И. О. ХАЧАТРИАН

О ВЕСОВОЙ ПОЛНОТЕ МНОГОЧЛЕНОВ

В работе [1] Т. Холл исследовал следующий вопрос.

Пусть на комплексной плоскости задано счетное точечное множество $E: \{z_n\}$ и на этом множестве определена произвольная функция $\varphi(z_n) = A_n > 1$ такая, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} [|z_n|^k : \varphi(z_n)] = 0, k=0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим семейство $\mathfrak{X}$ всех полиномов $p(z)$, которые на множестве $\{z_n\}$ мажорируются функцией $\varphi(z_n)$, т. е.

$$|p(z_n)| \leq A_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Обозначим

$$\psi(z) = \sup_{p \in \mathfrak{X}} |p(z)|.$$

Ставился вопрос: при каких условиях для данной точки $z \notin E$ $\psi(z) = +\infty$? Т. Холлом показано, что если дополнительное множество замыкания $\bar{E}$ обозначим через ΣD_k , где каждое D_k — открытое и связное множество, то в каждой области D_k либо $\psi(z) = +\infty$, либо $\ln \psi(z)$ — непрерывная и субгармоническая функция. При некоторых предположениях относительно расположения множества E на плоскости им были указаны достаточные условия для тождества $\psi(z) \equiv +\infty, z \notin E$. Приведем один из его результатов.

Теорема (Т. Холл). Пусть все точки z_n расположены в полуплоскости $\text{Im } z \leq -1$. Тогда условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{c_k}} = +\infty,$$

где $c_k = \sup \frac{|z_n|^k}{A_n} = \sup \frac{|z_n|^k}{\varphi(z_n)}$, влечет $\psi(z) = +\infty, z \notin E$.

Эта теорема имеет довольно общий характер в том смысле, что здесь не предполагаются определенная плотность множества $\{z_n\}$ и регулярность роста функции $\varphi(z)$. Однако отметим, что вследствие этой общности, она не гибко реагирует на плотность и распределение точек z_n на плоскости. Например, если в качестве множества E взять множество $\{\pm n^2\}$, а $\varphi(z) = \exp 2|z|^p$, то будем иметь $c_k = k^{2k} e^{-2k}$ и следовательно условие Т. Холла не выполняется, хотя в этом случае, как мы убедимся ниже, $\psi(z) \equiv +\infty, z \notin E$.

В настоящей заметке, предполагая, что функция $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ имеет нормальный рост и что $\lim |z_n| = +\infty$, устанавливается связь между плотностью множества $\{z_n\}$ и ростом функции φ , обеспечивающая выполнение тождества $\psi(z) \equiv +\infty$, $z \notin E$. При этом существенную роль будет играть критерий С. Н. Мергеляна, состоящий в том, что тождество $\psi(z) \equiv +\infty$, $z \notin E$ эквивалентно полноте многочленов в весовом пространстве $C_{\frac{\varphi(t)}{1+t}}$ [2].

Далее в заметке устанавливается теорема об одновременной весовой аппроксимации непрерывных функций многочленами на лучах комплексной плоскости и на данном дискретном множестве точек, удаляющихся в бесконечность.

1°. Перейдем к изложению нашего результата.

Теорема 1. Пусть точечное множество $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям

$$1. \lim |z_n| = +\infty;$$

2. Существует стремящаяся к бесконечности последовательность концентрических колец $K_{r_n^*, r_n}$: $r_n < |z| < r_n^*$ с центром в начале координат, не содержащих точек множества E и таких, что $r_n^* - r_n > \delta > 0$.

Пусть на множестве E определена нормально возрастающая функция $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \varphi(|z|) = \exp p(r) = \exp \int_1^r \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad \omega(t) \uparrow +\infty, \quad r = |z|. \quad (*)$$

Пусть далее $n(t)$ означает число точек z_n , попадающих в круг $|z| \leq t$, и, наконец,

$$N(r) = \int_1^r \frac{n(t)}{t} dt.$$

Тогда условие

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} [N(r) - p(r) + 2 \ln r] = -\infty \quad (1)$$

влечет

$$\psi(z) \equiv +\infty, \quad z \notin E.$$

Доказательство. Согласно критерию С. Н. Мергеляна достаточно доказать, что полиномы составляют всюду плотное множество в пространстве $C_{\frac{\varphi}{1+|z|}}$, то есть доказать, что любой линейный функционал, обращающийся в нуль на многочленах, есть тождественный нуль.

