ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 6, 1969 Математика

В. С. АБРАМОВИЧ

# О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ КЛАССАХ МЕРОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Обобщая характеристику Р. Неванлинны, М. М. Джрбашян [1] ввел следующую $\alpha$-характеристику $T_\alpha(r; F)$ мероморфной функции $F(z)$ $(-1<\alpha<\infty)$

$$T_\alpha(r; F)=\frac{r^{-\alpha}}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha}\ln|F(re^{i\theta})|\,d\theta+$$

$$+\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^r\frac{(r-t)^\alpha}{t}\,[n(t;\infty)-n(0;\infty)]\,dt+\frac{n(0;\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}\times$$

$$\times\left[\ln r-\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}\right]\ (0<r<1). \tag{0.1}$$

Здесь

$$D_{(+)}^{-\alpha}\ln|F(re^{i\theta})|=\max\{D^{-\alpha}\ln|F(re^{i\theta})|,\ 0\},$$

причем $D^{-\alpha}$ — оператор интегрирования (при $0<\alpha<\infty$) или дифференцирования (при $-1<\alpha<0$) в смысле Римана-Лиувилля с началом в нулевой точке*; $n(t;\infty)$ — число полюсов функции $F(z)$, лежащих в круге $|z|\leqslant t$ $(0<t<1)$ и $n(0;\infty)$ — кратность полюса в точке $z=0$.

При $\alpha=0$ естественно принять $D^{-\alpha}f(t)\equiv f(t)$; при этом $\alpha$-характеристика переходит в неванлинновскую функцию $T(r;F)$.

В связи с $\alpha$-характеристикой М. М. Джрбашяном были введены и изучены классы мероморфных функций $N_\alpha$ $(-1<\alpha<\infty)$:

$$F(z)\in N_\alpha,\ \text{если}\ T_\alpha(F)=\sup_{0<r<1}\{T_\alpha(r;F)\}<+\infty. \tag{0.2}$$

При $\alpha=0$ класс $N_\alpha$ совпадает с известным классом $N$ мероморфных функций с ограниченной характеристикой Р. Неванлинны [2].

В [1] показывается, что $\{N_\alpha\}$ $(-1<\alpha<\infty)$ представляет собой семейство вложенных классов, т. е. $N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}$, если $\alpha_1<\alpha_2$. Кроме того, установлены следующие важные теоремы.

Теорема А. Класс $N_\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$ совпадает с множеством функций, которые в $|z|<1$ допускают представление вида

* [1], стр. 567.

$$F(z)=z^{\lambda}\,\frac{B_\alpha(z;a_\mu)}{B_\alpha(z;b_\nu)}\exp\left\{i\gamma+\lambda\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_\alpha(e^{-i\theta}z)\,d\psi(\theta)\right\}. \tag{0.3}$$

Здесь

$$S_\alpha(e^{-i\theta}z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{1+\alpha}}-1\right\}, \tag{0.4}$$

$B_\alpha(z;a_\mu)$, $B_\alpha(z;b_\nu)$ — сходящиеся произведения, построенные М. М. Джрбашяном*, с нулями, отличными от $z=0$, соответственно в точках $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$, пронумерованных в порядке неубывания модулей (каждый нуль или полюс повторяется в соответствующей последовательности столько раз, какова его кратность); $\psi(\theta)$ — вещественная на $[-\pi,\pi]$ функция с конечным полным изменением, $\lambda$ — любое целое, а $\gamma$ — любое вещественное число.

Теорема В. Если $F(z)\in N_\alpha$ $(0\leqslant\alpha<\infty)$ и, следовательно, имеет место представление (0.3), то почти всюду на единичной окружности $\zeta=e^{i\theta}$ $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ существует предел

$$\lim_{r\to 1-0} D^{-\alpha}\ln|F(re^{i\theta})|=\psi'(\theta)\in L(-\pi,\pi). \tag{0.5}$$

В доказательстве теоремы $B$ существенно используется следующее граничное свойство сходящегося произведения $B_\alpha(z;z_k)$: если $\alpha\in[0,+\infty)$, то почти для всех $\varphi\in[-\pi,\pi]$**

$$\lim_{r\to 1-0} D^{-\alpha}\ln|B_\alpha(re^{i\varphi};z_k)|=0. \tag{0.6}$$

Отметим еще, что произведения $B_\alpha(z;a_\mu)$ и $B_\alpha(z;b_\nu)$ сходятся, притом равномерно и абсолютно, тогда и только тогда, когда их нули удовлетворяют соответственно условиям

$$\sum_\mu(1-|a_\mu|)^{1+\alpha}<+\infty,\ \sum_\nu(1-|b_\nu|)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{0.7}$$

так что, если функция $F(z)$ принадлежит классу $N_\alpha$, то, как это следует из теоремы А, для ее нулей и полюсов выполнены условия (0.7).

Пусть теперь обратно, нули и полюсы $F(z)$ подчинены условиям (0,7). При этом будем говорить, что $F(z)$ принадлежит *классу* $\mathbf{A}_\alpha$. Для изучения строения класса $\mathbf{A}_\alpha$ с точки зрения параметрического представления входящих в него функций введем в рассмотрение следующую функцию:

$$k_\alpha(z;\ln F)=\ln\left\{z^{-\lambda}\,\frac{B_\alpha(z;b_\nu)}{B_\alpha(z;a_\mu)}F(z)\right\},\ |z|<1, \tag{0.8}$$

которую назовем *аналитическим ядром логарифма* $F(z)$ *порядка* $\alpha$.

---

* [1], стр. 622.

** В. С. Захаряном [9] это свойство распространено на случай $\alpha\in(-1,0)$.

Из (0.8) имеем представление

$$F(z)=z^{\lambda}\,\frac{B_\alpha(z;\,a_\mu)}{B_\alpha(z;\,b_\nu)}\,e^{k_\alpha(z;\,\ln F)},\tag{0.9}$$

причем из параметрического представления (0.3) класса $N_\alpha$ следует, что

$$z^{\lambda}\,\frac{B_\alpha(z;\,a_\mu)}{B_\alpha(z;\,b_\nu)}\in N_\alpha.\tag{0.10}$$

Кроме того, из (0.3) легко усмотреть, что если $f(z)\in N_\alpha$ и $g(z)\in N_\alpha$, то имеем также

$$f(z)\,g(z)\in N_\alpha,\ \frac{f(z)}{g(z)}\in N_\alpha.\tag{0.11}$$

Из (0.9)—(0.11) следует, что для того чтобы $F(z)\in N_\alpha$, необходимо и достаточно условие

$$\exp k_\alpha(z;\,\ln F)\in N_\alpha.\tag{0.12}$$

В свою очередь, согласно (0.1) и (0.2), это означает, что

$$T_\alpha(\exp k_\alpha)=\sup_{0<r<1}\left\{\frac{r^{-\alpha}}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D^{-\alpha}_{(+)}\,\mathrm{Re}\,k_\alpha(re^{i\theta};\,\ln F)\,d\theta\right\}<+\infty.\tag{0.13}$$

Таким образом, аналитическое ядро логарифма $F(z)$, удовлетворяющее условию (0.13), по теореме A может быть представлено в виде

$$k_\alpha(z;\,\ln F)=i\gamma+\lambda\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}+\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{1+\alpha}}-1\right\}\times$$

$$\times\,d\psi(\theta),\ |z|<1,\tag{0.14}$$

где $\psi(\theta)$ — вещественная функция на $[-\pi,\pi]$ с конечным полным изменением, $\lambda$ — некоторое целое, а $\gamma$ — некоторое вещественное число.

Пусть

$$k_\alpha(z;\,\ln F)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k\quad(|z|<1).\tag{0.15}$$

Обозначим

$$\|k_\alpha\|_r=\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|\,r^k.\tag{0.16}$$

Если $F(z)\in N_\alpha$, то, как это видно из представления (0.14), функции $k_\alpha(z;\,\ln F)$, существует такое число $B>0$, что

$$\|k_\alpha\|_r<\frac{B}{(1-r)^{1+\alpha}}\quad(r<1),\tag{0.17}$$

т. е. в этом случае $\|k_\alpha\|_r$, рассматриваемая как функция от $r$, имеет не более чем степенной рост. Между тем, можно показать, что какова бы ни была монотонно возрастающая положительная функция $h(r)$, растущая как угодно быстро при $z \to 1-0$, существует мероморфная функция $F(z) \in \mathbf{A}_*$, для которой аналитическое ядро логарифма $F(z)$ удовлетворяет условию

$$\|k_\alpha\|_r > h(r), \quad r_0 < r < 1. \tag{0.18}$$

В самом деле, существует, очевидно, такая монотонно возрастающая числовая последовательность $\{\lambda_n\}_2^\infty$, $\lambda_n > n$, что

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\lambda_n} > h\left(\frac{n}{n+1}\right). \tag{0.19}$$

Рассмотрим мероморфную функцию с аналитическим ядром логарифма, заданным лакунарным рядом

$$k_\alpha(z; \ln F) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\, z\right)^{\lambda_n}, \quad |z|<1.$$

Пусть $r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Тогда для некоторого $k \geqslant 2$, $\frac{k-1}{k} < r \leqslant \frac{k}{k+1}$, и, согласно (0.19),

$$\|k_\alpha\|_r = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\, r\right)^{\lambda_n} > \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{k-1}{k}\right)^{\lambda_n} > \left(\frac{k+1}{k-1}\cdot\frac{k-1}{k}\right)^{\lambda_n} >$$

$$> h\left(\frac{k}{k+1}\right) \geqslant h(r), \quad \frac{1}{2} \leqslant r < 1.$$

Пусть теперь задана некоторая возрастающая положительная функция $h(r)$. В связи со сказанным выше возникает вопрос, существует ли такой оператор $G$, с помощью которого аналитические ядра, имеющие рост $O(h(r))$, могли бы быть представлены в виде

$$k_\alpha(z; \ln F) = C + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G^{-1}\left\{\frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{1+\alpha}} - 1\right\} d\psi(\theta) \quad (|z|<1) \tag{0.20}$$

(где по-прежнему $\psi(\theta)$ — вещественная функция на $[-\pi, \pi]$ конечной вариации, $C$ — некоторая константа), так что соответствующий класс $N_{\alpha, G}$, ассоциированный с оператором $G$, имел бы параметрическое представление вида

$$F(z) = z^\lambda\, \frac{B_\alpha(z; a_\mu)}{B_\alpha(z; b_\nu)} \exp\left\{C + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G^{-1}\left\{\frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{1+\alpha}} - 1\right\} d\psi(\theta)\right\} \tag{0.21}$$

и характеризовался бы, с другой стороны, также ограниченностью некоторой обобщенной характеристики $T_{\alpha, G}(r; F)$?

