ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 5, 1969 Математика

Б. И. ОРЕХОВ, М. Г. ХАПЛАНОВ

О БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОБРАЗОВАННЫХ РЕШЕНИЯМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 2-го ПОРЯДКА

Известно, что полиномы Лежандра образуют базис в пространстве функций, аналитических в любом фиксированном эллипсе с фокусами в точках -1 и 1 (К. Нейман, 1862 г., см. [1], стр. 138), а функции Бесселя целых порядков—в любом круге с центром в начале координат (К. Нейман, 1867 г., см. [1], стр. 215). Метод К. Неймана Фольк [2] применил для установления базисности системы решений уравнения

$$p_0(z)\,y'' + p_1(z)\,y' + p_2(z)\,y + \lambda^2 y = 0 \tag{1}$$

с полиномиальными коэффициентами в определенных некоторым образом областях, содержащих только два простых корня коэффициента $p_0(z)$. В настоящей статье получены некоторые новые обобщения.

Пусть в уравнении (1) $p_0(z)$, $p_1(z)$, $p_2(z)$—функции, аналитические в области D. Известно, что замена переменных

$$t = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{d\tau}{\sqrt{p_0(\tau)}}, \tag{2}$$

$$y(z) = u(t)\,\gamma(z),\ \gamma(z) = [p_0(z)]^{\frac{1}{4}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z} \frac{p_1(\tau)}{p_0(\tau)}\,d\tau\right] \tag{3}$$

(интегрирование ведется по пути, соединяющему точки z_0 и z, лежащему в области D и не проходящему через корни функции $p_0(z)$) приводит уравнение (1) к виду

$$u''(t) + [T(z) + \lambda^2]\,u(t) = 0; \tag{4}$$

здесь $T(z)$—дробь, у которой знаменатель равен $[p_0(z)]^2$, а числитель есть полином от $p_0(z)$, $p_1(z)$, $p_2(z)$ и их производных не выше 2-го порядка; в уравнении (4) под z в $T(z)$, очевидно, мыслится $z = \Phi(t)$—обращение интеграла (2).

Условимся через L обозначать гладкие замкнутые простые контуры, обходящие один раз против часовой стрелки фиксированные $2l$ корня—и никакие другие—функции $p_0(z)$ (с учетом их кратности). Через $D(L_1, L_2)$ будем обозначать двусвязную область, ограниченную двумя непересекающимися контурами L_1 и L_2; в силу определения кривых L в области $D(L_1, L_2)$ нет ни одного корня функции $p_0(z)$. Пусть $D(L_1, L_2;\ a_1, a_2)$ есть односвязная область, получаемая из $D(L_1, L_2)$ с помощью разреза из точки $a_1 \in L_1$ в точку $a_2 \in L_2$; будем при этом предполагать, что линии L пересекают разрез (a_1, a_2) только в одной точке. Обозначая через c точку пересечения кривой L с разрезом (a_1, a_2), будем под $L(c, c')$ понимать кривую L от точки c на одном краю разреза до точки c' на другом краю, включая концы c и c', пробегаемую против часовой стрелки.

Рассмотрим преобразование (2) в области $D(L_1, L_2; a_1, a_2)$, предполагая, что путь интегрирования от z_0 до z лежит в этой области. Интеграл не зависит от выбора пути интегрирования и выражает однозначную в области $D(L_1, L_2; a_1, a_2)$ функцию

$$t = \psi(z) \equiv \int_{z_0}^{z} \frac{d\tau}{\sqrt{p_0(\tau)}}. \tag{2}$$

Однако функция $\psi(z)$, $z \in D(L_1, L_2; a_1, a_2)$ не обязательно однолистна, и потому образ G области D, получаемый отображением (2), может быть многолистной областью. Область G ограничена дугой A_1A_2 — образом одного края разреза (a_1, a_2), дугой $A_1' A_2'$ — образом другого края, и дугами $A_1 A_2'$ и $A_2 A_2'$ — образами контуров $L_1(c_1, c_1')$ и $L_2(c_2, c_2')$. Очевидно дуга $A_1' A_2'$ получается из A_1A_2 сдвигом на вектор η, где

$$\eta = \int_{L} \frac{d\tau}{\sqrt{p_0(\tau)}}. \tag{5}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется

Условие A: Область $D(L_1, L_2; a_1, a_2)$ такова, что $\eta \neq 0$, и существует кривая $L_0(c, c') \in D(L_1, L_2; a_1, a_2)$, которая функцией $t = \psi(z)$ взаимно однозначно отображается в вектор $\eta = CC'$, где C — образ точки c, C' — точки c'.

