sigma_1 r)} \int_0^r \frac{\frac{e^{i\varphi}}{\zeta}}{1 - \frac{te^{i\varphi}}{\zeta}} (r-t)^{\sigma_1 r} dt -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(1 + \sigma_1 r)} \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_1 t}}{t} dt + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma_1 r e^{i\varphi})^n}{\Gamma(1 + \sigma_1 r + n)} \left\{ \zeta^{-n} \int_0^{|\zeta|} e^{-\sigma_1 t} t^{n-1} dt -$$

$$- \bar{\zeta}^n \int_{|\zeta|}^{\infty} e^{-\sigma_1 t-n-1} dt \right\} = - \operatorname{Re} \frac{r^{-\sigma_1 r}}{\Gamma(1 + \sigma_1 r)} \int_0^r \frac{\frac{e^{i\varphi}}{\zeta}}{1 - \frac{te^{i\varphi}}{\zeta}} (r-t)^{\sigma_1 r} dt -$$

$$- \operatorname{Re} \int_{|\zeta|}^{\infty} E_1 \left(\frac{\sigma_1 r e^{i\varphi} \bar{\zeta}}{t}; 1 + \sigma_1 r \right) \frac{e^{-\sigma_1 t}}{t} dt +$$

$$+ \operatorname{Re} \int_0^{|\zeta|} \left\{ E_1 \left(\frac{\sigma_1 r e^{i\varphi} t}{\zeta}; 1 + \sigma_1 r \right) - \frac{1}{\Gamma(1 + \sigma_1 r)} \right\} \frac{e^{-\sigma_1 t}}{t} dt, \quad (1.14)$$

где
$$E_1(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k)} \quad (1.15)$$

—известная функция типа Миттаг-Леффлера порядка $\rho = 1$. Но не трудно убедиться, что справедливы тождества

$$\begin{aligned} E_1\left(\frac{\sigma r e^{i\varphi} t}{\zeta}; 1 + \sigma_1 r\right) - \frac{1}{\Gamma(1 + \sigma_1 r)} &= E_1\left(\frac{\sigma r e^{i\varphi} t}{\zeta}; 2 + \sigma_1 r\right) \frac{\sigma r e^{i\varphi} t}{\zeta} = \\ &= \frac{r^{-(1 + \sigma_1 r)}}{\Gamma(1 + \sigma_1 r)} \int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r} e^{\frac{\sigma x e^{i\varphi}}{\zeta}} dx \end{aligned}$$

и

$$E_1\left(\frac{\sigma r e^{i\varphi} \bar{\zeta}}{t}; 1 + \sigma_1 r\right) = \frac{r^{-\sigma_1 r}}{\Gamma(\sigma_1 r)} \int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r - 1} e^{\frac{\sigma x e^{i\varphi} \bar{\zeta}}{t}} dx,$$

с помощью которых из (1.14) приходим к интегральному представлению

$$\begin{aligned} D_{\sigma_1}(r e^{i\varphi}; \zeta) &= \Gamma(1 + \sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log |E_{\sigma_1}(r e^{i\varphi}; \zeta)| = \\ &= -r^{-\sigma_1 r} \operatorname{Re} \int_0^r \frac{e^{i\varphi}}{\zeta} \frac{(r-t)^{\sigma_1 r}}{1 - \frac{t e^{i\varphi}}{\zeta}} dt + \\ &+ \operatorname{Re} \frac{r^{-\sigma_1 r}}{\zeta} \sigma e^{i\varphi} \int_0^{|\zeta|} \left\{ \int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r} e^{\frac{\sigma x e^{i\varphi}}{s}} dx \right\} e^{-\sigma t} dt - \\ &- \sigma_1 r^{1 - \sigma_1 r} \operatorname{Re} \int_{|\zeta|}^{\infty} \left\{ \int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r - 1} e^{\frac{\sigma x e^{i\varphi} \bar{\zeta}}{\zeta}} dx \right\} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt \equiv J_1 + J_2 + J_3. \quad (1.16) \end{aligned}$$

Из выражения для J_2 получим

$$\begin{aligned} J_2 &= \operatorname{Re} \frac{r^{-\sigma_1 r} \sigma e^{i\varphi}}{\zeta} \int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r} \left\{ \int_0^{|\zeta|} e^{-\sigma t \left(1 - \frac{x e^{i\varphi}}{\zeta}\right)} dt \right\} dx = \\ &= \operatorname{Re} \frac{r^{-\sigma_1 r}}{|\zeta|} e^{i(\varphi - \arg \zeta)} \int_0^r \frac{1 - e^{-\sigma |\zeta| \left(1 - \frac{x e^{i\varphi}}{\zeta}\right)}}{1 - \frac{x e^{i\varphi}}{\zeta}} (r-x)^{\sigma_1 r} dx = \\ &= -J_1 - \frac{e^{-\sigma |\zeta|}}{|\zeta|} r^{-\sigma_1 r} \operatorname{Re} e^{i(\varphi - \arg \zeta)} \int_0^r \frac{e^{\sigma x e^{i(\varphi - \arg \zeta)}}}{1 - \frac{x e^{i\varphi}}{\zeta}} (r-x)^{\sigma_1 r} dx. \quad (1.17) \end{aligned}$$

Остается только подставить значение J_2 из (1.17) в (1.16), чтобы получить формулу (1.13) леммы.