Положительному решению этого вопроса посвящена настоящая статья*. Кроме того, оператор $G$ будет построен таким образом, что

* Как стало известно автору применением обобщенных операторов типа Римана-Лиувилля [7] М. М. Джрбашяном построена полная теория параметризации мероморфных в круге функций произвольно большого роста и с произвольным распределением их нулей и полюсов.

для класса $N_{\alpha, Q}$ $(-1<\alpha<\infty)$ будет справедлив также аналог теоремы B; более того, аналог свойства (0.6) сходящегося произведения $B_\alpha(z; z_k)$ будет иметь место в усиленной формулировке, а именно: *всюду* на единичной окружности $\zeta=e^{i\varphi}$ при $\alpha\in(-1, +\infty)$

$$\lim_{r\to 1-0} D^{-\alpha}\operatorname{Re} G\ln B_\alpha(re^{i\varphi}; z_k)=0, \quad -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi. \tag{0.22}$$

Будет доказана также теорема о представлении общего класса $\mathbf{A}_\alpha(-1<$ $<\alpha<\infty)$.

## § 1. Некоторые специальные классы функций и операторы

Рассмотрим некоторый класс комплексных функций вещественного переменного, который назовем классом $\mathfrak{M}_R$.

Определение. Функция $\varphi(r)\in\mathfrak{M}_R$ в том и только в том случае, если существует конечная или счетная монотонно возрастающая последовательность чисел, зависящая от $\varphi(r)$,

$$\{r_n\}_\varphi\subset[0, R], \ r_0=0, \ r_n\uparrow R \quad (n\to\infty) \tag{1.1}$$

такая, что в каждом интервале $(r_n, r_{n+1})$ $(n=0, 1,\cdots)$ имеет место разложение с комплексными коэффициентами

$$\varphi(r)=A_n\ln r+\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k,n} r^k, \ r_n<r<r_{n+1}, \ n=0, 1,\cdots. \tag{1.2}$$

Отметим, что если $\varphi_1(r)\in\mathfrak{M}_R$ и $\varphi_2(r)\in\mathfrak{M}_R$, то и

$$\varphi_1(r)+\varphi_2(r)\in\mathfrak{M}_R, \tag{1.3}$$

причем

$$\{r_n\}_{\varphi_1+\varphi_2}=\{r_n\}_{\varphi_1}\cup\{r_n\}_{\varphi_2} \tag{1.4}$$

(предполагается при этом, что последовательность $\{r_n\}_{\varphi_1+\varphi_2}$ расположена в порядке возрастания радиусов).

Пусть теперь задана некоторая последовательность *отличных от* 0 комплексных чисел

$$\varkappa=\{\varkappa_k\}_0^\infty, \tag{1.5}$$

удовлетворяющих условию

$$\lim_{k\to\infty}|\varkappa_k|^{\frac{1}{k}}=1, \tag{1.6}$$

причем $\varkappa_0$ будем предполагать *вещественным*.

Введем в рассмотрение ассоциированный с этой последовательностью оператор $\mathbf{G}_\varkappa$ $(\mathfrak{M}_R\to\mathfrak{M}_R)$, который функции $\varphi(r)$ (1.2) ставит в соответствие функцию из $\mathfrak{M}_R$, имеющую следующие разложения в интервалах $(r_n, r_{n+1})$, $n=0, 1,\cdots$:

$$\mathrm{G}_{\varkappa}\,\varphi(r)=\varkappa_0\,(A_n\ln r+a_{0,n})+\sum_{k=1}^{\infty}a_{k,n}\,\varkappa_k\,r^k+\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k,n}\,\bar{\varkappa}_k\,r^{-k}\;(r_n<r<r_{n+1}),\tag{1.7}$$

так что $\{r_n\}_{\varphi}=\{r_n\}_{G_{\varkappa}\varphi}$.

Введенный оператор $\mathrm{G}_{\varkappa}$, очевидно, аддитивен и однороден.

Числа $\varkappa_k$ будем называть *коэффициентами оператора* $\mathrm{G}_{\varkappa}$.

Условимся также в следующих обозначениях. Если дана последовательность (1.5), то через $\frac{1}{\varkappa}$ будем обозначать последовательность $\left\{\frac{1}{\varkappa_k}\right\}_0^{\infty}$; если имеем две последовательности $\varkappa_1=\{\varkappa_k^{(1)}\}_0^{\infty}$ и $\varkappa_2=\{\varkappa_k^{(2)}\}_0^{\infty}$, то через $\varkappa_1\varkappa_2$ будем обозначать последовательность $\{\varkappa_k^{(1)}\,\varkappa_k^{(2)}\}_0^{\infty}$; наконец, через 1 будем обозначать стационарную последовательность $\{1, 1,\cdots \cdots 1,\cdots\}$, с которой ассоциируется тождественный оператор $\mathrm{G}_1=\mathrm{I}$.

Отметим, что непосредственно из определения (1.7) вытекает следующее групповое свойство. Если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$—суть последовательности коэффициентов операторов $\mathrm{G}_{\varkappa_1}$ и $\mathrm{G}_{\varkappa_2}$, то

$$\mathrm{G}_{\varkappa_1}\mathrm{G}_{\varkappa_2}=\mathrm{G}_{\varkappa_2}\mathrm{G}_{\varkappa_1}=\mathrm{G}_{\varkappa_1\varkappa_2},\tag{1.8}$$

и, в частности,

$$\mathrm{G}_{\varkappa}\,\mathrm{G}_{\frac{1}{\varkappa}}=\mathrm{G}_1.\tag{1.9}$$

Рассмотрим, далее, оператор

$$\mathrm{G}_{\varkappa,\alpha}=D^{-\alpha}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{G}_{\varkappa}\qquad(-1<\alpha<+\infty),\tag{1.10}$$

где $D^{-\alpha}$ — упомянутый выше оператор интегрирования $(0<\alpha<\infty)$ или дифференцирования $(-1<\alpha<0)$ в смысле Римана-Лиувилля. При этом потребуем дополнительно абсолютной сходимости ряда, составленного из коэффициентов оператора $\mathrm{G}_{\varkappa}$, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\varkappa_k|<\infty.\tag{1.11}$$

Если оператор $\mathrm{G}_{\varkappa,\alpha}$ применим к функции $\varphi(re^{i\theta})$ при каждом $\theta\in[-\pi,\pi]$, то наряду с записью $\mathrm{G}_{\varkappa,\alpha}\varphi(re^{i\theta})$, мы будем употреблять также запись $\mathrm{G}_{\varkappa,\alpha}\varphi(z)$.

Пусть $f(z)$—аналитическая в $|z|<R$ функция. Тогда, так как

$$D^{-\alpha}\left\{\frac{r^k}{\Gamma(1+k)}\right\}=\frac{r^{k+\alpha}}{\Gamma(1+k+\alpha)},\tag{1.12}$$

то, если обозначим

$$a=\left\{\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+\alpha+k)}\right\}_0^{\infty},\tag{1.13}$$

будем, очевидно, иметь

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}f(re^{i\varphi})=\mathrm{G}_a f(re^{i\varphi}),\; r<1,\; -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi\tag{1.14}$$

и, следовательно, согласно (1.8) и (1.10)

$$r^{-\alpha}\, G_{x,\alpha} f(z) = \operatorname{Re} G_{\alpha x} f(z) \quad (r=|z|<1). \tag{1.15}$$

Отметим еще важную формулу, которую мы часто будем использовать. Именно, согласно лемме 9.2 [1], для любого $\alpha$ $(-1<\alpha<\infty)$

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} \ln r = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left| \ln r - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+\alpha)} \right|. \tag{1.16}$$

Отсюда и из (1.7) следует, что

$$r^{-\alpha}\, G_{x,\alpha} \ln r = \frac{x_0}{\Gamma(1+\alpha)}\left[ \ln r - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+\alpha)} \right]. \tag{1.17}$$

## § 2. Формулы типа Йенсена-Неванлинны

а) Введем в рассмотрение следующую аналитическую в $|z|<1$ функцию:

$$S_{\alpha x}(z) \equiv G_{\frac{1}{\alpha x}}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{x_0} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k+\alpha)}{x_k\,\Gamma(1+k)}\, z^k \quad (|z|<1). \tag{2.1}$$

Заметим, что согласно (1.9) и (1.10)

$$r^{-\alpha}\, G_{x,\alpha} S_{\alpha x}(re^{i\varphi}) \equiv P(\varphi;\, r) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2} \quad (r<1,\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi). \tag{2.2}$$

Пользуясь биномиальным разложением, из (2.1) имеем также

$$S_{\alpha x}(z) = G_{\frac{1}{x}}\left(\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1\right). \tag{2.3}$$

Пусть $f(z)$ — аналитическая в круге $|z|<R$ функция и $\rho\in(0,\,R)$. Для функции $G_{\alpha x} f(z)$ также, очевидно, аналитической в $|z|<R$, запишем формулу Шварца. Имеем

$$G_{\alpha x} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+e^{-i\theta}\dfrac{z}{\rho}}{1-e^{-i\theta}\dfrac{z}{\rho}} \operatorname{Re} G_{\alpha x} f(\rho e^{i\theta})\, d\theta + i\,\frac{x_0}{\Gamma(1+\alpha)} \operatorname{Im} f(0), \quad |z|<\rho. \tag{2.4}$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор $G_{\frac{1}{\alpha x}}$. Тогда, в силу (1.9), (2.1) и (1.15), получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{\alpha x}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)\rho^{-\alpha}\, G_{x,\alpha} f(\rho e^{i\theta})\, d\theta + i\operatorname{Im} f(0), \quad |z|<\rho. \tag{2.5}$$

Полученное интегральное представление назовем *формулой типа Шварца.*

б) Для любых значений параметров $\rho$ $(0<\rho\leqslant 1)$, $\zeta$ $(0<|\zeta|\leqslant\rho)$ обозначим

$$u^{(\rho)}_{x,\alpha}(z;\,\zeta) = r^{-\alpha}\, G_{x,\alpha}\left\{\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) - W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\, \frac{\zeta}{\rho}\right)\right\} \quad (r=|z|<\rho,\ |z|\neq|\zeta|), \tag{2.6}$$

где

$$W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)=\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^k\int\limits_0^{|\zeta|/\rho}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\left(\frac{\overline{\zeta}}{\rho}\right)^k\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\}\left(\frac{z}{\rho}\right)^k\quad(|z|<\rho)\tag{2.7}$$

—аналитическая функция в круге $|z|<\rho$*.