Пусть F — произвольный такой функционал: $F[t^k] = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда будем иметь также

$$F[(t^k - z^k)(t - z)^{-1}] = 0, \quad t \in E, z \notin E \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

или

$$F\left[\frac{t^k}{t-z}\right] = z^k F\left[\frac{1}{t-z}\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначая через $V(z) = F\left[\frac{1}{t-z}\right]$ и замечая, что согласно общему виду линейного функционала в $C_{\frac{\varphi}{1+|f|}}(E)$

$$F\left[\frac{t^k}{t-z}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n z_n^k (1+|z_n|)}{(z_n - z) \varphi(z_n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty,$$

будем иметь

$$|V(z)| \leq \frac{1}{|z|^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+|z_n|) |\alpha_n| |z_n|^k}{|z_n - z| \varphi(z_n)}. \quad (2)$$

Обозначая через

$$c_k = \sup_{n>1} \frac{|z_n|^k}{\varphi(z_n)}$$

и замечая, что $\frac{1+|z_n|}{|z_n - z|} \leq \frac{|z|}{\delta}$ при $z \in K_{r'_m, r''_m}$, из (2) получим

$$|V(z)| \leq \frac{c_k}{|z|^k} \frac{|z|}{\delta} \sum |\alpha_n| \leq C \frac{|z|}{\delta} \frac{c_k}{|z|^k}, \quad z \in K_{r'_m, r''_m}. \quad (3)$$

Левая часть неравенства (3) не зависит от k , следовательно

$$|V(z)| \leq c_1 \cdot |z| \cdot \inf_k \frac{c_k}{|z|^k} = \frac{c_1 \cdot |z|}{T(|z|)}, \quad z \in K_{r'_m, r''_m}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $T(r)$ — функция Островского:

$$T(r) = \sup_k \frac{r^k}{c_k}.$$

Покажем, что

$$T(r) > \frac{1}{r} \exp p(r). \quad (5)$$

С этой целью на плоскости $хоу$, $x = \ln r$ рассмотрим ломаную $y = \sup_n (n \ln r - \ln c_n)$, которая представляет график функции $y = \ln T(r)$, рассматриваемой как функцию от $\ln r$. Эта ломаная подпирает график функции $y = p(r)$ (как функция от $\ln r$) и очевидно, что

$$\left| \frac{d \ln T(r)}{d \ln r} - \frac{dp(r)}{d \ln r} \right| \leq 1,$$

поэтому

$$\ln T(r) > p(r) - \ln r.$$

Из (4) и (5) следует оценка

$$|V(z)| \leq c_1 |z|^2 e^{-\rho(|z|)}, \quad z \in K_{r_m, r_m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Функция

$$V(z) \equiv F \left[\frac{1}{t-z} \right] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|z_n|}{(z_n-z) \varphi(z_n)}$$

мероморфна во всей плоскости и множество ее полюсов включается в множество E . Покажем, что из (1) и (6) следует, что $F(z) \equiv 0$. В самом деле, в противном случае применяя формулу Иенсена к функции $V(z)$, получим

$$\int_1^r \frac{n(t)}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |V(re^{i\theta})| d\theta > O(1)$$

или, беря $r = r_m = \frac{1}{2}(r_m' + r_m'')$ и учитывая оценку (6), будем иметь

$$N(r_m) + 2 \ln r_m - \rho(r_m) > O(1), \quad m = 1, 2, \dots,$$

что противоречит условию (1) теоремы. Таким образом, $F(z) \equiv 0$, т. е. $a_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, и следовательно функционал $F \equiv 0$, Теорема 1 доказана. Отметим следующее очевидное

Следствие. Если $n(t) < (1-\varepsilon)\omega(t)$, $\varepsilon > 0$, то $\psi(z) \equiv +\infty$, $z \in E$, или, другими словами, система полиномов полна в $C_{\frac{\varphi}{1+|t|}}(E)$.

Следующая теорема дает некоторое представление о точности приведенного следствия.