Лемма 2. Для любого $\sigma_1 > \sigma$ справедлива оценка

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_{\sigma_1}(re^{i\varphi}; \zeta)| d\varphi \leq \frac{2 + \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma} \cdot \frac{e^{-\sigma_1|\zeta|}}{|\zeta|}. \quad (1.18)$$

Доказательство. В предыдущей лемме была получена формула (1.13)

$$\begin{aligned} D_{\sigma_1}(re^{i\varphi}; \zeta) &= -r^{-\sigma_1 r} \frac{e^{-\sigma_1|\zeta|}}{|\zeta|} \operatorname{Re} e^{i(\varphi - \arg \zeta)} \int_0^r \frac{e^{\sigma x e^{i(\varphi - \arg \zeta)}}}{1 - \frac{x e^{i\varphi}}{\zeta}} (r-x)^{\sigma_1 r} dx = \\ &= -\sigma_1 r^{1-\sigma_1 r} \operatorname{Re} \int_{|\zeta|}^{\infty} \left\{ \int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r - 1} e^{\frac{\sigma x e^{i\varphi} \bar{\zeta}}{t}} dx \right\} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt \equiv J_2^* + J_3. \end{aligned}$$

Теперь необходимо оценить интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_{\sigma_1}(re^{i\varphi}; \zeta)| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |J_2^*(re^{i\varphi}; \zeta)| d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |J_3(re^{i\varphi}; \zeta)| d\varphi. \quad (1.19)$$

Во первых, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |J_3(re^{i\varphi}; \zeta)| d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sigma_1 r^{1-\sigma_1 r} \operatorname{Re} \int_{|\zeta|}^{\infty} \left\{ \int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r - 1} e^{\frac{\sigma x e^{i\varphi} \bar{\zeta}}{t}} dx \right\} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt \right| d\varphi \leq \\ &\leq \frac{\sigma_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{|\zeta|}^{\infty} \left[\int_0^r \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma_1 r - 1} e^{\frac{\sigma x |\zeta|}{t}} dx \right] \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt \right\} d\varphi \leq \\ &\leq \int_{|\zeta|}^{\infty} \left[1 + \sigma \int_0^r \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma_1 r} e^{\frac{\sigma x |\zeta|}{t}} dx \right] \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt \leq \\ &\leq \int_{|\zeta|}^{\infty} \left\{ 1 + \sigma \int_0^{\infty} e^{-(\sigma_1 - \sigma)x} dx \right\} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma} \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt. \quad (1.20) \end{aligned}$$

Во-вторых заметив, что

$$|J_2^*(re^{i\varphi}; \zeta)| \leq \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|} \int_0^r \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)x}}{\left|1 - \frac{xe^{i\varphi}}{\zeta}\right|} dx = \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|} \int_{|\zeta|}^r \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)x}}{\left|1 - \frac{xe^{i\varphi}}{\zeta}\right|} dx,$$

где $\gamma = \varphi - \arg \zeta$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |J_2^*(re^{i\varphi}; \zeta)| d\varphi &\leq \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|} \int_0^r e^{-(\sigma_1-\sigma)x} dx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left|1 - \frac{xe^{i\varphi}}{\zeta}\right|} \leq \\ &\leq \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|} \int_0^r \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)x}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{|\zeta|^2}}} dx \leq \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|} \cdot |\zeta| \int_0^{\infty} \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{|1-x^2|}} dx \equiv J_4 \cdot \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_4 &= |\zeta| \int_0^{\infty} \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{|1-x^2|}} dx \leq |\zeta| \int_0^{\infty} \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{|1-x|}} dx = \\ &= |\zeta| \int_0^1 \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{1-x}} dx + |\zeta| \int_1^{\infty} \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{x-1}} dx = J_4' + J_4''. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Перейдем к оценке слагаемых J_4' и J_4'' .

$$\begin{aligned} J_4' &= |\zeta| \int_0^1 \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{1-x}} dx = 2|\zeta| \int_0^1 e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|(1-t)} dt \leq \\ &\leq 2|\zeta| \int_0^1 e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|(1-t)} dt = 2|\zeta| e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|} \int_0^1 e^{(\sigma_1-\sigma)|\zeta|t} dt = \frac{2(1 - e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|})}{\sigma_1 - \sigma}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Аналогично получим

$$J_4'' \leq \frac{2}{\sigma_1 - \sigma} e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|}. \quad (1.24)$$

Из (1.22), (1.23) и (1.24) придем к оценке

$$J_4 \leq J_4' + J_4'' \leq \frac{2}{\sigma_1 - \sigma}. \quad (1.25)$$

Наконец, из (1.21) и (1.25) следует

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |J_2^*(re^{i\varphi}; \zeta)| d\varphi \leq \frac{2}{\sigma_1 - \sigma} \cdot \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|},$$

откуда и из (1.20) придем к утверждению леммы.