Докажем следующие утверждения.

Лемма 1. 1°. *Функция* $u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)(-1<\alpha<\infty)$ *является гармонической в круге* $|z|<|\zeta|$ *и непрерывной всюду в замкнутом круге* $|z|\leqslant\rho$ *после соответствующего доопределения ее значений по окружности* $|z|=|\zeta|$, *причем всюду в* $|z|\leqslant\rho$ *при* $0<h\leqslant\frac{|\zeta|}{\rho}\leqslant1$, $-1<\alpha<\infty$ *имеет место неравенство*

$$|u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)h}\left(|\varkappa_0|+3\sum_{k=1}^{\infty}|\varkappa_k|\right)\left(1-\frac{|\zeta|}{\rho}\right)^{\alpha+1}.\tag{2.8}$$

2°. *Для любых* $\varphi,\gamma\in[-\pi,\pi]$ *справедливы тождества*

$$u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\rho e^{i\gamma})\equiv0,\quad|z|<\rho,\tag{2.9}$$

$$\lim_{r\to\rho-0}u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(re^{i\varphi};\zeta)\equiv0,\quad0<|\zeta|<\rho.\tag{2.10}$$

3°. *При условии* $0\leqslant\alpha<\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\varkappa_k|<\frac{|\varkappa_0|}{2}$ *функция* $u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)$ *является в кольце* $|\zeta|<|z|<\rho$ *субгармонической, если* $\varkappa_0>0$ *и супергармонической, если* $\varkappa_0<0$, *причем всюду в* $|z|\leqslant\rho$

$$u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)\leqslant0,\ \text{если}\ \varkappa_0>0,$$

$$u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)\geqslant0,\ \text{если}\ \varkappa_0<0.\tag{2.11}$$

Доказательство. 1°—2°. В соответствии с (1.7) имеем

$$G_\varkappa\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)=\begin{cases}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\varkappa_k}{k}\left(\dfrac{z}{\zeta}\right)^k, & |z|<|\zeta|\leqslant\rho,\\ \varkappa_0\ln\left(-\dfrac{z}{\zeta}\right)-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\overline{\varkappa}_k}{k}\left(\dfrac{\zeta}{z}\right)^k, & |z|>|\zeta|>0.\end{cases}\tag{2.12}$$

Обозначим

* Функция (2.7) введена М. М. Джрбашяном (см. [1], стр 598).

$$J_0(r;\zeta)=\begin{cases}0, & 0\leqslant r<|\zeta|\\ \ln\dfrac{r}{|\zeta|}, & |\zeta|<r\leqslant\rho\end{cases};\quad J_k(r;\zeta)=\begin{cases}-\dfrac{r^k}{k\zeta^k}, & 0\leqslant r<|\zeta|\\ -\dfrac{\bar\zeta^k}{kr^k}, & |\zeta|<r<\rho\end{cases}\quad k=1,2,\cdots, \tag{2.13}$$

Тогда (2.12) принимает вид ($z=re^{i\varphi}$)

$$\operatorname{Re}G_z\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)=\varkappa_0J_0(r;\zeta)+\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\varkappa_k e^{ik\varphi}J_k(r;\zeta)\quad(|z|<\rho,\ |z|\neq|\zeta|). \tag{2.14}$$

С другой стороны, можно показать, что при $|\zeta|<r\leqslant\rho$ $(-1<\alpha<\infty)$*

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}J_0(r;\zeta)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{|\zeta|/r}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx,$$

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}J_k(r;\zeta)=-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\left(\frac{r}{\zeta}\right)^k\int\limits_0^{|\zeta|/r}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\bar\zeta}{r}\right)^k\int\limits_{|\zeta|/r}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx\right\},\quad k=1,2,\cdots. \tag{2.15}$$

Заметив еще, что при $0\leqslant r<|\zeta|$

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}J_0(r;\zeta)=0,\quad r^{-\alpha}D^{-\alpha}J_k(r;\zeta)=-\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\cdot\frac{r^k}{\zeta^k},\quad k=1,2,\cdots, \tag{2.16}$$

из (2.6)—(2.7), (2.14)—(1.16) после некоторых преобразований легко получим

$$u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varkappa_k|}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)^k\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx+\right.\\ \left.+\left(\dfrac{r|\zeta|}{\rho^2}\right)^k\displaystyle\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx\right\}\cos(k\varphi+\gamma_k), \quad |z|<|\zeta|\leqslant\rho,\\ -\dfrac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varkappa_k|}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)^k\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx+\right.\\ \left.+\left(\dfrac{r|\zeta|}{\rho^2}\right)^k\displaystyle\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx-\left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^k\int\limits_{|\zeta|/r}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx\right\}\cos(k\varphi+\gamma_k),\end{cases} \tag{2.17}$$

---

* См. [1], стр. 589—592.

$$0<|\zeta|<|z|<\rho,$$

где $\gamma_k=\arg(\varkappa_k\bar{\zeta}^k)$, $k=1, 2,\cdots$; $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

Доопределим в соответствии с полученным разложением функцию $u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)$ на окружности $|z|=|\zeta|$ следующим образом:

$$u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(|\zeta|\,e^{i\varphi};\zeta)=-\frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varkappa_k|}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{|\zeta|}{\rho}\right)^{2k}\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx\right\}\cos(k\varphi+\gamma_k). \qquad (2.18)$$

Непосредственно из определения (2.6) следует гармоничность функции $u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)$ в круге $|z|<|\zeta|$. Кроме того, ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\varkappa_k|$, а также оценок

$$\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx\leqslant\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx;\ \left(\frac{|\zeta|}{\rho}\right)^{2k}\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx,\ k=1, 2,\cdots, \qquad (2.19)$$

ряд (2.18) сходится равномерно на окружности $z=|\zeta|\,e^{i\varphi}$, и, следовательно, чтобы убедиться в непрерывности функции $u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)$ всюду в круге $|z|\leqslant\rho$, достаточно доказать оценку (2.8) и тождество (2.10).

Заметив, что при $k>1$

$$\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)^k\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\leqslant\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx,\ \left(\frac{r|\zeta|}{\rho^2}\right)^k\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx, \qquad (2.20)$$

$$\left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^k\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx\leqslant\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx,$$

а также, что при условии $0<h\leqslant\frac{|\zeta|}{\rho}\leqslant1$

$$\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\leqslant\frac{1}{(\alpha+1)h}\left(1-\frac{|\zeta|}{\rho}\right)^{\alpha+1}, \qquad (2.21)$$

з (2.17)—(2.18) всюду в кольце $|\zeta| \leqslant |z| \leqslant \rho$ получим требуемую оценку (2.8). Из полученной оценки следует также, что в (2.17) возможен очленный переход к пределу при $r \to \rho - 0$*, который приводит к ождеству (2.10). Наконец, (2.9) непосредственно следует из (2.17).

3°. В кольце $|\zeta| < |z| < \rho$ рассмотрим выражение

$$\Delta u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(re^{i\varphi};\zeta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(re^{i\varphi};\zeta).$$

Из (2.17) непосредственным подсчетом находим

$$\Delta u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(re^{i\varphi};\zeta) = \frac{\alpha|\zeta|}{\Gamma(1+\alpha)r^3}\left(1-\frac{|\zeta|}{r}\right)^{\alpha-1}\left[\varkappa_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\varkappa_k\cos k(\varphi+\gamma_k)\right],$$

и при условии $0 < \alpha < \infty, \sum_{k=1}^{\infty}|\varkappa_k| < \frac{|\varkappa_0|}{2}$ всюду в кольце $|\zeta| < |z| < \rho$, очевидно, имеем

$$\Delta u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(re^{i\varphi};\zeta) \geqslant 0, \text{ если } \varkappa_0 > 0,$$

$$\Delta u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(re^{i\varphi};\zeta) \leqslant 0, \text{ если } \varkappa_0 < 0,$$

что означает соответственно субгармоничность (при $\varkappa_0 > 0$) и супергармоничность (при $\varkappa_0 < 0$) функции $u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(z;\zeta)$ в кольце $|\zeta| < |z| < \rho$. При этом согласно (2.18), (2.19) на окружности $|z| = |\zeta|$ имеем

$$u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(|\zeta|e^{i\varphi};\zeta) + \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varkappa_k|}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx, \text{ если } \varkappa_0 > 0,$$

$$u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(|\zeta|e^{i\varphi};\zeta) + \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx \geqslant -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varkappa_k|}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx, \text{ если } \varkappa_0 < 0,$$

---

* Мы используем следующее простое предложение. Пусть имеем мажорируемый ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x,y)$ в области $a < x < b$, $c < y < d$, причем $\lim_{x\to b-0} f_k(x,y) = f_k(b,y)$, $k = 1, 2, \cdots$ равномерно по $y$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(b,y)$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда равномерно на $[c,d]$ $\lim_{x\to b-0}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(b,y)$.

откуда, ввиду (2.10), следует (2.11). Лемма, таким образом, доказана полностью.

в) Пусть $F(z)$—мероморфная в $|z|<1$ функция с нулями $\{a_\mu\}$ и полюсами $\{b_\nu\}$, отличными от $z=0$, пронумерованными так, что их модули не убывают, со следующим разложением в окрестности точки $z=0$:

$$F(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots \quad (c_\lambda \neq 0), \tag{2.22}$$

причем $|\lambda|$ очевидно—кратность нуля $(\lambda > 0)$ или полюса $(\lambda \leqslant -1)$ в точке $z=0$.

Нетрудно видеть, что функция $\ln F(re^{i\theta})$ при каждом $\theta \in [-\pi, \pi]$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_1$, причем

$$\{r_n\}_{\ln F} = \{|a_\mu|\} \cup \{|b_\nu|\}, \tag{2.23}$$

так как в кольцах $r_n < |z| < r_{n+1}$, $n = 0, 1, \cdots$, свободных от нулей и полюсов $F(z)$ имеет место разложение $\dfrac{F'(z)}{F(z)}$ в ряд Лорана.