Теорема 2. Пусть заданная весовая функция $\varphi(r)$ имеет вид

$$\varphi(r) = \exp \left[\int_1^r \frac{\omega(t)}{t} dt + 1 \right] = \exp r^{\rho(r)}, \quad (7)$$

где $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок и $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho > 0$. Для данного $\varepsilon > 0$ можно построить такое дискретное точечное множество $E = \{z_n\}$, функция плотности которого удовлетворяет неравенству

$$n(r) < (1+\varepsilon)\omega(r), \quad r > r_0, \quad (8)$$

однако $\psi(z) < +\infty$ во всей плоскости.

Доказательство. Возьмем натуральное число $m > \rho$ так, чтобы

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \rho}{4m} < \sqrt{1+\varepsilon} \frac{\pi \rho}{4m}. \quad (9)$$

На луче $\arg z = 0$ возьмем точечное множество $\{x_n\}$, $0 < x_1 < \dots < x_n < \dots$, плотность которого при показателе $r^{\rho(r)}$ равна $\frac{1}{\pi} \sqrt{1+\varepsilon} \times$

$\times \operatorname{tg} \frac{\pi \rho}{4m}$, т. е.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_1(r)}{r^\rho(r)} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{4m},$$

где $n_1(r)$ означает число точек x_k в интервале $[0, r]$. Теперь в качестве требуемого множества E возьмем множество $\left\{ \bigcup_{j=1}^{4m} x_n e^{i \frac{\pi j}{2m}} \right\}$. Функция плотности множества E вследствие условия (9) удовлетворяет неравенству

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r)}{r^\rho(r)} = 4m \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{4m} < (1+\varepsilon) \rho. \quad (10)$$

Из (7) имеем

$$\begin{aligned} \omega(r) &= r [r^\rho(r)]' = r^\rho(r) [\rho(r) + r\rho'(r) \ln r] = \\ &= \rho r^\rho(r) \left[\frac{\rho(r)}{\rho} + \frac{1}{\rho} r\rho'(r) \ln r \right] = \rho r^\rho(r) \cdot \psi(r) \quad (\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi(r) = 1). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) и (10) следует, что плотность множества E удовлетворяет неравенству (8).

Теперь докажем, что полиномы, имеющие мажоранту (7) на E , составляют нормальное семейство на плоскости. С этой целью рассмотрим каноническую функцию $f(z)$ множества E и ее индикатор $H_f(\vartheta)$. Предполагая, что ρ — нецелое число, по формуле ([3], стр. 120)

для индикатора $H_f(\vartheta)$ при $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2m}$ будем иметь

$$\begin{aligned} H_f(\vartheta) &= \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sin \pi\rho} \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{4m} \sum_{j=1}^{4m} \cos \rho \left(\frac{\pi}{2m} j - \vartheta - \pi \right) = \\ &= \sqrt{1+\varepsilon} \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{4m} \frac{\cos \rho \left(\vartheta - \frac{\pi}{4m} \right)}{\sin \frac{\pi\rho}{4m}} = \sqrt{1+\varepsilon} \frac{\cos \rho \left(\vartheta - \frac{\pi}{4m} \right)}{\cos \rho \frac{\pi}{4m}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко видеть, что при целом ρ это равенство также сохраняется.

Из (12) имеем, что при $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2m}$ $H_f(\vartheta) > 0$.

Учитывая симметричное расположение корней целой функции $f(z)$, будем иметь

$$H_f(\vartheta) > 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad (13)$$

$$H_f \left(\frac{\pi}{2m} j \right) = \sqrt{1+\varepsilon}, \quad j = 1, 2, \dots, 4m.$$

Так как для любого многочлена $p(z)$ имеем $H_p(\vartheta) \equiv 0 < H_f(\vartheta)$, то можно применить теорему Б. Я. Левина о представлении целой функции интерполяционным рядом Лагранжа [3]

$$p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(z_n) f(z)}{f'(z_n)(z-z_n)}. \quad (14)$$

Далее, учитывая асимптотическое равенство [3]

$$\ln |f'(z_n)| \approx \sqrt{1 + \varepsilon} |z_n|^{\rho(z_n)},$$

из (14) получим, что если $p \in \mathfrak{R}$, то

$$|p(0)| \leq |f(0)| \cdot \sum \frac{|p(z_n)|}{|f'(z_n)| \cdot |z_n|} \leq c \sum \frac{1}{|z_n|} e^{|z_n|^{\rho(z_n)}(1-\sqrt{1-\varepsilon})} < c_1, \quad (15)$$

где c_1 — константа, не зависящая от полинома $p \in \mathfrak{R}$.