Докажем лемму.

Лемма. *При выполнении условия A в области $D(L_1, L_2; a_1, a_2)$ можно выбрать такую подобласть $\tilde{D}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2; a_1, a_2)$, содержащую кривую L_0, которая функцией $t = \psi(z)$ отображается в некоторую область $\tilde{G}$ взаимно однозначно.*

Предположим противное. Пусть в любой подобласти $\tilde{D}$, содержащей кривую L_0, функция $\psi(z)$ не однолистна, и пусть $L_1^{(1)}$ и $L_2^{(1)}$ — две кривые, лежащие по разные стороны от L_0. Область $D^{(1)} = D(L_1^{(1)}, L_2^{(1)}; a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$ отображается, согласно предположению, в $G^{(1)}$ не однолистно. Следовательно, в $D^{(1)}$ есть точки z_1 и z_1' такие, что $\psi(z_1) = \psi(z_1')$, $z_1 \neq z_1'$. Обе точки z_1 и z_1' не могут лежать на L_0, так как L_0 переходит в CC' взаимно однозначно.

Возьмем подобласть $D^{(2)} = D(L_1^{(2)}, L_2^{(2)}; a_1^{(2)}, a_2^{(2)})$ области $D^{(1)}$ такую, что в ней не лежит ни одна из точек z_1 и z_1' — в том случае, когда ни z_1, ни z_1' не лежат на L_0, а в противном случае пусть в $D^{(2)}$ не лежит точка, находящаяся вне L_0.

Согласно предположению $D^{(2)}$ также переходит в свой образ $G^{(2)}$ не однолистно. Следовательно, в $D^{(2)}$ имеются точки z_2 и z_2', $z_2 \neq z_2'$ такие, что $\psi(z_2) = \psi(z_2')$. Продолжая так рассуждать, получим бесконечную последовательность областей $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}, \cdots$, вложенных друг в друга; всегда можно выбрать их так, что они стягиваются к кривой L_0. В каждой области $D^{(k)}$ имеются точки z_k и z_k', $z_k \neq z_k'$ такие, что $\psi(z_k) = \psi(z_k')$. Выберем подпоследовательность индексов $k_1, k_2, \cdots$ такую, что существуют пределы $z_{k_j} \to \zeta$, $z'_{k_j} \to \zeta'$. Очевидно точки ζ и ζ' лежат на L_0. Из $\psi(z_{k_j}) = \psi(z'_{k_j})$, перейдя к пределу, найдем $\psi(\zeta) = \psi(\zeta')$.

В том случае, когда $\zeta \neq \zeta'$, приходим к противоречию с условием A. Если же $\zeta = \zeta'$, то приходим к выводу, что отображение $t = \psi(z)$ не однолистно в точке ζ, а это противоречит тому, что $\psi'(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{p_0(\zeta)}} \neq 0$. Лемма доказана.

В образе $\widetilde{G}$ подобласти $\widetilde{D}$ лежит вектор CC'. Проведем в $\widetilde{G}$ параллельно CC' два вектора C_1C_1' и C_2C_2' по обе стороны от CC', и пусть $L_1^{(0)}$ и $L_2^{(0)}$ их прообразы в $\widetilde{D}$, расположенные по обе стороны от L_0. Область $D^{(0)} = D(L_1^{(0)}, L_2^{(0)}; a_1^{(0)}, a_2^{(0)})$ взаимно однозначно отображается в $G^{(0)}$, ограниченную двумя векторами C_1C_1' и C_2C_2' и дугами C_1C_2 и $C_1'C_2'$, из которых вторая получается из первой сдвигом на вектор η. Приготовим бесконечное множество областей $D^{(0)}$ и склеим их по разрезам (a_1, a_2) в одну бесконечнолистную риманову поверхность ϑ_0. Функция $t = \psi(z)$ преобразует ее в бесконечную полосу Γ_0, образованную из $G^{(0)}$ сдвигами на векторы $k\eta$, $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$. Полосу Γ_0 можно мыслить образованной сдвигами на $k\eta$ прямоугольника, тогда прообразы его сторон, перпендикулярных к вектору η, являются краями разрезов (a_1, a_2). Наконец, еще одно упрощение: если вместо преобразования (2) взять такое

$$t = \frac{\pi}{\eta} \int_{z_0}^{z} \frac{d\tau}{\sqrt{p_0(\tau)}}, \tag{2'}$$

то получим полосу, параллельную действительной оси, а длина прямоугольника, образа одного листа римановой поверхности ϑ, будет равна π; при этом вместо уравнения (4) получим аналогичное ему.