В [1] доказывается следующее существенное обобщение формулы Йенсена-Неванлинны для $-1<\alpha<+\infty$ $(0<\rho<1)$:

$$\ln F(z) = i \arg c_\lambda + \lambda\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)} + \lambda \ln \frac{z}{\rho} + \sum_{0<|a_\mu|<\rho} \times$$

$$\times \ln\left\{\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right) e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\, \frac{a_\mu}{\rho}\right)}\right\} - \sum_{0<|b_\nu|<\rho} \ln\left\{\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right) e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\, \frac{b_\nu}{\rho}\right)}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{2}{\left(1-e^{-i\theta}\dfrac{z}{\rho}\right)^{1+\alpha}}-1\right)\{\rho^{-\alpha} D^{-\alpha} \ln|F(\rho e^{i\theta})|\}\, d\theta \quad (|z|<\rho). \tag{2.24}$$

Пусть $\rho<\rho_0<1$, $[\rho, \rho_0) \cap \{r_n\}_{\ln F} = \varnothing$. Рассматривая функцию

$$f_\rho(z) = z^{-\lambda} \frac{\prod\limits_{0<|b_\nu|<\rho}\left(1-\dfrac{z}{b_\nu}\right) e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\, \frac{b_\nu}{\rho}\right)}}{\prod\limits_{0<|a_\mu|<\rho}\left(1-\dfrac{z}{a_\mu}\right) e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\, \frac{a_\mu}{\rho}\right)}} \cdot F(z) \tag{2.25}$$

и применяя для ее логарифма, голоморфного в круге $|z|<\rho_0$, формулу типа Шварца (2.5), мы, учитывая легко проверяемые соотношения (см. (1.17))

$$\operatorname{Im} \ln f_\rho(0) = \arg c_\lambda, \tag{2.26}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{\alpha x}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right) \mathrm{G}_{x,\alpha} \ln(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \ln \rho - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}, \tag{2.27}$$

также тождество (2.10), получим, наряду с (2.24), следующую формулу:

$$\ln F(z) = i\arg c_\lambda + \lambda\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)} + \lambda\ln\frac{z}{\rho} + \sum_{0<|a_\mu|<\rho}\ln\left\{\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)\times\right.$$

$$\left.\times e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\,\frac{a_\mu}{\rho}\right)}\right\} - \sum_{0<|b_\nu|<\rho}\ln\left\{\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right)e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\,\frac{b_\nu}{\rho}\right)}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{\alpha\varkappa}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)\rho^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\,d\theta \quad (|z|<\rho). \tag{2.28}$$

Далее, применяя правило Лопиталя, нетрудно вычислить, что

$$\lim_{|\zeta|\to 0}\left\{\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)^k\int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx + \left(\frac{r|\zeta|}{\rho^2}\right)^k\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^k\int_{|\zeta|/r}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx\right\} = 0,\ k=1,2,\cdots. \tag{2.29}$$

Кроме того, имеем

$$-\int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx = \ln\frac{r}{\rho} + \int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r}\frac{(1-(1-x)^\alpha}{x}\,dx,$$

и, поскольку второе слагаемое в правой части этого равенства, очевидно, стремится к нулю при $|\zeta|\to 0$, то

$$\lim_{|\zeta|\to 0}\left[-\int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\right] = \ln\frac{r}{\rho}. \tag{2.30}$$

Принимая во внимание (2.29) и (2.30), из (2.17) легко получим

$$\lim_{|\zeta|\to 0}u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta) = \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\ln\frac{r}{\rho}. \tag{2.31}$$

Теперь, если применить к обеим частям (2.28) операцию $r^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}$, учесть (2.2) и (2.31), а также смысл $\lambda$, получим формулу $(r,\rho\,\overline{\in}\,\{r_n\}_{\ln F})$:

$$r^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(re^{i\varphi}) = \sum_{0<|a_\mu|<\rho}u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(re^{i\varphi};a_\mu) - \sum_{0<|b_\nu|<\rho}u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(re^{i\varphi};b_\nu) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P\left(\varphi-\theta;\frac{r}{\rho}\right)\rho^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\,d\theta \tag{2.32}$$

$$(r<\rho;\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi),$$

причем в суммах уже учтены слагаемые, соответствующие возможном нулю или полюсу в точке $z=0$.

Из сравнения (2.24) и (2.28), считая пока $\rho\overline{\in}\{r_n\}_{\ln F}$, получае следующее интегральное тождество ($-1<\alpha<\infty$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_{\alpha\varkappa}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right) \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{2}{\left(1-e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)^{1+\alpha}}-1\right)\times$$

$$\times D^{-\alpha} \ln |F(\rho e^{i\theta})|\, d\theta,\quad |z|<\rho, \tag{2.33}$$

из которого следуют формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-is\theta}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \varkappa_s \int_{-\pi}^{\pi} e^{-is\theta} D^{-\alpha} \ln |F(\rho e^{i\theta})| d\theta,\quad s=0,1,\cdots;\ 0<\rho\leqslant 1 \tag{2.34}$$

г) Лемма 2. *Функцию* $r^{-\alpha}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(z)$, $-1<\alpha<\infty$ *можно до определить в круге* $|z|<\rho$ $(0<\rho\leqslant 1)$ *так, чтобы она была непре рывна в этом круге, за исключением разве лишь точки* $z=0$.

Доказательство. Применяя к обеим частям тождества (2.33) операцию $r^{-\alpha}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}$ и учитывая (2.2), имеем ($\rho\overline{\in}\{r_n\}_{\ln F}$, $z=re^{i\varphi}$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} P\left(\varphi-\theta;\ \frac{r}{\rho}\right)\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} r^{-\alpha}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\left\{\frac{2}{\left(1-e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)^{1+\alpha}}-1\right\}\times$$

$$\times D^{-\alpha}\ln|F(\rho e^{i\theta})|\, d\theta\quad (|z|<\rho). \tag{2.35}$$

Поэтому из (2.32) получаем представление

$$r^{-\alpha}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(z) = \frac{\lambda\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\ln\frac{r}{\rho} + \sum_{0<|a_\mu|<\rho} u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\ a_\mu) -$$

$$-\sum_{0<|b_\nu|<\rho} u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\ b_\nu) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{-\alpha}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\left\{\frac{2}{\left(1-e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)^{1+\alpha}}-1\right\} D^{-\alpha}\ln|F(\rho e^{i\theta})|\, d\theta\quad (|z|<\rho). \tag{2.36}$$

Интеграл в правой части полученного тождества является, очевидно гармонической функцией в круге $|z|<\rho$; суммы же $\sum_{0<|a_\mu|<\rho} u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\ a_\mu)$ $\sum_{0<|b_\nu|<\rho} u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\ b_\nu)$ по лемме 1 могут быть доопределены по непрерыв ности. Таким образом, оператор $r^{-\alpha}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}$ при любом $\alpha$, $-1<\alpha<\infty$ „сглаживает“ логарифмические особенности функции $\ln F(z)$. Коэффи иенты Фурье функции $r^{-\alpha} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(re^{i\varphi})$ могут быть вычислены по формулам (2.34).

В силу доказанной леммы формула (2.28) без труда может быть распространена по непрерывности и на исключительные значения $\{r_n\}_{\ln F}$. В самом деле, функция $r^{-\alpha} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(re^{i\varphi})$ непрерывна, в частности, по $r$ в окрестности любой точки $r_n \in \{r_n\}_{\ln F}$ и, следовательно, интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_{\varkappa\alpha}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)\rho^{-\alpha} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(\rho e^{i\theta})\,d\theta$ является непрерывной функцией по $\rho$ в окрестности любой точки $r_n \in \{r_n\}_{\ln F}$. Значит обе части тождества (2.28) непрерывны по $\rho$ в окрестности $r_n$ (при этом левая часть есть const ($\rho$)) и совпадают в этой окрестности. Отсюда следует, что (2.28) справедливо и в самой точке $\rho = r_n \in \{r_n\}_{\ln F}$.

То же относится к формулам (2.32)—(2.34).

д) Положим в (2.28) $z=0$. Тогда, замечая, что $[\ln F(z) - \lambda \ln z]_{z=0} = \ln c_\lambda$, $S_{\varkappa\alpha}(0) = \dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa_0}$, получим следующую формулу $(0<\rho<1)$:

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi\varkappa_0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\rho^{-\alpha}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\,d\theta = \ln|c_\lambda| + \lambda\left(\ln\rho - \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}\right) +$$

$$+\sum_{0<|a_\mu|<\rho} W_\alpha\left(0;\frac{a_\mu}{\rho}\right) - \sum_{0<|b_\nu|<\rho} W_\alpha\left(0;\frac{b_\nu}{\rho}\right), \tag{2.37}$$

где согласно (2.7)

$$W_\alpha(0;\zeta) = \int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx.$$

## § 3. $\varkappa$, $\alpha$-характеристики

Пусть $n(t;0)$ и $n(t;\infty)$ $(0<t<1)$—соответственно число нулей $a_\mu$ и полюсов $b_\nu$ функции $F(z)$ в круге $|z|\leqslant t$; $n(0;0)$ и $n(0;\infty)$—соответственно кратность нуля или полюса в точке $z=0$.

Отметим, что в соответствии с разложением (2.22)

$$\lambda = n(0;0) - n(0;\infty). \tag{3.1}$$

Рассмотрим функции, введенные М. М. Джрбашяном [1] $(-1<\alpha<+\infty)$:

$$N_\alpha(\rho;0) \equiv N_\alpha\left(\rho;\frac{1}{F}\right) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{0<|a_\mu|<\rho} W_\alpha\left(0;\frac{a_\mu}{\rho}\right) +$$

$$+\frac{n(0;0)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\ln\rho - \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}\right], \tag{3.2}$$

$$N_\alpha(\rho;\infty)\equiv N_\alpha(\rho;F)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{0<|b_\nu|<\rho} W_\alpha\left(0;\frac{b_\nu}{\rho}\right)+$$

$$+\frac{n(0;\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}\left|\ln\rho-\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}\right|, \tag{3.3}$$

а также следующие функции:

$$m_{\varkappa,\alpha}(\rho;0)\equiv m_{\varkappa,\alpha}\left(\rho;\frac{1}{F}\right)=\frac{\rho^{-\alpha}}{2\pi\varkappa_0}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{G}^{-}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\,d\theta, \tag{3.4}$$

$$m_{\varkappa,\alpha}(\rho;\infty)\equiv m_{\varkappa,\alpha}(\rho;F)=\frac{\rho^{-\alpha}}{2\pi\varkappa_0}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{G}^{+}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\,d\theta, \tag{3.5}$$

здесь

$$\mathbf{G}^{-}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})=\max(-\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta}),0), \tag{3.6}$$

$$\mathbf{G}^{+}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})=\max(\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta}),0), \tag{3.7}$$

так что, очевидно

$$m_{\varkappa,\alpha}(\rho;F)-m_{\varkappa,\alpha}\left(\rho;\frac{1}{F}\right)=\frac{\rho^{-\alpha}}{2\pi\varkappa_0}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\,d\theta. \tag{3.8}$$

Функцию

$$T_{\varkappa,\alpha}(\rho;F)=\begin{cases} m_{\varkappa,\alpha}(\rho;F)+N_\alpha(\rho;F), & \varkappa_0>0\\ -m_{\varkappa,\alpha}\left(\rho;\dfrac{1}{F}\right)+N_\alpha(\rho;F), & \varkappa_0<0\end{cases}\quad(0<\rho<1) \tag{3.9}$$

назовем $\varkappa$, *$\alpha$-характеристикой.*

Из (3.1)—(3.3), (3.8) и (3.9) следует, что формула (2.37) § 2 (д
может быть записана в виде

$$T_{\varkappa,\alpha}(\rho;F)=T_{\varkappa,\alpha}\left(\rho;\frac{1}{F}\right)+\frac{\ln|c_\lambda|}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{3.10}$$

Полученное соотношение будем называть *соотношением $\varkappa$, $\alpha$-равнове сия* для мероморфных функций.