Из (15) следует, что $\psi(0) < +\infty$. Согласно цитированному в начале заметки свойству $\psi(z)$ имеем $\psi(z) < +\infty$. Теорема 2 доказана.

В заключение этого пункта приведем одно применение теоремы 1 в вопросе квазианалитичности специальных классов бесконечно дифференцируемых функций, введенных Б. Я. Левиным*.

Пусть имеем пространство $C_{\varphi}(-\infty, +\infty)$. Возьмем произвольный функционал F из сопряженного пространства и рассмотрим функцию

$$f(x) = F[e^{ix}] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{d\varphi(t)}{\varphi_1(t)}, \quad (16)$$

где $\varphi_1(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|t-\tau| < \delta} \varphi(\tau)$.

Нетрудно проверить, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на оси $-\infty < x < +\infty$. Если теперь функционал F будет пробегать все сопряженное пространство, то формулой (16) определится некоторый класс бесконечно дифференцируемых на оси $(-\infty, +\infty)$ функций, который мы обозначим через Λ_{φ} . Класс Λ_{φ} назовем квазианалитическим, если для двух произвольных функций $f_1(x), f_2(x) \in \Lambda_{\varphi}$ из условий

$$f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 \in (-\infty, +\infty)$$

вытекает, что $f_1(x) \equiv f_2(x)$.

Имеет место следующая основная

Теорема (Б. Я. Левин). Класс Λ_{φ} будет квазианалитическим тогда и только тогда, когда полиномы составляют всюду плотное множество в $C_{\varphi}(-\infty, +\infty)$.

Отметим, что в этой теореме не делается никаких предположений о регулярности роста функции φ .

Беря в частности функцию φ в виде

$$\varphi(t) = \begin{cases} +\infty, & n < |t| < n+1 \\ \exp p(n), & |t| = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $p(r) = \int_1^r t^{-1} \omega(t) dt$, $\omega(t) \uparrow +\infty$, и замечая, что в этом случае

* Результаты Б. Я. Левина по весовым приближениям и их применениям не опубликованы. Они приведены в его спец. курсе, прочитанном им в 1957/58 уч. году в Харьковском государственном университете.

полнота полиномов в $C_T(-\infty, +\infty)$ эквивалентна расходимости интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{p(r)}{r^2} dr, \quad (17)$$

получим известную теорему Валле-Пуссена [4] о квазианалитичности класса функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \sum_0^{\infty} e^{-p(n)} [a_n \cos nx + b_n \sin nx], \quad \sum_0^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty. \quad (18)$$

Предположим теперь, что интеграл (17) сходится, то есть класс (18) не является квазианалитическим, и поставим вопрос о нахождении нетривиальных квазианалитических подклассов неквазианалитического класса (18). Ответ на этот вопрос, как обычно [4], дается в терминах плотности отличных от нуля коэффициентов a_n, b_n .

Возьмем произвольную последовательность целых чисел $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \dots$, и рассмотрим следующий подкласс $\Lambda_T(n_k)$ класса (18):

$$f(x) = \sum e^{-p(n_k)} (a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x), \quad \sum (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) < +\infty. \quad (19)$$

Следующее утверждение является непосредственным применением следствия теоремы 1 и теоремы Б. Я. Левина.

Теорема 3. Если функция плотности $n_1(t)$ множества $\{n_k\}$ удовлетворяет неравенству

$$n_1(t) < \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \omega(t), \quad \varepsilon > 0,$$

то подкласс $\Lambda_\varepsilon(n_k)$ — квазианалитический.

Пусть теперь $\{n_k^{(a)}\}$ — зависящая от параметра a возрастающая последовательность целых чисел. Обозначим через $n_a(t)$ функцию плотности множества $\{n_k^{(a)}\}$ и рассмотрим теоретикомножественную сумму классов $\Lambda_T(n_k^{(a)})$:

$$\Lambda_T = \cup \Lambda_T(n_k^{(a)}).$$

Отметим, что это не линейное множество.

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ и для всех рассматриваемых значений параметра a

$$n_a(t) \leq \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) \omega(t),$$

то класс Λ_T — квазианалитический.