Лемма 3. Для каждого сходящегося произведения $K_\sigma(z; z_k)$

$$\sup_{0 < r < +\infty} \{\Gamma(1 + \sigma_1 r) T_{\sigma, r}(r; K_\sigma(z; z_k))\} < +\infty. \quad (1.26)$$

Доказательство. Из определения функции

$$K_\sigma(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-Q_\sigma(z; z_k)} = \prod_{k=1}^{\infty} E_\sigma(z; z_k)$$

имеем

$$\begin{aligned} & \Gamma(1 + \sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log |K_\sigma(re^{i\varphi}; z_k)| = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \{\Gamma(1 + \sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log |E_\sigma(re^{i\varphi}; z_k)|\} = \sum_{k=1}^{\infty} D_{\sigma_1}(re^{i\varphi}; z_k). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\left| \Gamma(1 + \sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log |K_\sigma(re^{i\varphi}; z_k)| \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |D_{\sigma_1}(re^{i\varphi}; z_k)| \quad (0 < r < +\infty).$$

Отсюда на основании неравенства (1.18) леммы 2 следует

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \Gamma(1 + \sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log |K_\sigma(re^{i\varphi}; z_k)| \right| d\varphi \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_{\sigma_1}(re^{i\varphi}; z_k)| d\varphi \leq \frac{2 + \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|z_k|}}{|z_k|} < +\infty. \end{aligned}$$

Так как правая часть этого неравенства не зависит от r , то лемма доказана.

2. Класс U_σ и его представление

Обозначим через U_σ множество мероморфных на всей плоскости z функций, для которых при данном $\sigma > 0$

$$\sup_{0 < \rho < +\infty} \{\Gamma(1 + \sigma\rho) T_{\sigma, \rho}(\rho; F)\} < +\infty, \quad (2.1)$$

где $T_{\sigma, \rho}(\rho; F)$ — значение α -характеристической функции $T_\alpha(\rho; F)$ при $\alpha = \sigma\rho$.

2.1. Пусть $\{a_\mu\}$ ($0 < |a_\mu| < +\infty$) и $\{b_\nu\}$ ($0 < |b_\nu| < +\infty$) — последовательности комплексных чисел, пронумерованных в порядке убывания их модулей.

Предположим, что выполняются условия

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|a_\mu|}}{|a_\mu|} < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|b_\nu|}}{|b_\nu|} < +\infty, \quad (2.2)$$

где σ ($0 < \sigma < +\infty$) — фиксированное число.

Полагая далее, что $\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция конечного изменения на $[0, 2\pi]$, образуем функцию

$$F(z) = Cz' \frac{K_{\sigma}(z; a_{\mu})}{K_{\sigma}(z; b_{\nu})} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2e^{\sigma z e^{-i\theta}} - 1) d\psi(\theta) \right\} \quad (2.3)$$

($|z| < +\infty$).

Нетрудно убедиться, что $F(z)$ — мероморфная на всей плоскости функция.

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 3. 1°. Если $F(z) \in U_{\sigma}$, то она допускает представление вида (2.3), где C — постоянная, $K_{\sigma}(z; \zeta)$ — сходящееся произведение.

2°. Каждая функция $F(z)$ вида (2.3) при любом $\sigma_1 > \sigma > 0$ принадлежит классу U_{σ_1} .

Доказательству теоремы предположим несколько лемм.

Лемма 4. Если $\psi(\theta)$ — вещественная функция конечного изменения на $[0, 2\pi]$, то целая функция

$$f(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2e^{\sigma z e^{-i\theta}} - 1) d\psi(\theta) \right\} \quad (\sigma > 0)$$

принадлежит классу U_{σ} , при любом $\sigma_1 > \sigma > 0$.