С помощью $\varkappa$, $\alpha$-характеристики (3.9) мы выделяем из всей сово купности мероморфных в $|z|<1$ функций те из них, для которых вы полнено условие

$$T_{\varkappa,\alpha}(F)=\sup_{0<r<1}T_{\varkappa,\alpha}(r;F)<+\infty. \tag{3.11}$$

Ниже (§ 5) будет показано, что множество таких функций, кото рое мы назовем *классом* $N_{\varkappa,\alpha}$, не зависит от конечного числа первы членов последовательности $\varkappa$, и потому, не ограничивая общности, дл $\varkappa$, $\alpha$-характеристики мы можем считать выполненным условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varkappa_k|<\frac{|\varkappa_0|}{2}. \tag{3.12}$$

Опираясь на лемму 1 (пункт 3°), формулу (2.32), а также соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(re^{i\varphi};\zeta)d\varphi=\begin{cases}-\dfrac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx, & r\leqslant|\zeta|\leqslant\rho\\ -\dfrac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx, & 0<|\zeta|<r<\rho,\end{cases}\tag{3.13}$$

которое непосредственно вытекает из (2.17)—(2.18), и проводя рассуждения, совершенно аналогичные тем, которые приведены в [1] при доказательстве теоремы 9.3, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $\alpha\in[0,\infty)$, *то* $\varkappa$, $\alpha$*-характеристика* $T_{\varkappa,\alpha}(r;F)$ *любой мероморфной функции* $F(z)$ *не убывает на интервале* (0,1).

## § 4. Некоторые свойства произведений $B_\alpha(z;z_k)$, связанные с операторами $\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}$

Прежде всего докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Для любого сходящегося произведения*

$$B_\alpha(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;z_k)}\quad(|z|<1),\ -1<\alpha<\infty)\tag{4.1}$$

*равномерно всюду на* $[-\pi,\pi]$ *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r\to1-0}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln B_\alpha(re^{i\varphi},z_k)=0,\quad\varphi\in[-\pi,\pi].\tag{4.2}$$

Доказательство. Обозначим

$$[u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(z;\zeta)]_{\rho=1}\equiv u_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)\quad(0<|\zeta|\leqslant1;\ |z|<1).\tag{4.3}$$

Предварительно докажем тождество ($z=re^{i\varphi}$)

$$r^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln B_\alpha(z;z_k)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{\varkappa,\alpha}(z;z_k)\quad(|z|<1).\tag{4.4}$$

С этой целью заметим, что согласно оценке (2.8), ряд в правой части (4.4) мажорируется в круге $|z|<1$ числовым рядом

$$\left(\frac{3}{\Gamma(2+\alpha)|z_1|}\sum_{n=0}^{\infty}|\varkappa_n|\right)\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\quad(|z_1|<|z_2|<\cdots),\tag{4.5}$$

сходящимся ввиду сходимости произведения (4.1).

Рассмотрим круг $|z|\leqslant t$, $0<t<1$. Существует такой номер $N_t$, что

$$|z_k|>t,\ k>N_t.$$

Обозначим

$$a_{km}=\frac{1}{z_k^m}\int_{|z_k|}^{1}(1-x)\ \ x^{m-1}dx+\bar{z}_k^m\int_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x^{m+1}}dx,\ k,m=1,2,\cdots.\tag{4.6}$$

Тогда нетрудно видеть, что из (2.7) (при $\rho = 1$) в круге $|z| < t$ следует разложение

$$\ln\left|\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;\,z_k)}\right| = -\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx -$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+m)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+m)}a_{km}\,z^m, \quad k \geqslant N_t. \tag{4.7}$$

Ввиду равномерной сходимости произведения (4.1) согласно (4.7) имеем

$$\ln B_\alpha(z;\,z_k) = \sum_{k=1}^{N_t-1}\ln\left|\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;\,z_k)}\right| - \sum_{k=N_t}^{\infty}\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+m)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+m)}\left(\sum_{k=N_t}^{\infty}a_{km}\right)z^m, \quad |z| \leqslant t. \tag{4.8}$$

Отсюда следует, что

$$r^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln B_\alpha(z;\,z_k) = \sum_{k=1}^{N_t-1}u_{\varkappa,\alpha}(z;\,z_k) - \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{k=N_t}^{\infty}\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx +$$

$$+\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varkappa_m}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\sum_{k=N_t}^{\infty}a_{km}\right)z^m, \quad |z| \leqslant t. \tag{4.9}$$

С другой стороны, из (2.6), (2.7), (2.14), (2.16) (при $\rho = 1$; $\zeta = z_k$, $k \geqslant N_t$) с учетом обозначения (4.6) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_{\varkappa,\alpha}(z;\,z_k) = \sum_{k=1}^{N_t-1}u_{\varkappa,\alpha}(z;\,z_k) - \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{k=N_t}^{\infty}\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx +$$

$$+\mathrm{Re}\sum_{k=N_t}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varkappa_m}{\Gamma(1+\alpha)}a_{km}\,z^m\right), \quad |z| \leqslant 1. \tag{4.10}$$

Теперь в силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{\varkappa,\alpha}(z;\,z_k)$ из сравнения (4.9) и (4.10) следует, что тождество (4.4) справедливо в круге $|z| \leqslant t$ и, следовательно, ввиду произвольности $t$, $0 < t < 1$, всюду в круге $|z| < 1$.

Однако поскольку для ряда (4.4) существует мажорантный числовой ряд (4.5), в правой части (4.4) возможен почленный переход к пределу при $r \to 1-0$*, и предельное соотношение (4.2) следует из тождества (2.10) леммы 1. Тем самым теорема доказана.

---

* См. сноску на стр. 421.

Известны следующие важные свойства произведений $B_\alpha(z; z_k)$ [1]:

$$\text{а)}\qquad \lim_{r\to 1-0}\int_{-\pi}^{\pi} D^{-\alpha}\ln|B_\alpha(re^{i\varphi}; z_k)|\,d\varphi = 0\quad(-1<\alpha<\infty), \tag{4.11}$$

$$\text{б)}\qquad D^{-\alpha}\ln|B_\alpha(z; z_k)|\leqslant 0\quad(|z|<1;\ 0\leqslant\alpha<\infty),$$

которые при $0\leqslant\alpha<\infty$, как показано Г. Г. Геворкяном [3], являются характерными для этих произведений. Другие характерные свойства произведений $B_\alpha(z; z_k)$, связанные с операторами $\mathrm{G}_{\varkappa,\alpha}$, выявляет следующая

Теорема 3. *Если для данного $\alpha$ $(-1<\alpha<\infty)$ аналитическая в круге $|z|<1$ функция $F(z)$ удовлетворяет условиям*

$$\text{а)}\qquad \lim_{r\to 1-0}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(re^{i\varphi})\,d\varphi = 0,$$

$$\text{б)}\qquad \mathrm{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(z)\leqslant 0\quad \textit{или}\quad \text{б}')\qquad \mathrm{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(z)\geqslant 0, \tag{4.12}$$

*то ее можно представить в виде*

$$F(z) = z^\lambda B_\alpha(z; z_k)\exp\left\{i\gamma+\lambda\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}\right\}, \tag{4.13}$$

*где $\lambda\geqslant 0$—целое, $\gamma$—вещественное число, $\{z_k\}$ — последовательность нулей $F(z)$, отличных от $z=0$, в круге $|z|<1$ $(|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots)$.*

Доказательство. В силу условия а) из (2.37) следует, что существует конечный предел

$$A=\lim_{\rho\to 1-0}\sum_{k=1}^{n(\rho;0)-n(0;0)}\int_{|z_k|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\geqslant\frac{1}{\alpha+1}\sum_{k=1}^{n(r;0)-n(0;0)}\left(1-\frac{|z_k|}{r}\right)^{1+\alpha}$$

$$(\forall r,\ 0<r<1). \tag{4.14}$$

Пусть $N>0$ — произвольное целое число. Тогда при $n(r;0)-n(0;0)>N$ $(r_0<r<1)$* из (4.14) следует, что

$$\sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{|z_k|}{r}\right)^{1+\alpha}\leqslant A(1+\alpha).$$

Переходя здесь к пределу при $r\to 1-0$, имеем

$$\sum_{k=1}^{N}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\leqslant A(1+\alpha),$$

и, так как $N$ произвольно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}$ сходится. Но тогда

---

* Предполагается, что множество нулей $F(z)$ бесконечно. В противном случае доказательство проводим, начиная с представления (4.15).