2°. Одновременная аппроксимация на лучах и на данном дискретном множестве точек комплексной плоскости. Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{M}$ полиномов $p(z)$, мажорирующихся на вещественной оси $-\infty < x < +\infty$ и на данном множестве $E = \{z_n\}$ функцией $\varphi(x)$ и значениями $\varphi(|z_n|)$ соответственно, т. е.

$$|p(x)| \leq \varphi(x), \quad |p(z_n)| \leq \varphi(|z_n|). \quad (20)$$

Приведем достаточное условие для того, чтобы соответствующий функционал

$$\psi(z) \equiv +\infty, \quad \text{Im } z \neq 0, \quad z \neq z_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Мы предположим, что $\lim |z_n| = +\infty$, а плотность точек множества E , лежащих в верхней (нижней) полуплоскости, будем характеризовать функцией $\nu_1(t)$ ($\nu_2(t)$)—числом точек z_n , $\text{Im } z_n > 0$ ($\text{Im } z_n < 0$), попадающих в область $\left|z - i\frac{t}{2}\right| \leq \frac{t}{2}$ ($\left|z + i\frac{t}{2}\right| \leq \frac{t}{2}$), $|z| \leq 1$.

Теорема 5. Предположим, что существует последовательность луночек

$$L_{r_n', r_n''}: \left|z - i\frac{r_n'}{2}\right| < \frac{r_n'}{2}, \quad \left|z - i\frac{r_n''}{2}\right| \geq \frac{r_n''}{2}, \quad \inf (r_n' - r_n'') > \delta > 0$$

в верхней полуплоскости и такая же (но возможно другая) последовательность луночек в нижней полуплоскости, не содержащих точек множества E .

Если функция $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ нормально возрастающая, т. е. представляется в виде (*), то из (20) и из условий

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\int_1^r \frac{\nu_1(t)}{t^2} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin \frac{1}{r}} p(r \sin \theta) \frac{d\theta}{r \sin^2 \theta} \right] = -\infty, \quad (22)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\int_1^r \frac{\nu_2(t)}{t^2} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin \frac{1}{r}} p(r \sin \theta) \frac{d\theta}{r \sin^2 \theta} \right] = -\infty \quad (23)$$

следует тождество (21).

Доказательство. Согласно критерию С. Н. Мергеляна достаточно доказать, что полиномы составляют всюду плотное множество в $C_\varphi [(-\infty, +\infty) \cup E]$, т. е. надо доказать, что произвольный линейный непрерывный функционал, обращающийся в нуль на степенях t^n , $n = 0, 1, 2, \dots$, есть тождественный нуль. Пусть F —произвольный такой функционал: $F[t^n] = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда, как и в предыдущем пункте, обозначая через $V(z) = F\left[\frac{1}{t-z}\right]$, получим

$$z^k V(z) = F\left[\frac{t^k}{t-z}\right]. \quad (24)$$

Из общего вида линейного функционала в $C_{\varphi}[(-\infty, +\infty) \cup E]$ имеем

$$F \left[\frac{t^k}{t-z} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^k}{t-z} \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n^k}{z_n - z} \frac{a_n}{\varphi(z_n)}, \quad (25)$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $(-\infty, +\infty)$, а $\sum |a_n| < +\infty$. Обозначая через $c_k = \sup \frac{r^k}{\varphi(r)}$, из (24) и (25) получим оценку

$$|V(z)| \leq \text{const} \frac{c_k}{|z|^k \delta(z)}, \quad (26)$$

где $\delta(z)$ — расстояние точки z до множества $(-\infty, +\infty) \cup E$.

Из (26), как в предыдущем пункте, получим

$$|V(z)| \leq \frac{c}{\delta(z)} e^{-\rho(|z|)}.$$

Беря теперь z на дуге $\left| z - i \frac{r_m + \bar{r}_m}{2} \right| = \frac{r_m + \bar{r}_m}{2}$, $|z| > 1$ и при этом замечая, что $\delta(z) > \frac{c}{|z|^2}$, будем иметь

$$|V(z)| \leq c |z|^3 e^{-\rho(|z|)}, \quad \left| z - i \frac{r_m + \bar{r}_m}{2} \right| = \frac{r_m + \bar{r}_m}{2}, \quad |z| > 1, \quad m=1, 2, \dots \quad (27)$$

Функция

$$V(z) = F \left[\frac{1}{t-z} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{(t-z)\varphi(t)} + \sum \frac{a_n}{(z_n - z)\varphi(z_n)} \quad (28)$$