Доказательство. Очевидно, что $f(z)$ — целая функция. Докажем теперь, что при любом $\sigma_1 > \sigma$ $f(z) \in U_{\sigma_1}$, т. е. докажем, что

$$\sup_{0 < r < +\infty} \left\{ \int_0^{2\pi} |\Gamma(1 + \sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log |f(re^{i\varphi})| | d\varphi \right\} < +\infty.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \Gamma(1 + \sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \left\{ \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} (2e^{\sigma r e^{i(\varphi-\theta)}} - 1) d\psi(\theta) \right\} = \\ & = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[\sigma_1 \int_0^r \left(1 - \frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r - 1} e^{\sigma t e^{i(\varphi-\theta)}} dt - 1 \right] d\psi(\theta), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & \Gamma(1 + \sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log |f(re^{i\varphi})| = \\ & = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sigma_1 \int_0^r \left(1 - \frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r - 1} e^{\sigma t e^{i(\varphi-\theta)}} dt - 1 \right] d\psi(\theta) \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sigma_1 \int_0^r \left(1 - \frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r - 1} e^{\sigma t \cos(\varphi-\theta)} dt + 1 \right] d\psi(\theta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

На основании неравенства

$$\left(1 - \frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r} \leq e^{-\sigma_1 t} \quad (0 \leq t \leq r)$$

оценим интеграл

$$\begin{aligned} \sigma_1 \int_0^r \left(1 - \frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r - 1} e^{\sigma_1 t \cos(\varphi - \theta)} dt &\leq \int_0^r \left(1 - \frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r - 1} e^{\sigma_1 t} dt = \\ &= 1 + \sigma \int_0^r \left(1 - \frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r} e^{\sigma_1 t} dt < 1 + \sigma \int_0^r e^{-(\sigma_1 - \sigma)t} dt < \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Согласно (2.4) и (2.5) окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Gamma(1 + \sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log |f(re^{i\varphi})|| d\varphi &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_1 \left[\int_0^r \left(1 - \frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r - 1} e^{\sigma_1 t \cos(\varphi - \theta)} dt \right] d\psi(\theta) \right| d\varphi + c_0 \leq \\ &\leq \frac{c_0 \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma} + c_0 < +\infty, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi(\theta).$$

Этим и завершается доказательство леммы, так как правая часть в (2.6) не зависит от r .

Лемма 5. *Справедливо следующее предельное соотношение:*

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma \rho}{n(n + \sigma \rho)} - \log \rho \right\} = \int_0^1 \frac{1 - e^{-\sigma x}}{x} dx - \int_1^{\rho} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx \equiv \kappa_0. \quad (2.7)$$

Доказательство. Заметив, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma \rho}{n(n + \sigma \rho)} = \int_0^1 \frac{1 - x^{\sigma \rho}}{1 - x} dx \quad \text{и} \quad \log \rho = \int_1^{\rho} \frac{dx}{x},$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma \rho}{n(n + \sigma \rho)} - \log \rho = \int_0^1 \frac{1 - x^{\sigma \rho}}{1 - x} dx - \int_1^{\rho} \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{1 - (1 - x)^{\sigma \rho}}{x} dx -$$

$$\begin{aligned}
 - \int_1^{\rho} \frac{dx}{x} &= \int_0^{1/\rho} \frac{1 - (1-x)^{\sigma\rho}}{x} dx + \int_{1/\rho}^1 \frac{1 - (1-x)^{\sigma\rho}}{x} dx - \int_1^{\rho} \frac{dx}{x} = \\
 &= \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx + \int_1^{\rho} \frac{1 - \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} - 1}{x} dx = \\
 &= \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx - \int_1^{\rho} \frac{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx.
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что под знаками последних двух интегралов допустим предельный переход.

Таким образом, приходим к соотношению (2.7).

Лемма 6. Справедлива следующая предельная формула

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow +\infty} w_{\sigma\rho}^{(\rho)}(z; \zeta) &= \int_{|z|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma t}}{t} dt - \\
 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma z)^n}{n!} \left\{ \zeta^{-n} \int_0^{|z|} e^{-\sigma t} t^{n-1} dt - \bar{\zeta}^n \int_{|z|}^{\infty} e^{-\sigma t} t^{-n-1} dt \right\} &\equiv Q_{\sigma}(z; \zeta), \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

где $w_{\sigma\rho}^{(\rho)}(z; \zeta)$ определяется по формуле (2) при $a = \sigma\rho$:

$$\begin{aligned}
 w_{\sigma\rho}^{(\rho)}(z; \zeta) &= \int_{|z|}^{\rho} \frac{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx - \\
 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \sigma\rho + n)}{\Gamma(1 + \sigma\rho) \Gamma(1 + n)} \left(\frac{z}{\rho}\right)^n \left\{ \zeta^{-n} \int_0^{|z|} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} X^{n-1} dx - \right. \\
 \left. - \bar{\zeta}^n \int_{|z|}^{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} X^{n-1} dx \right\} \quad (|z| \leq r < \rho). \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Предельное соотношение

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{|z|}^{\rho} \frac{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx = \int_{|z|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx \quad (2.10)$$

устанавливается без труда.