Итак, при выполнении условия A, не ограничивая общности исследования, можно считать, что

$$\int_L \frac{d\tau}{\sqrt{p_0(\tau)}} = \pi,$$

и область $D(L_1, L_2; a_1, a_2)$ взаимно однозначно отображается в прямоугольник G, у которого длина стороны, параллельной вещественной оси плоскости t, равна π.

Функция $t = \psi(z)$ в области D имеет обратную $z = \Phi(t)$, аналитическую в области G. Прямоугольник G и его сдвиги на $k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$ являются образами отдельных листов римановой поверхности ϑ над областью D. Следовательно, можно распространить функцию $t = \psi(z)$ на риманову поверхность ϑ. Тогда она осуществляет взаимно однозначное отображение ϑ на бесконечную полосу Γ. В дальнейшем под линиями L будем понимать лишь прообразы прямых $\operatorname{Im} t = \text{const}$.

Перейдем к исследованию решений уравнения (1), аналитических в двусвязной области $D(L_1, L_2)$. Согласно равенству (3) решение имеет вид $y(z) = u(t) \cdot \gamma(z)$. Функция $\gamma(z)$ в области $D(L_1, L_2)$ дифференцируема, но не однозначна. Действительно, обозначим через ν сумму вычетов функции $\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)}$ относительно $2l$ корней функции $p_0(z)$, лежащих внутри контура L. Тогда $\gamma(z)|_L$ — значение $\gamma(z)$ после обхода контура L равно

$$\gamma(z)|_L = \gamma(z) \cdot \frac{1}{\mu},$$

где $\dfrac{1}{\mu} = \exp[\pi i(l - \nu)]$.

Когда в плоскости z переменная z описывает контур L, то в плоскости t переменная t пробегает отрезок длиной π, параллельный действительной оси. Следовательно, для того чтобы функция $y(z)$ была однозначной: $y(z)|_L = y(z)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$u(t + \pi) = \mu u(t). \tag{6}$$

Так как в области $D(L_1, L_2)$ функция $\gamma(z) \neq 0$, то вместо того, чтобы искать аналитическое в $D(L_1, L_2)$ решение уравнения (1), можно искать аналитическое в полосе $\beta_1 < \operatorname{Im} t < \beta_2$ решение уравнения (4), удовлетворяющее условию (6), поскольку из дифференцируемости решения $y(z)$ следует дифференцируемость функции $u(t)$, и наоборот.

Очевидно, если такое решение $u(t)$ существует, то оно является также решением следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered} u''(t) + \{T[\Phi(t)] + \lambda^2\} u(t) = 0, \\ u(\pi + i\beta) = \mu u(i\beta), \\ u'(\pi + i\beta) = \mu u'(i\beta), \ t = s + i\beta, \end{gathered} \tag{7}$$

поставленной на любой прямой $\beta = \text{const}$, $\beta_1 < \beta < \beta_2$.

Обратно, если решение краевой задачи (7) существует, то оно не зависит от того, на какой прямой $\beta = \text{const}$ задача решена, причем решение $u(t)$ есть аналитическая функция в полосе $\beta_1 < \operatorname{Im} t < \beta_2$, удовлетворяющая в ней условию (6). Действительно, возьмем в полосе произвольную точку t_0 и, применив метод последовательных приближений, найдем два линейно независимых решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ уравнения (4), удовлетворяющие начальным условиям

$$u_1(t_0)=1,\ u_1'(t_0)=0;\ u_2(t_0)=0,\ u_2'(t_0)=1.$$

Из аналитичности функции $T[\Phi(t)]$ легко заключить, что решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ также аналитические. Предположим, что удалось константы c_1 и c_2 в общем интеграле $u(t)=c_1u_1(t)+c_2u_2(t)$ подобрать так, чтобы получить решение краевой задачи (7) на некоторой прямой $\beta=\mathrm{const}$. В таком случае из краевых условий заключаем, что для аналитической в полосе функции $u(t)$ в фиксированной точке $t=i\beta$ выполняются условия