мероморфна в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ с возможными полюсами в точках $z = z_n$, $\text{Im } z_n > 0$. Докажем, что $V(z) \equiv 0$ в полуплоскости $\text{Im } z > 0$. В самом деле, в противном случае, применяя к $V(z)$ формулу Б. Я. Левина [5, 6], будем иметь

$$\int_1^r \frac{y_1(t)}{t^2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin \frac{1}{r}} \ln |V(r \sin \vartheta e^{i\vartheta})| \frac{d\vartheta}{r \sin^2 \vartheta} > O(1). \quad (29)$$

Из (29) и (27), имея в виду, что

$$\int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin \frac{1}{r}} \frac{d\vartheta}{r \sin^2 \vartheta} = O(1), \quad \int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin \frac{1}{r}} \ln (r^3 \sin^3 \vartheta) \frac{d\vartheta}{r \sin^2 \vartheta} = O(1),$$

получим

2°. Одновременная аппроксимация на лучах и на данном дискретном множестве точек комплексной плоскости. Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{M}$ полиномов $p(z)$, мажорирующихся на вещественной оси $-\infty < x < +\infty$ и на данном множестве $E = \{z_n\}$ функцией $\varphi(x)$ и значениями $\varphi(|z_n|)$ соответственно, т. е.

$$|p(x)| \leq \varphi(x), \quad |p(z_n)| \leq \varphi(|z_n|). \quad (20)$$

Приведем достаточное условие для того, чтобы соответствующий функционал

$$\psi(z) \equiv +\infty, \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad z \neq z_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Мы предположим, что $\lim |z_n| = +\infty$, а плотность точек множества E , лежащих в верхней (нижней) полуплоскости, будем характеризовать функцией $\nu_1(t)$ ($\nu_2(t)$)—числом точек z_n , $\operatorname{Im} z_n > 0$ ($\operatorname{Im} z_n < 0$), попадающих в область $\left|z - i \frac{t}{2}\right| \leq \frac{t}{2}$ ($\left|z + i \frac{t}{2}\right| \leq \frac{t}{2}$), $|z| \leq 1$.

Теорема 5. *Предположим, что существует последовательность луночек*

$$L_{r'_n, r''_n}: \left|z - i \frac{r'_n}{2}\right| \leq \frac{r'_n}{2}, \quad \left|z - i \frac{r''_n}{2}\right| \geq \frac{r''_n}{2}, \quad \inf (r'_n - r''_n) \geq \delta > 0$$

в верхней полуплоскости и такая же (но возможно другая) последовательность луночек в нижней полуплоскости, не содержащих точек множества E .

Если функция $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ нормально возрастающая, т. е. представляется в виде (), то из (20) и из условий*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\int_1^r \frac{\nu_1(t)}{t^2} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{arc} \sin \frac{1}{r}}^{\pi - \operatorname{arc} \sin \frac{1}{r}} p(r \sin \vartheta) \frac{d\vartheta}{r \sin^2 \vartheta} \right] = -\infty, \quad (22)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\int_1^r \frac{\nu_2(t)}{t^2} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{arc} \sin \frac{1}{r}}^{\pi - \operatorname{arc} \sin \frac{1}{r}} p(r \sin \vartheta) \frac{d\vartheta}{r \sin^2 \vartheta} \right] = -\infty \quad (23)$$

следует тождество (21).

Доказательство. Согласно критерию С. Н. Мергеляна достаточно доказать, что полиномы составляют всюду плотное множество в $C_\varphi [(-\infty, +\infty) \cup E]$, т. е. надо доказать, что произвольный линейный непрерывный функционал, обращающийся в нуль на степенях t^n , $n = 0, 1, 2, \dots$, есть тождественный нуль. Пусть F —произвольный такой функционал: $F[t^n] = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда, как и в предыдущем пункте, обозначая через $V(z) = F \left[\frac{1}{t-z} \right]$, получим

$$z^k V(z) = F \left[\frac{t^k}{t-z} \right]. \quad (24)$$

Из общего вида линейного функционала в $C_p [(-\infty, +\infty) \cup E]$ имеем

$$F \left| \frac{t^k}{t-z} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^k}{t-z} \frac{d\tau(t)}{\varphi(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n^k}{z_n-z} \frac{a_n}{\varphi(z_n)}, \quad (25)$$

где $\tau(t)$ — функция ограниченной вариации на $(-\infty, +\infty)$, а $\sum |a_n| < +\infty$. Обозначая через $c_k = \sup \frac{r^k}{\varphi(r)}$, из (24) и (25) получим оценку

$$|V(z)| \leq \text{const} \frac{c_k}{|z|^k \delta(z)}, \quad (26)$$

где $\delta(z)$ — расстояние точки z до множества $(-\infty, +\infty) \cup E$.