Далее, пользуясь формулой Стирлинга

$$\Gamma(1+x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

без труда приходим к следующим предельным соотношениям:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\rho^{-n} \Gamma(1 + \sigma\rho + n)}{\Gamma(1 + \sigma\rho)} \left[\zeta^{-n} \int_0^{|\zeta|} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} x^{n-1} dx + \right. \right.$$

$$\left. \left. \bar{\zeta}^n \int_{|\zeta|}^{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} x^{n-1} dx \right] \right\} = \sigma^n \left\{ \zeta^{-n} \int_0^{|\zeta|} e^{-\sigma x} x^{n-1} dx - \bar{\zeta}^n \int_{|\zeta|}^{\infty} e^{-\sigma x} x^{n-1} dx \right\}$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Поэтому для доказательства предельного соотношения (2.8) леммы достаточно убедиться в том, что в разложении (2.9) полученный предельный переход при $\rho \rightarrow +\infty$ допустим. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда (2.9) относительно параметра $0 < \rho < +\infty$.

Действительно, при $|z| \leq r$

$$\left| \frac{\Gamma(1 + \sigma\rho + n)}{\Gamma(1 + \sigma\rho) \Gamma(1 + n)} \left\{ \zeta^{-n} \int_0^{|\zeta|} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} x^{n-1} dx + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \bar{\zeta}^n \int_{|\zeta|}^{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} x^{n-1} dx \right\} \left(\frac{z}{\rho}\right)^n \right| \leq \frac{\Gamma(1 + \sigma\rho + n)}{\Gamma(1 + \sigma\rho) \Gamma(1 + n)} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \times$$

$$\times \left\{ |\zeta|^{-n} |\zeta|^{n-1} \int_0^{|\zeta|} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} dx + |\zeta|^n |\zeta|^{-n-1} \int_{|\zeta|}^{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} dx \right\} =$$

$$= \frac{\Gamma(1 + \sigma\rho + n)}{\Gamma(1 + \sigma\rho) \Gamma(1 + n)} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \frac{1}{|\zeta|} \int_0^{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} dx \leq$$

$$\leq \frac{(\sigma\rho + n)^{\sigma\rho + n + \frac{1}{2}} e^{-\sigma\rho - n}}{(\sigma\rho)^{\sigma\rho + \frac{1}{2}} e^{-\sigma\rho} (\sigma\rho)^n \Gamma(1 + n)} \cdot \frac{(\sigma r)^n}{\sigma |\zeta|} \leq c(\sigma; |\zeta|) \frac{(\sigma r)^n}{n!}.$$

Это значит, что наш ряд (2.9) мажорируется рядом $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma r)^n}{n!}$, который не зависит от ρ , и, тем самым, в нем почленный предельный переход допустим.

Лемма 7. Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|z_k|}}{|z_k|^2} < +\infty. \quad (2.11)$$

Тогда

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{|z_k| < r < +\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z; z_k)} = \\ = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-Q_{\sigma}(z; z_k)} \equiv K_{\sigma}(z; z_k) \quad (|z| < +\infty). \quad (2.1)$$

Доказательство. Заметим, что при условии (2.11) произведение $K_{\sigma}(z; z_k)$ сходится на всей плоскости z , за исключением последовательности точек $\{z_k\}_1^{\infty}$, и представляет целую функцию.

Предполагая, что $|z| \leq \rho < r_0 < r < +\infty$, обозначим

$$B_{\sigma r}^{(r, r)}(z; z_k) = \prod_{r_0 < |z_k| < r} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z; z_k)},$$

$$B_{\sigma r}^{(r)}(z; z_k) = \prod_{|z_k| < r < +\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z; z_k)}.$$

Тогда, очевидно, что

$$B_{\sigma r}^{(r)}(z; z_k) = B_{\sigma r}^{(r, r)}(z; z_k) \cdot \prod_{|z_k| < r_0} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z; z_k)}.$$

Но согласно лемме 6

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} w_{\sigma r}^{(r)}(z; z_k) = Q_{\sigma}(z; z_k) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

и поэтому

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{|z_k| < r_0} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z; z_k)} = \prod_{|z_k| < r_0} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-Q_{\sigma}(z; z_k)} \quad (2.13) \\ (|z| < +\infty).$$

Запишем формулу (3.10), установленную в работе [1] (стр. 624) для значения $a = \sigma r$:

$$A_{\sigma r}^{(r)}(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z; \zeta)} = e^{-\omega_{\sigma r}^{(r)}(z; \zeta)} \quad (|z| < |\zeta| \leq r),$$