сходится произведение $B_\alpha(z; z_k)$ и, следовательно, справедливо представление

$$F(z) = z^\lambda B_\alpha(z; z_k)\, e^{\varphi(z)}, \tag{4.15}$$

где $\lambda \geqslant 0$ — целое число, $\varphi(z)$ — аналитическая в круге $|z| < 1$ функция. Из (4.15) и условия б) теоремы следует, что $(z = re^{i\varphi})$:

$$r^{-\alpha}\, \mathbf{G}_{x,\alpha}\, \varphi(z) \leqslant \frac{\lambda x_0}{\Gamma(1+\alpha)}\, \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)} - \frac{\lambda x_0}{\Gamma(1+\alpha)} \ln r - r^{-\alpha}\, \mathbf{G}_{x,\alpha} \ln B_\alpha(z; z_k),$$

откуда согласно предыдущей теореме по $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_0$ такое, что при $r_0 < |z| < 1$

$$r^{-\alpha}\, \mathbf{G}_{x,\alpha}\, \varphi(z) \leqslant \frac{\lambda x_0 \alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)} + \varepsilon.$$

Но в силу гармоничности функции $\mathbf{G}_{x,\alpha}\, \varphi(z)$ последнее неравенство распространяется на весь круг $|z| < 1$, и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то всюду в $|z| < 1$

$$r^{-\alpha}\, \mathbf{G}_{x,\alpha}\, \varphi(z) \leqslant \frac{\lambda x_0 \alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}\,. \tag{4.16}$$

С другой стороны, из (4.11) а) и (2.34) (при $s=0$) имеем

$$\lim_{r \to 1-0} \int_0^{2\pi} \mathbf{G}_{x,\alpha} \ln B_\alpha(re^{i\varphi}; z_k)\, d\varphi = 0. \tag{4.17}$$

Это вместе с условием а) (4.12) и представлением (4.15), в силу теоремы о среднем, дает

$$[r^{-\alpha}\, \mathbf{G}_{x,\alpha}\, \varphi(z)]_{z=0} = \frac{r^{-\alpha}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{G}_{x,\alpha}\, \varphi(re^{i\varphi})\, d\varphi = \frac{\lambda x_0 \alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}.$$

Следовательно, ввиду (4.16), по принципу максимума

$$r^{-\alpha}\, \mathbf{G}_{x,\alpha}\, \varphi(z) \equiv \frac{\lambda x_0 \alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}\,. \tag{4.18}$$

Записав для $\varphi(z)$ формулу типа Шварца (2.5) и учитывая (4.18), будем иметь

$$\varphi(z) \equiv \lambda\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)} + i\gamma, \quad \gamma = \operatorname{Im} \varphi(0). \tag{4.19}$$

Из (4.15) и (4.19) следует представление (4.13) теоремы.

Совершенно ясно, что в условиях а), б′) теорема сохраняет силу.

В связи с доказанной теоремой отметим, что при дополнительном условии $0 \leqslant \alpha < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \frac{|x_0|}{2}$, в силу неравенств (2.11), леммы 1 и тождества (4.4), *любое* сходящееся произведение $B_\alpha(z; z_k)$

удовлетворяет условиям а)—б), если $\varkappa_0>0$, и а), б′), если $\varkappa_0<0$, и, следовательно, в этом случае эти свойства будут *характерными* для произведений $B_\alpha(z; z_k)$*.

Обратим также внимание на то, что в доказательстве мы существенно опирались на установленное выше предельное соотношение (4.2). Аналогичное свойство (0.6) произведений $B_\alpha(z; z_k)$ не могло быть эффективно использовано в доказательстве теоремы Г. Г. Геворкяна [3], так как оно имеет место лишь почти всюду.

Наконец, докажем важное свойство $\varkappa$, $\alpha$-характеристики произведения $B_\alpha(z; z_k)$.

Теорема 4. *Какова бы ни была последовательность* $\varkappa$, *удовлетворяющая условиям* (1.6), (1.11), *любое сходящееся произведение* $B_\alpha(z; z_k)$ *принадлежит классу* $N_{\varkappa,\alpha}$ $(-1<\alpha<\infty)$, *или*

$$\sup_{0<r<1} T_{\varkappa,\alpha}(r; B_\alpha)<+\infty. \tag{4.20}$$

*Таким образом, если через* $\mathbf{B}_\alpha$ *обозначим множество всех сходящихся произведений* $B_\alpha(z; z_k)$ *при фиксированном* $\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$, *то справедливо включение*

$$\mathbf{B}_\alpha\subset\bigcap_{\varkappa} N_{\varkappa,\alpha}. \tag{4.21}$$

Доказательство. Из мажорируемости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{\varkappa,\alpha}(z; z_k)$ числовым рядом (4.5) и тождества (4.4) следует, что

$$r^{-\alpha}\mathbf{G}^{+}_{\varkappa,\alpha}\ln B_\alpha(z; z_k)\leqslant\frac{3\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\varkappa_n|}{\Gamma(2+\alpha)|z_1|}\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\ (|z_1|<|z_2|<\cdots),$$

и так как $N_\alpha(r; B_\alpha)\equiv 0$, то при $\varkappa_0>0$

$$\sup_{0<r<1} T_{\varkappa,\alpha}(r; B_\alpha)=\sup_{0<r<1} m_{\varkappa,\alpha}(r; B_\alpha)=$$

$$=\sup_{0<r<1}\frac{r^{-\alpha}}{2\pi\varkappa_0}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{G}^{+}_{\varkappa,\alpha}\ln B_\alpha(re^{i\varphi}; z_k)\,d\theta<\infty.$$

Случай $\varkappa_0<0$ рассматривается аналогично.

## § 5. Параметрическое представление классов $N_{\varkappa,\alpha}$ $(-1<\alpha<\infty)$ и некоторые их свойства

Теперь мы в состоянии доказать теорему о параметрическом представлении рассматриваемых нами классов $N_{\varkappa,\alpha}$. Напомним, что через $N_{\varkappa,\alpha}$ обозначен класс функций, удовлетворяющих условию (3.11).

Теорема 5. *Класс* $N_{\varkappa,\alpha}$ $(-1<\alpha<\infty)$ *совпадает с множеством функций* $F(z)$, *которые в круге* $|z|<1$ *допускают представление вида*

* Более точно, для функций вида (4.13).

$$F(z) = z^{\lambda} \frac{B_\alpha(z; a_\mu)}{B_\alpha(z; b_\nu)} \exp\left\{ i\gamma + \lambda\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{\alpha x}(e^{-i\theta} z)\, d\psi(\theta) \right\}, \tag{5.1}$$

*где*

$$S_{\alpha x}(z) = \mathrm{G}_{\frac{1}{x}} \left( \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{x_0} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{x_k \Gamma(1+k)} z^k \; (|z| < 1),$$

$B_\alpha(z; a_\mu)$, $B_\alpha(z; b_\nu)$ *— сходящиеся произведения вида* (4.1), $\psi(\theta)$ *— вещественная функция на* $[-\pi, \pi]$ *с конечным полным изменением,* $\lambda$ *— целое,* $\gamma$ *— вещественное число.*

Сформулированная теорема является полным аналогом теоремы А, причем последнюю можно рассматривать дополнением к ней при $x_k = 1$, $k = 0, 1, \cdots$. При этом теорема 5 формально переходит в теорему А, однако последовательность $x = 1$ исключена из наших рассмотрений при построении классов $N_{x, \alpha}$.

Поскольку в предыдущих параграфах были установлены все необходимые утверждения, позволяющие провести доказательство теоремы 5 в точности по той же схеме, которая была реализована в монографии [1] применительно к классам $N_\alpha (-1 < \alpha < \infty)$, мы лишь наметим его без подробного изложения.

Предварительно доказываются следующие вспомогательные предложения*.

1°. Если $f(z) \in N_{x, \alpha}$ и $g(z) \in N_{x, \alpha}$, то также

$$f(z)\, g(z) \in N_{x, \alpha} \quad \text{и} \quad \frac{f(z)}{g(z)} \in N_{x, \alpha}.$$

2°. При любом целом $\lambda$, $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$z^{\lambda} \in N_{x, \alpha}.$$

3°. Если $F(z) \in N_{x, \alpha}$ и $\{a_\mu\}$, $\{b_\nu\}$ — соответственно последовательности нулей и полюсов $F(z)$, то необходимо

$$\sum_{\mu} (1 - |a_\mu|)^{1+\alpha} < \infty, \quad \sum_{\nu} (1 - |b_\nu|)^{1+\alpha} < \infty. \tag{5.2}$$

Используя предложения 1°—2° и теорему 4, убедимся, что функция $F(z)$, допускающая представление (5.1), принадлежит классу $N_{x, \alpha}$. Затем, используя лемму 9.16 [1], формулу (2.28), а также две известные теоремы Хелли (6), с помощью тех же рассуждений, которые проведены в [1] при доказательстве теоремы 9.9, установим представление (5.1) для любой функции $F(z) \in N_{x, \alpha}$.

Кроме того, попутно показывается, что существует такая последовательность $0 < \rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_k < \cdots$, $\rho_k \uparrow 1$, зависящая от $F(z)$, что в каждой точке $\theta \in [-\pi, \pi]$, за исключением не более, чем счетно

---

* Ср. [1], стр. 637—638 и 641 (лемма 9.17).

го множества, функция $\psi(\theta)$ определяется по $F(z)$ *единственным образом* с точностью до аддитивной постоянной по формуле

$$\psi(\theta)=\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\theta} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(\rho_k e^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{5.3}$$

Отметим еще, что из определения (1.10) оператора $\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}$ и из свойств оператора $D^{-\alpha}$ для любых $\alpha_1, \alpha_2, -1<\alpha_1<\alpha_2\leqslant 0$ или $0\leqslant\alpha_1<$ $<\alpha_2<\infty$*, имеем

$$\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha_2} \ln F(z) = D^{-(\alpha_2-\alpha_1)}\, \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha_1} \ln F(z). \tag{5.4}$$

Поэтому с помощью дословно тех же рассуждений, которые приведены в [1], стр. 610—611 и стр. 635, убедимся, что при $-1<\alpha_1<\alpha_2<\infty$

$$N_{\varkappa,\alpha_1}\subset N_{\varkappa,\alpha_2}. \tag{5.5}$$

Далее, из теорем 5 и 2 легко может быть получен аналог теоремы B. Именно, имеет место

Теорема 6. *Если $F(z)\in N_{\varkappa,\alpha}$, $\alpha\in(-1,\infty)$, то всюду равномерно на* $[-\pi, \pi]$

$$\lim_{r\to 1-0}\left| \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(re^{i\varphi}) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\varphi-\theta; r)\, d\psi(\theta) \right| = 0,\quad \varphi\in[-\pi, \pi] \tag{5.6}$$

*и, следовательно, почти всюду на* $[-\pi, \pi]$ [4]

$$\lim_{r\to 1-0} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(re^{i\varphi}) = \psi'(\varphi), \tag{5.7}$$

*где функция $\psi(\varphi)$ с ограниченным изменением определяется формулой* (5.3)**.

В заключение сделаем одно важное замечание.