Из (26), как в предыдущем пункте, получим

$$|V(z)| \leq \frac{c}{\delta(z)} e^{-\rho(|z|)}.$$

Беря теперь z на дуге $\left| z - i \frac{r_m + r_m'}{2} \right| = \frac{r_m + r_m'}{2}$, $|z| > 1$ и при этом за-

мечаая, что $\delta(z) > \frac{c}{|z|^2}$, будем иметь

$$|V(z)| \leq c |z|^3 e^{-\rho(|z|)}, \quad \left| z - i \frac{r_m - r_m'}{2} \right| = \frac{r_m + r_m'}{2}, \quad |z| > 1, \quad m=1, 2, \dots \quad (27)$$

Функция

$$V(z) = F \left[\frac{1}{t-z} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{(t-z)\varphi(t)} + \sum \frac{a_n}{(z_n-z)\varphi(z_n)} \quad (28)$$

мероморфна в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ с возможными полюсами в точках $z = z_n$, $\text{Im } z_n > 0$. Докажем, что $V(z) \equiv 0$ в полуплоскости $\text{Im } z > 0$. В самом деле, в противном случае, применяя к $V(z)$ формулу Б. Я. Левина [5, 6], будем иметь

$$\int_1^r \frac{y_1(t)}{t^2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin \frac{1}{r}} \ln |V(r \sin \theta e^{i\theta})| \frac{d\theta}{r \sin^2 \theta} > O(1). \quad (29)$$

Из (29) и (27), имея в виду, что

$$\int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin \frac{1}{r}} \frac{d\theta}{r \sin^2 \theta} = O(1), \quad \int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin \frac{1}{r}} \ln (r^3 \sin^3 \theta) \frac{d\theta}{r \sin^2 \theta} = O(1),$$

получим

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\int_1^r \frac{v_1(t)}{t^2} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin \frac{1}{r}} p(r \sin \vartheta) \frac{d\vartheta}{r \sin^2 \vartheta} \right] > C > -\infty,$$

что противоречит условию (22). Таким образом, $V(z) \equiv 0$, $\operatorname{Im} z > 0$. Аналогично доказывается, что $V(z) \equiv 0$, $\operatorname{Im} z < 0$. Тогда из (28) следует, что $a_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$ и $d\sigma(t) \equiv 0$, $-\infty < t < +\infty$, т. е. $F \equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. Известно [7], [8], что если функция $\varphi(t) = \varphi(|t|) = \exp p(t)$ — нормально возрастающая, то необходимым и достаточным условием полноты полиномов в $C_{\varphi}(-\infty, +\infty)$ является расходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{p(r)}{1+r^2} dr$$

(достаточность этого условия следует также из теоремы 5). Отсюда следует, что если вес $\varphi(t)$ обеспечивает полноту полиномов в $C_{\varphi}(-\infty, +\infty)$, то любая ее положительная степень $\varphi^2(t) = \exp 2p(t)$ также обеспечивает полноту полиномов в соответствующем пространстве $C_{\varphi^2}(-\infty, +\infty)$. Это означает, что на свойство полноты многочленов константа α не имеет влияния. Из теоремы 5 следует, что если к множеству $(-\infty, +\infty)$ присоединить еще дискретное множество $\{z_n\}$, то полнота полиномов в $C_{\varphi^2}([(-\infty, +\infty) \cup \{z_n\}])$, вообще говоря, зависит от параметра $\alpha > 0$.

Используя теорему единственности для мероморфных в угловой области функций, можно получить достаточное условие для одновременной весовой аппроксимации на лучах в комплексной области и на данном дискретном множестве точек. Мы приведем без доказательства теорему для того случая, когда аппроксимация совершается на координатных осях и на дискретном множестве $\{z_n\}$.