где

$$\omega_{\sigma r}^{(r)}(z; \zeta) = \int_{|x|}^{\zeta} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{zx}{\zeta r}\right)^{1+\sigma r}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{z\bar{x}}{\zeta r}\right)^{1+\sigma r}} - 1 \right\} \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} dx$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
|\omega_{\sigma r}^{(\sigma)}(z; \zeta)| &\leq \int_{|\zeta|}^r \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} \cdot \frac{dx}{\left(1 - \left|\frac{z}{\zeta}\right| \cdot \frac{x}{r}\right)^{1+\sigma r}} + \\
&+ \int_{|\zeta|}^r \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} \cdot \frac{dx}{\left(1 - \frac{|z| |\zeta|}{rx}\right)^{1+\sigma r}} + \\
&+ \int_{|\zeta|}^r \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} dx \equiv A_1 + A_2 + A_3. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (2.14), полагая, что $|z| \leq \rho < r_0 < |\zeta| \leq r$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{|\zeta|}^r \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} \cdot \frac{dx}{\left(1 - \left|\frac{z}{\zeta}\right| \frac{x}{r}\right)^{1+\sigma r}} \leq \\
&\leq \frac{1}{|\zeta| \left(1 - \left|\frac{z}{\zeta}\right|\right)} \int_{|\zeta|}^r \left(\frac{1 - \frac{x}{r}}{1 - \frac{|z|x}{|\zeta|r}}\right)^{\sigma r} dx \leq \\
&\leq \frac{1}{|\zeta| \left(1 - \left|\frac{z}{\zeta}\right|\right)} \int_{|\zeta|}^r \left[1 - \frac{x}{r} \left(1 - \frac{|z|}{|\zeta|}\right)\right]^{\sigma r} dx.
\end{aligned}$$

На основании неравенства

$$(1-x) \leq e^{-x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

получим оценку для A_1

$$\begin{aligned}
A_1 &\leq \frac{1}{|\zeta| \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)} \int_{|\zeta|}^r e^{-\sigma x \left(1 - \frac{|z|}{|\zeta|}\right)} dx \leq \frac{1}{|\zeta| \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)} \int_{|\zeta|}^{\infty} e^{-\sigma x \left(1 - \frac{|z|}{|\zeta|}\right)} dx = \\
&= \frac{1}{\sigma |\zeta| \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)} \cdot \frac{e^{-\sigma |\zeta| + \sigma |z|}}{\left(1 - \frac{|z|}{|\zeta|}\right)} \leq \frac{e^{\sigma \rho}}{\sigma \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)^2} \cdot \frac{e^{-\sigma |\zeta|}}{|\zeta|}. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Далее, так как

$$A_2 = \int_{|\zeta|}^r \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} \cdot \frac{dx}{\left(1 - \frac{|\zeta|}{rx}\right)^{1+\sigma r}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{|\zeta| \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)^{1+\sigma r}} \int_{|\zeta|}^r \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r} dx,$$

то, в силу неравенства

$$\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^{\sigma r} > \frac{1}{2} e^{-\sigma \rho} \quad (r \geq r_1),$$

будем иметь

$$A_2 \ll \frac{2e^{\sigma r}}{|\zeta| \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)} \cdot \frac{\left(1 - \frac{|\zeta|}{r}\right)^{\sigma r}}{\sigma} \ll \frac{2e^{\sigma \rho}}{\sigma \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)} \cdot \frac{e^{-\sigma |\zeta|}}{|\zeta|} \quad (r \geq r_1). \quad (2.16)$$

Наконец, очевидно, что

$$A_3 = \int_{|\zeta|}^r \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} dx \ll \int_{|\zeta|}^r \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx \ll \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx \ll \frac{e^{-\sigma |\zeta|}}{\sigma |\zeta|}. \quad (2.17)$$

Из оценок (2.14), (2.15), (2.16) и (2.17) окончательно получим

$$|\omega_{\sigma r}^{(r)}(z; \zeta)| \ll \frac{e^{-\sigma |\zeta|}}{\sigma |\zeta|} \left\{ 1 + \frac{e^{\sigma \rho}}{\left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)^2} + \frac{2e^{\sigma \rho}}{\left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)} \right\} \equiv$$

$$\equiv \kappa(\rho; r_0) \frac{e^{-\sigma |\zeta|}}{|\zeta|} \quad (r \geq r_1). \quad (2.18)$$

Так как правая часть в (2.18) не зависит от r , то, ввиду сходимости рядов (2.11) и (2.13), существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} B_{\sigma r}^{(r)}(z; z_k) = \prod_{r_0 < |z_k| < +\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-Q_{\sigma}(z; z_k)}. \quad (2.19)$$

И, наконец, из (2.13') и (2.19) вытекает предельное соотношение (2.12) леммы.