Пусть $F(z)\in \mathbf{A}_\alpha$, т. е. нули $\{a_\mu\}$ и полюсы $\{b_\nu\}$ $F(z)$ удовлетворяют условиям (5.2). Тогда сходятся произведения $B_\alpha(z; a_\mu)$, $B_\alpha(z; b_\nu)$ и, следовательно, по теореме 5 функции $F(z)$ и $\exp k_\alpha(z; \ln F)$ (см. (0.8)) принадлежат или нет классу $N_{\varkappa,\alpha}$ одновременно. Другими словами, $F(z)\in N_{\varkappa,\alpha}$ в том и только в том случае, если выполнено условие

$$\begin{gathered} T_{\varkappa,\alpha}(\exp k_\alpha) = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{G}^{+}_{\varkappa,\alpha}\; k_\alpha(re^{i\theta}; \ln F)\, d\theta < +\infty, \text{ если } \varkappa_0>0, \\ T_{\varkappa,\alpha}(\exp k_\alpha) = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{G}^{-}_{\varkappa,\alpha}\; k_\alpha(re^{i\theta}; \ln F)\, d\theta < +\infty, \text{ если } \varkappa_0<0. \end{gathered} \tag{5.8}$$

---

* См. [1], стр. 567 и 610.

** Может быть перенесен также ряд других результатов, изложенных в [1], стр. 649—660, которые мы здесь не приводим.

Пусть

$$\varkappa = \{\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots\}, \tilde{\varkappa} = \{\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_3, \cdots\}, \varkappa_0 > 0,$$

так как согласно (3.4)

$$-m_{\varkappa,\alpha}\left(r; \frac{1}{F}\right) = m_{\tilde{\varkappa},\alpha}\left(r; \frac{1}{F}\right),$$

то (см. (3.9))

$$T_{\varkappa,\alpha}(r; F) - T_{\tilde{\varkappa},\alpha}(r; F) = m_{\varkappa,\alpha}(r; F) - m_{\varkappa,\alpha}\left(r; \frac{1}{F}\right) =$$

$$= \frac{r^{-\alpha}}{2\pi\varkappa_0}\int_{-\pi}^{\pi} G_{\varkappa,\alpha} \ln F(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Однако в силу условия (5.2) и (2.37) последний интеграл ограничен при $r \to 1-0$ и, следовательно,

$$N_{\varkappa,\alpha} = N_{\tilde{\varkappa},\alpha},$$

т. е. класс $N_{\varkappa,\alpha}$ при изменении знака $\varkappa_0$ на противоположный не изменяется. Заметив это, из условия (5.8) при $\varkappa_0 > 0$ легко вывести, что если $M_n(z)$—многочлен произвольной степени $n$, то функции $\exp k_\alpha(z; \ln F)$ и $\exp[k_\alpha(z; \ln F) + M_n(z)]$ принадлежат или нет классу $N_{\varkappa,\alpha}$ одновременно. Это равносильно тому, что класс $N_{\varkappa,\alpha}$ не изменится, если изменить произвольное конечное множество чисел в последовательности $\varkappa$ (сохраняя лишь условия, при которых рассматривались классы $N_{\varkappa,\alpha}$: $\varkappa_k \neq 0$, $k = 0, 1, \cdots$; $\varkappa_0$ вещественно).

## § 6. Теоремы о функциях с быстро растущими аналитическими ядрами логарифмов

Вначале докажем одно общее предложение о представлении класса $\mathbf{A}_\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$.

Теорема 7. *Для любой функции $F(z) \in \mathbf{A}_\alpha$ существует такая числовая последовательность*

$$\varkappa = \{\varkappa_k\}_0^\infty \left(\lim_{k\to\infty} |\varkappa_k|^{\frac{1}{k}} = 1, \sum_{k=1}^{\infty} |\varkappa_k| < \infty\right),$$

*что $F(z)$ принадлежит классу $N_{\varkappa,\alpha}$.*

*Таким образом, справедливо представление*

$$\mathbf{A}_\alpha = \bigcup N_{\varkappa,\alpha}. \tag{6.1}$$

Доказательство. В самом деле, пусть

$$k_\alpha(z; \ln F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (|z| < 1). \tag{6.2}$$

Положим

$$\varkappa_k = \frac{1}{(k+1)^2 \max\left(1, |c_k| \dfrac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\right)}, \quad k=0, 1, \cdots. \tag{6.3}$$

Тогда, очевидно, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varkappa_k < +\infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} (\varkappa_k)^{\frac{1}{k}} = 1$ (так как $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |c_k|^{\frac{1}{k}} \leqslant 1$).

Из (6.2) и (6.3) имеем

$$|r^{-\alpha} G_{\varkappa,\alpha} k_\alpha(z; \ln F)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \cdot \frac{c_k \cdot \dfrac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}}{\max\left(1, |c_k| \dfrac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\right)} \right| \leqslant \frac{\pi^2}{6},$$

а тогда, ввиду (5.8)

$$T_{\varkappa,\alpha}(\exp k_\alpha) < +\infty,$$

т. е. $F(z) \in N_{\varkappa,\alpha}$ ч. т. д.

Следующая теорема дает положительный ответ на вопрос, поставленный нами в начале статьи.

Теорема 8. *Пусть на* $[0,1)$ *задана непрерывная, положительная, монотонно возрастающая функция* $h(r)$, $\lim\limits_{r\to 1-0} h(r) = +\infty$. *Каким бы ни был рост* $h(r)$ *при* $r \to 1-0$ *существует такая числовая последовательность* $\varkappa = \{\varkappa_k\}_0^\infty \left(\lim\limits_{k\to\infty} |\varkappa_k|^{\frac{1}{k}} = 1, \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\varkappa_k| < \infty\right)$, *что любая функция* $F(z) \in A_\alpha$, *удовлетворяющая условию*

$$\|k_\alpha\|_r \leqslant h(r) \quad (r_0 < r < 1), \tag{6.4}$$

*принадлежит классу* $N_{\varkappa,\alpha}$.

Доказательство. Пусть функция $k_\alpha(z; \ln F)$ задана рядом (6.2). Тогда

$$\|k_\alpha\|_r = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k \quad (r < 1). \tag{6.5}$$

Из (6.4) и (6.5) следует, что

$$|c_k| < \frac{h(r)}{r^{k+1}}, \quad k=0, 1, \cdots; \ r_0 < r < 1, \tag{6.6}$$

так как по условию $h(r)$—непрерывная монотонная функция на $[0,1)$, то на $[h(0), +\infty)$ существует обратная функция $h^{-1}(x)$, также непрерывная и монотонная, причем $h^{-1}(x) \uparrow 1$ $(x \to +\infty)$. Считая без ущерба для общности $h(0) < 1$, положим

$$\varkappa_k = \frac{\Gamma(1+k+\alpha)}{\Gamma(1+k)} \cdot \frac{[h^{-1}(k+1)]^{k+1}}{(k+1)^3}, \quad k=0, 1, \cdots, \tag{6.7}$$

тогда, очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty}(\varkappa_k)^{\frac{1}{k}}=1$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varkappa_k<+\infty$. Кроме того, так как $h^{-1}(k)>r_0$ при $k>k_0$, то из (6.6) при $r=h^{-1}(k+1)$, $k>k_0$, следует, что

$$\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\,\varkappa_k|c_k|<\frac{1}{(k+1)^2},\quad k>k_0,$$

и, следовательно

$$|r^{-\alpha}\,G_{\varkappa,\alpha}\,k_\alpha(z;\ln F)|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\,\varkappa_k c_k z^k\right|<B<+\infty$$

($B=\mathrm{const}$), а тогда согласно (5.8) $T_{\varkappa,\alpha}(\exp k_\alpha)<+\infty$, т. е. $F(z)\in N_{\varkappa,\alpha}$.

В связи с доказанной теоремой будем говорить, что класс $N_{\varkappa,\alpha}$ порожден функцией $h(r)$, если $\{\varkappa_k\}_0^{\infty}$ является последовательностью (6.7) и обозначать его также через $N_\alpha\{h(r)\}$.

Отметим, что ввиду оценки (0.17), справедливой для функций класса $N_\alpha$, из теоремы 8 следует, например, строгое включение

$$N_\alpha\subset N_\alpha\{e^{\frac{1}{1-r}}\}. \tag{6.8}$$

Пусть на интервале (0,1) задана функция $g(r)$ в виде ряда

$$g(r)=\frac{1}{1-r}\sum_{k=0}^{\infty}g_k r^k,\ g_k\geqslant 0\ (0<r<1). \tag{6.9}$$

При этом $g(r)$ является, очевидно, непрерывной монотонно возрастающей функцией. Пусть еще задана функция $h(r)$, также непрерывная, положительная и монотонно возрастающая.

В условиях следующей теоремы мы можем судить о взаимоотношении классов $N_\alpha\{g(r)\}$ и $N_\alpha\{h(r)\}$

Теорема 9. *Если имеют место соотношения*

$$\frac{(k+1)^3}{[h^{-1}(k+1)]^{k+1}}\leqslant g_k,\ k=0,1,\cdots, \tag{6.10}$$

*то справедливо строгое включение*

$$N_\alpha\{h(r)\}\subset N_\alpha\{g(r)\}. \tag{6.11}$$

Доказательство. Пусть $F(z)\in N_\alpha\{h(r)\}$. Тогда из представления (5.1) теоремы 5 следует, что

$$k_\alpha(z;\ln F)=i\gamma+\lambda\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa_0}+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\varkappa_k\,\Gamma(1+k)}\,z^k e^{-ik\theta}\Bigg)\,d\psi(\theta)\ (|z|<1), \tag{6.12}$$

причем $\{\varkappa_k\}_0^{\infty}$ является последовательностью (6.7).

Учитывая, что $\psi(\theta)$—функция конечной вариации на $[-\pi, \pi]$, из (6.12) и (6.7) без труда найдем, что

$$\|k_\alpha\|_r < M_F \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3}{[h^{-1}(k+1)]^{k+1}} r^k, \tag{6.13}$$

где $M_F$ — некоторая константа, зависящая от $F(z)$.

Найдем далее такое $r_0$, что $M_F < \dfrac{1}{1-r}$ при $r_0 < r < 1$; тогда из (6.13), (6.10), (6.9)

$$\|k_\alpha\|_r < g(r) \quad (r_0 < r < 1)$$

и по предыдущей теореме $F(z) \in N_\alpha[g(z)]$, т. е. включение (6.11) доказано.