Теорема 6. Пусть множество $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям

1. $\lim |z_n| = +\infty$;
2. $\inf \operatorname{Re} z_n, \inf \operatorname{Im} z_n \geq \delta > 0$;
3. В каждом угле $j \frac{\pi}{2} < \arg z < (j+1) \frac{\pi}{2}$, $j=0, 1, 2, 3$ существует последовательность четверть колец $r_{n,i} < |z| < r_{n,i}^*$, не содержащих точек множества $\{z_n\}$ и таких, что $\inf (r_{n,i}^* - r_{n,i}) = \delta_i > 0$ ($i=0, 1, 2, 3$). Тогда из условий

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\sum_{\substack{1 < |z_k| < r \\ \frac{\pi}{2} < \arg z_k < (j+1)\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{|z_k|^2} - \frac{|z_k|^2}{r^4} \right) |\sin 2\alpha_k| - \frac{4}{\pi} \int_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{r^4} \right) \frac{p(t)}{t^2} dt - \frac{4}{\pi r^2} p(r) \right] = -\infty, \quad \alpha_k = \arg z_k, \quad j=0, 1, 2, 3$$

следует, что полиномы всюду плотны в $C_{\varphi} [(-\infty, +\infty) \cup (-i\infty, +i\infty) \cup \{z_n\}]$.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Б. Я. Левину за обсуждение и ценные указания.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 28.VII.1969

Ի. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Բազմանդամների կշռային լրիվության մասին (ամփոփում)

Հոդվածում քննարկված է բազմանդամների լրիվության հարցը. $C_{\varphi}(E)$ տարածությունում, որտեղ E -ն կոմպլեքս հարթության $\{z_n\}$ կետային բազմությունն է, և $\lim |z_n| = +\infty$, իսկ $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ ֆունկցիան նորմալ աճող է, այսինքն ներկայացվում է հետևյալ տեսքով

$$\varphi(z) = \exp p(r) = \exp \int_1^r \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad \omega(t) \uparrow +\infty, \quad |z| = r.$$

Ապացուցվում է մի թեորեմ, որից հետևում է, որ եթե որեէ $\varepsilon > 0$ թվի համար $\{z_n\}$ բազմության $n(t)$ ֆունկցիան բավարարում է $n(t) < (1 - \varepsilon) \omega(t)$ պայմանին, ապա բազմանդամները ամենուրեք խիտ են $C_{\varphi}(E)$ -ում:

Թերմում է մի կիրառությունն անվերջ դիֆերենցիալի ֆունկցիաների մի դասի քվադրանտիտիվության հարցում:

Դիտարկված է նաև առանցքի և ալիս կետային բազմության վրա միաժամանակյա կշռային մոտավորության հարցը:

I. H. KCHACHATRIAN. On the weight completeness of polynoms (summary)

The polynoms in the space $C_{\varphi}(E)$ are investigated. Here E is a discret set $\{z_n\}$ on the complex plain with $\lim |z_n| = +\infty$, and the function $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ is normally increasing, that is

$$\varphi(z) = \exp p(r) = \exp \int_1^r \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad \omega(t) \uparrow +\infty, \quad |z| = r.$$

It is proved, that if for some $\varepsilon > 0$ the density function $n(t)$ of the set $\{z_n\}$ satisfies the condition

$$n(t) \leq (1 - \varepsilon) \omega(t),$$

then polynoms are everywhere dence in $C_{\varphi}(E)$.

The simultaineous approximation on the axis and on the given discret set is also discussed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *T. Hall*. On polynomials bounded at an infinity of points, Uppsala, 1950.
2. *С. Н. Мерелян*. Весовые приближения многочленами, УМН, XI, вып. 5 (71), 1956, 107—152.
3. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, Москва, 1956.
4. *S. Mandelbrojt*. Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, Paris 1935.
5. *Б. Я. Левин*. О функциях, голоморфных в полуплоскости, Труды Одесского державного ун-та, 3, 1941, 5—14.
6. *Б. Я. Левин и И. В. Островский*. О зависимости роста целой функции от расположения нулей ее производных, Сиб. мат. жур., 1, № 3, 1960, 427—45.
7. *М. М. Джрбашян*. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Мат. сб., 36, вып. 3, 1955, 353—440.
8. *А. Л. Шацкиян*. О полноте семейств аналитических функций в комплексной области, Сообщения Института мат. и мех. АН АрмССР, вып. 1, 1947.