Лемма 8. Если функция $F(z)$ принадлежит классу U_0 и если $\{a_n\}_1^{\infty}$ и $\{b_n\}_1^{\infty}$ — соответственно последовательности ее нулей и полюсов, отличных от $z = 0$, то

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|a_{\mu}|}}{|a_{\mu}|} < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|b_{\nu}|}}{|b_{\nu}|} < +\infty.$$

Доказательство. Так как $F(z) \in U_{\sigma}$, то

$$\sup_{0 < r < +\infty} \{\Gamma(1 + \sigma r)[m_{\sigma r}(r; \sigma) + N_{\sigma r}(r; \infty)]\} = T_{\sigma}(F) < +\infty.$$

по определению (3)

$$(1 + \sigma r) N_{\sigma r}(r; \infty) = \sum_{0 < |b_{\nu}| < r} \int_{|b_{\nu}|}^r \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} dx + n(0; \infty) \{\log r - K_{\sigma r}\}. \quad (2.20)$$

по лемме 5 второе слагаемое в правой части (2.20) имеет предел γ_0' , первое слагаемое монотонно возрастает вместе с r и ограничено сверху. Следовательно существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{0 < |b_{\nu}| < r} \int_{|b_{\nu}|}^r \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} dx \right\} < +\infty. \quad (2.21)$$

Тогда для фиксированного $r_0 > 0$ можно записать цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{0 < |b_{\nu}| < r_0} \int_{|b_{\nu}|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{0 < |b_{\nu}| < r_0} \int_{|b_{\nu}|}^r \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} dx < \\ < \lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{0 < |b_{\nu}| < r} \int_{|b_{\nu}|}^r \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} dx < +\infty, \end{aligned}$$

откуда, ввиду произвольности r_0 , вытекает сходимость ряда

$$\sum_{0 < |b_{\nu}| < +\infty} \int_{|b_{\nu}|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx < +\infty,$$

что эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{0 < |b_{\nu}| < +\infty} \frac{e^{-\sigma|b_{\nu}|}}{|b_{\nu}|} < +\infty.$$

Аналогично доказывается сходимость ряда

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|a_{\mu}|}}{|a_{\mu}|} < +\infty,$$

ввиду того, что

$$T_{\sigma r}(r; F) = m_{\sigma r}(r; 0) + N_{\sigma r}(r; 0) + \log |c_\lambda|.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.

1°. Пусть функция $F(z)$ мероморфна на всей плоскости и $F(z) \in U_\alpha$. Напишем для нее формулу (1) введения, справедливую для произвольной мероморфной в круге $|z| < \rho$ функции, и при любом α ($-1 < \alpha < +\infty$)

$$F(z) = e^{i \arg c_\lambda} e^{\lambda \left[\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n(n+\alpha)} - \log \rho \right]} z^\lambda \frac{B_\alpha^{(\rho)}(z; a_\mu)}{B_\alpha^{(\rho)}(z; b_\nu)} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{\left(1 - \frac{z}{\rho} e^{-i\theta}\right)^{1+\alpha}} - 1 \right] \Gamma(1+\alpha) \rho^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |F(\rho e^{i\theta})| d\theta \right\}. \quad (2.22)$$

Из условия $F(z) \in U_\alpha$ следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \Gamma(1+\alpha\rho) \rho^{-\alpha\rho} D^{-\alpha\rho} \log |F(\rho e^{i\theta})| \right| d\theta = m_{\sigma\rho}(\rho; F) + m_{\sigma\rho}\left(\rho; \frac{1}{F}\right) \leq \\ \leq 2T_\sigma(F) < +\infty \quad (0 < \rho < +\infty).$$

Обозначим через

$$\Psi_\rho(\theta) = \int_0^\theta \Gamma(1+\alpha\rho) \rho^{-\alpha\rho} D^{-\alpha\rho} \log |F(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \quad (0 < \rho < +\infty),$$

получим семейство функций $\{\Psi_\rho(\theta)\}$, полное изменение которых ограничено

$$\left| \Psi_\rho(\theta) \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \Gamma(1+\alpha\rho) \rho^{-\alpha\rho} D^{-\alpha\rho} \log |F(\rho e^{i\theta})| \right| d\theta \leq 2T_\sigma(F) < +\infty \\ V(\Psi_\rho(\theta)) \Big|_0^{2\pi}$$

По первой теореме Хелли существует функция $\psi(\theta)$ с конечным изменением на $[0, 2\pi]$ и такая последовательность

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots \rightarrow \infty,$$

что для любого $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\psi(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\rho_n}(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\theta \Gamma(1+\alpha\rho_n) \rho_n^{-\alpha\rho_n} D^{-\alpha\rho_n} \log |F(\rho_n e^{i\theta})| d\theta.$$