Покажем, что доказанное включение строгое. С этой целью обратим внимание на то, что функция

$$F_0(z) = \exp\left\{\frac{i}{1-z}\right\} \tag{6.14}$$

не принадлежит неванлинновскому классу $N$ функций с ограниченной характеристикой, т. е.

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left[\exp\left\{\frac{i}{1-re^{i\varphi}}\right\}\right] d\varphi = +\infty^*. \tag{6.15}$$

Отсюда следует, что

$$F_1(z) = \exp\left\{ i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3 z^k}{[h^{-1}(k+1)]^{k+1}} \right\} \overline{\in} N_\alpha\{h(r)\},$$

поскольку из (6.7) и (6.15)

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G^+_{r,\alpha}\, k_\alpha(re^{i\varphi}; \ln F_1)\, d\varphi = +\infty.$$

Однако $F_1(z) \in N_\alpha\{g(r)\}$, так как ввиду (6.10) и (6.9)

$$\|k_\alpha\|_r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3 r^k}{[g^{-1}(k+1)]^{k+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} g_k r^k \leqslant g(r) \quad (0<r<1).$$

Этим теорема полностью доказана.

Легко видеть, что если условия (6.10) выполняются, начиная лишь с некоторого места, заключение (6.11) доказанной теоремы остается в силе.

В заключение в качестве одного из приложений приведем, по-видимому, новый результат, касающийся поведения линий уровня широкого класса гармонических в круге функций.

---

* См. [5], стр. 478.

Теорема 10. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (|z|<1) \tag{6.16}$$

*— аналитическая в круге* $|z|<1$ *функция, причем* $c_k \neq 0$, $k=0, 1, \cdots$, *и сходится числовой ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|c_k|}<+\infty. \tag{6.17}$$

*Тогда, если*

$$u(z)=\operatorname{Re} f(z), \tag{6.18}$$

*то для любых* $C\,(-\infty<C<+\infty)$, $\rho\,(0<\rho<1)$ *множество*

$$D=\{z:\ u(z)=C\} \cap \{z: \rho<|z|<1\} \tag{6.19}$$

*не пусто.*

Доказательство. Не уменьшая общности, считаем, что $\operatorname{Re} c_0 \neq 0$ и $\operatorname{Im} c_0 \neq 0$ (в противном случае мы рассмотрели бы функцию $f(z)+1$ или $f(z)+i$). Поскольку тогда любая функция $f(z)-C$ $(-\infty<C<+\infty)$ удовлетворяет всем условиям теоремы, то достаточно доказать утверждение лишь для линии

$$u(z)=0. \tag{6.20}$$

Так как в силу сходимости ряда (6.17) $|c_k|>1$, $k>k_0$, то

$$\lim_{k\to\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}}=1.$$

Положим

$$\varkappa_0=\frac{1}{\operatorname{Re} c_0}, \quad \varkappa_k=\frac{2}{c_k}, \quad k=1, 2, \cdots. \tag{6.21}$$

Так как при этом $\lim\limits_{k\to\infty} |\varkappa_k|^{\frac{1}{k}}=1$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\varkappa_k|<\infty$, то можем рассмотреть класс $N_{\varkappa,0}$. Покажем, что функция $F_0(z)$ (6.14) принадлежит $N_{\varkappa,0}$. Действительно

$$|G_{\varkappa,0} k_0(z;\ \ln F)|=\left|i\sum_{k=0}^{\infty} \varkappa_k z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\varkappa_k|<+\infty,$$

и, следовательно

$$T_{\varkappa,0}(\exp k_0) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\varkappa_k|<+\infty.$$

Учитывая теперь, что согласно (6.16) и (6.21)

$$S_{\varkappa,0}(z)=\frac{1}{\varkappa_0}+2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\varkappa_k}=\operatorname{Re} c_0+\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \equiv f(z)-i\operatorname{Im} c_0,$$

по теореме 5 имеем для $F(z)$ следующее представление:

$$F_0(z) = e^{i\gamma} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(e^{-i\theta}z) - i \operatorname{Im} c_0]\, d\psi(\theta)\right\} \quad (|z|<1). \quad (6.22)$$

Предполагая, что утверждение теоремы не имеет места, мы должны принять, что при некотором $r_0$ $(0<r_0<1)$ линия (6.20) не пересекается с кольцом $r_0<|z|<1$, и, следовательно, $u(z)$ в этом кольце сохраняет определенный знак. Предположим для определенности

$$u(z)>0 \quad (r_0<|z|<1). \quad (6.23)$$

Пусть далее $\psi(\theta)=\psi_1(\theta)-\psi_2(\theta)$, где $\psi_j$ $(j=1, 2)$ — неубывающие ограниченные функции на $[-\pi, \pi]$ [6].

Положим

$$F_1(z) = e^{i\gamma} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(e^{-i\theta}z) - i \operatorname{Im} c_0]\, d\psi_2(\theta)\right\},$$

$$F_2(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(e^{-i\theta}z) - i \operatorname{Im} c_0]\, d\psi_1(\theta)\right\}.$$

Тогда согласно (6.22)

$$F_0(z)=\frac{F_1(z)}{F_2(z)} \quad (|z|<1). \quad (6.24)$$

Но ввиду (6.23), очевидно, $|F_1(z)|<1$, $|F_2(z)|<1$ в кольце $r_0<|z|<1$, а значит, по принципу максимума и всюду в круге $|z|<1$. Но тогда по теореме Р. Неванлинны [2] $F_0(z)$ принадлежит неванлинновскому классу $N$ функций с ограниченной характеристикой. Между тем, как мы уже отмечали (6.15), $F_0(z)\bar{\in} N$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим, что рассматривая функцию $f_1(z)=if(z)$, получим тот же результат для функции $v(z)=\operatorname{Im} f(z)$.

В качестве примеров функций, относительно которых заключение теоремы справедливо, можно привести функции

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{(1-z)^3}\right\},\quad \operatorname{Re}\exp\left\{\frac{1}{(1-z)^3}\right\},\quad \operatorname{Re}\exp\,\exp\left\{\frac{1}{(1-z)^3}\right\},\ \cdots.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику АН АрмССР М. М. Джрбашяну и профессору М. Г. Хапланову за внимание к данной работе и ценные замечания.

Ростовский-на-Дону государственный университет

Поступило 12.V.1969

Վ. Ս. ԱԲՐԱՄՈՎԻՉ. Շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների որոշ նոր դասերի մասին (*ամփոփում*)

*Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից* [1] *մենագրության մեջ առաջին անգամ դիտարկվել են մերոմորֆ ֆունկցիաների* $N_\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$ *կարևոր դասերը՝*

$$F(z)\in N_\alpha, \text{ եթե } \sup T_\alpha(r;F)<+\infty, \quad (1)$$

*որտեղ* $T_\alpha(r;F)$*-ը* $F(z)$ *մերոմորֆ ֆունկցիայի* $\alpha$ *խարակտերիստիկան է և հանդիսանում*

է Նևանլիննայի $T(r; F)$ խարակտերիստիկայի բնական ընդհանրացումը: Իրականացված է այդ դասերի պարամետրիզացիան, որում էական դեր են խաղում Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ներմուծված $B_\alpha(z; z_k)$ արտադրյալները, որոնք հանդիսանում են Բլյաշկեի $B(z; z_k)$ արտադրյալները ընդորում $B_\alpha(z; z_k)|_{\alpha=0} = B(z; z_k)$:

Ներկա հոդվածում ստացված է մերոմորֆ ֆունկցիաների նոր $N_{x,\alpha}$ դասերի պարամետրիզացիան: Այդ դասերը ասոցացվում են $\alpha(-1 < \alpha < +\infty)$ պարամետրի և

$$x = \{x_k\}_0^\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty, \quad \lim_{k\to\infty} |x_k|^{\frac{1}{k}} = 1, \quad \operatorname{Im} x_0 = 0 \tag{2}$$

տեսքի հաջորդականությունների հետ և բնութագրվում են $T_{x,\alpha}(r; F)$ $x, \alpha$-խարակտերիստիկայի սահմանափակությամբ՝

$$F(z) \in N_{x,\alpha} \text{ եթե } \sup_{0<r<1} T_{x,\alpha}(r, F) < +\infty: \tag{3}$$

Այս նպատակով կառուցված են (2) տեսքի հաջորդականությունների հետ ասոցացված հատուկ օպերատորներ:

## V. S. ABRAMOVICH. *On some classes of functions meromorphic in circle* (summary)

In the M. M. Džrbašian's monograph [1] important classes of meromorphic functions $N_\alpha$ $(-1 < \alpha < \infty)$ were considered for the first time

$$F(z) \in N_\alpha, \text{ if } \sup_{0<r<1} T_\alpha(r; F) < +\infty \tag{1}$$

$T_\alpha(r; F)$ —is the $\alpha$—characteristic of the meromorphic function $F(z)$ which is natyra generalization of Nevanlinna's characteristic $T(r; F)$. In the parametric representation of these classes the products $B_\alpha(z; z_k)$ introduced by M. M. Džrbašian in the above mentioned monograph are essential. These products are natural generalization of Blashke's products $B(z; z_k)$, with

$$B_\alpha(z; z_k)/_{\alpha=0} \equiv B(z; z_k).$$

In the present article paramstrization of the new classes of meromorphic functi ons $N_{x,\alpha}$) associated with the parameter $\alpha(-1 < \alpha < \infty)$ and sequences of the form

$$x = \{x_k\}_0^\infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty, \ \lim_{k\to\infty} x_k^{\frac{1}{k}} = 1, \ \operatorname{Im} x_0 = 0 \tag{2}$$

is given. These classes possess bounded $x, \alpha$ — characteristic $T_{x,\alpha}(r; F)$

$$F(z) \in N_{x,\alpha}, \text{if} \sup_{0<r<1} T_{x,\alpha}(r; F) < +\infty. \tag{3}$$

For this purpose operators of special kind, associated with sequences (2) were constructed.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Издательство „Наука", 1966.
2. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
3. *Г. Г. Геворкян*. О сходящихся последовательностях произведений $B_\alpha(z)$, Известия АН АрмССР, „Математика", 2, № 4, 1967, 235—249.
4. *И. И. Привалов*. Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.

5. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.
6. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М., 1957.
7. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Известия АН СССР, серия матем., № 5, 1968, 1075—1111.
8. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., № 8, 1969.
9. *В. С. Захарян.* О радиальных предельных значениях функции $B_\alpha$, Известия АН АрмССР, „Математика“, 3, №№ 4—5, 1968, 287—300.