В формуле (2.22) зафиксируем z , а вместо ρ возьмем ρ_n и положим $\alpha = \alpha\rho_n$. Имея в виду леммы 7 и 5 и пользуясь второй теоремой Хелли, перейдем к пределу в (2.22) при $n \rightarrow \infty$. В результате мы получим

$$F(z) = e^{i \arg c_k + z_0} z^{\lambda} \frac{K_2(z; a_n)}{K_2(z; b_n)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2e^{-z} e^{-i\psi} - 1) d\psi (b) \right\}.$$

2. Для доказательства второй части теоремы покажем, что для любой функции $F(z)$ вида (2.3)

$$T_{\sigma_1}(F) = \sup_{0 < r < +\infty} |\Gamma(1 + \sigma_1 r) T_{\sigma_1, r}(r; F)| < +\infty.$$

Трудно убедиться, что если $f(z) \in U_{\sigma_1}$ и $g(z) \in U_{\sigma_2}$, то $f(z) \cdot g(z) \in U_{\sigma}$, $f(z)/g(z) \in U_{\sigma}$.

Проверим, что $z^{\lambda} \in U_{\sigma_1}$ для любого $\sigma_1 > 0$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < r < +\infty} |\Gamma(1 + \sigma_1 r) T_{\sigma_1, r}(r; z^{\lambda})| = \\ & = \sup_{0 < r < +\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma(1 + \sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D_{(+) }^{-\sigma_1 r} \log |re^{i\psi}|^{\lambda} d\psi \right\} < +\infty, \\ \Gamma(1 + \sigma_1 r) T_{\sigma_1, r}(r; z^{\lambda}) & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\Gamma(1 + \sigma_1 r)}{\Gamma(\sigma_1 r)} r^{-\sigma_1 r} \int_0^r (r-t)^{\sigma_1 r - 1} \log t^{\lambda} dt \right|^+ d\psi \leq \\ & \leq \lambda \sigma_1 r^{1 - \sigma_1 r} \int_0^r (r-t)^{\sigma_1 r - 1} |\log t| dt \leq \lambda \sigma_1 r^{1 - \sigma_1 r} \int_0^r (r-t)^{\sigma_1 r - 1} t dt = \\ & = \lambda r^{-\sigma_1 r} \int_0^r (r-t)^{\sigma_1 r} dt = \frac{\lambda r}{\sigma_1 r + 1} \leq \frac{\lambda}{\sigma_1} < +\infty. \end{aligned}$$

На основании вышесказанного и лемм 3 и 4 заключаем, что $(z) \in U_{\sigma_1}$ при любом $\sigma_1 > \sigma$.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 14. VII.1969

Մ. ՔԱԿԱԼՅԱՆ. Հարթության մեջ մերոմորֆ ֆունկցիաների մի դասի ներկայացման մասին
(ամփոփում)

Մ. Մ. Ջրբաշյանի (1) մոնոգրաֆիայում կառուցված և ուսումնասիրված է միավոր անում մերոմորֆ ֆունկցիաների N_{σ} ($-1 < \sigma < +\infty$) դասերը և ստացված է այդ դասերի արամեարական ներկայացումը:

Ներկա աշխատանքում կառուցված է ամբողջ հարթության մեջ մերոմորֆ ֆունկցիաների U_{σ} ($0 < \sigma < +\infty$) դաս և այդ դասի համար ստացված է ֆակտորիզացման թեորեմ: Պատճառահանգում է որպես հարթության մեջ մերոմորֆ այն բոլոր $F(z)$ ֆունկցիաների բազմությունը որոնց համար

$$\sup_{0 < \rho < +\infty} |\Gamma(1 + \sigma \rho) T_{\sigma \rho}(\rho; F)| < +\infty,$$

և այդ $T_{\sigma \rho}(\rho; F)$ -ը Մ. Մ. Ջրբաշյանի $T_{\sigma}(\rho; F)$ խաբակտերիստիկ ֆունկցիայի արժեքն է պարամետրի $\sigma \rho$ արժեքի համար:

Դասի համար ֆակտորիզացման թեորեմը ստացվում է N_σ դասի (1) ներկայացման մեջ սահմանային անզման միջոցով:

A. M. BADALIAN. *On the representation of a class of functions meromorphic on the whole plane* (summary)

In the present paper the classes U_σ ($0 < \sigma < \infty$) of meromorphic on the whole plane function are introduced and a theorem on their factorisation is proved.

The class U_σ ($0 < \sigma < \infty$) is defined as the set of all meromorphic on the whole plane function for which

$$\sup_{0 < \rho < \infty} \{I'(1 + \sigma\rho) T_{\sigma\rho}(\rho; F)\} < \infty$$

where $T_{\sigma\rho}(\rho; F)$ is the value of M. M. Džrbašians α -characteristic function $T_\alpha(\rho; F)$ at $\alpha = \sigma\rho$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, гл. IX, М., „Наука“, 1966.