$$u(t+\pi)-\mu u(t)\Big|_{t=i\beta}=0,$$

$$u'(t+\pi)-\mu u'(t)\Big|_{t=i\beta}=0.$$

Обращаясь к дифференциальному уравнению для $u(t)$, легко получить $u''(t+\pi)-\mu u''(t)|_{t=i\beta}=0$. Продифференцировав обе части дифференциального уравнения, найдем: $u'''(t+\pi)-\mu u'''(t)|_{t=i\beta}=0$. Продолжая так рассуждать, получим, что для любого $k=0,\ 1,\ 2,\cdots$

$$u^{(k)}(t+\pi)-\mu u^{(k)}(t)\Big|_{t=i\beta}=0.$$

Следовательно, из теоремы единственности вытекает, что $u(t+\pi)-\mu u(t)=0$ во всей полосе $\beta_1<\mathrm{Im}\,t<\beta_2$. Итак, решение краевой задачи на одной прямой будет решением и на любой другой прямой $\beta=\mathrm{const}$.

Ниже будем пользоваться результатами и обозначениями XII главы книги [3]. Легко проверить, что краевые условия (7) удовлетворяют неравенству $A_{23}-A_{14}\neq 0$ (но $A_{24}=0$). Поскольку в цитированной книге интересующие нас результаты формулируются для случая $A_{24}\neq 0$, то укажем соответствующие нашему случаю изменения. Именно, выполнив вычисления, аналогичные приведенным в книге, получим, что функция Грина в нашем случае равна

$$\Gamma(s,\xi,\rho^2)=\frac{M(s,\xi,\rho^2)}{\omega(\rho)},\ \text{где}\ \omega(\rho)=4\mu i\rho\cos\pi\rho-2i(\mu^2+1)\rho,$$

$$M(s,\xi,\rho^2)=\begin{cases}2\mu i\sin\rho(\pi-\xi+s)-2i\sin\rho(s-\xi), & \text{для } s\leqslant\xi\\ 2\mu i\sin\rho(\pi-s+\xi)-2i\mu^2\sin\rho(\xi-s), & \text{для } s>\xi.\end{cases}$$

Корнями уравнения $\omega(\rho)=0$ являются числа $\rho_m=2m\pm(l-\nu)$, где $m=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$. Функция $\sigma_m(s)$, равная по определению

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_m}\left(\int\limits_0^\pi\Gamma(s,\xi,\rho^2)\,f(\xi)\,d\xi\right)\rho\,d\rho$$

и вычисленная с помощью теории вычетов, примет вид

$$\sigma_m(s)=\exp\left[i(\nu-l)s\right]\cdot s_m(s),$$

где $s_m(s)$ обозначает частную сумму ряда Фурье функции $f(s)\exp\times$ $\times[i(l-\nu)s]$ на отрезке $0\leqslant s\leqslant\pi$:

$$s_m(s)=\sum_{k=0}^{m}a_k\cos 2ks+b_k\sin as,\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp[i(l-\nu)\xi]f(\xi)\,d\xi,$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\exp[i(l-\nu)\xi]f(\xi)\cos 2k\xi\,d\xi,$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\exp[i(l-\nu)\xi]f(\xi)\sin 2k\xi\,d\xi.$$

Согласно теореме 3.1, существует функция Грина G задачи (7) и, согласно теореме 3.2, последовательность $\{S_m(s)\}$:

$$S_m(s)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\left(\int_0^{\pi}G(s,\xi,\rho^2)f(\xi)\,d\xi\right)\rho d\rho$$

равно сходится на отрезке $[0,\pi]$ с последовательностью $\sigma_m(s)$.

Чтобы перейти к теоремам о разложении рассмотрим сопряженную к (7) краевую задачу:

$$\begin{gathered}v''(t)+\overline{\{T[\Phi(t)]+\lambda^2\}}\,v(t)=0,\\ v(\pi+i\beta)=\frac{1}{\overline{\mu}}\,v(i\beta),\\ v'(\pi+i\beta)=\frac{1}{\overline{\mu}}\,v'(i\beta).\end{gathered}\tag{8}$$

Она аналогична (7) с заменой μ на $\frac{1}{\overline{\mu}}$, но не для $v(t)$, а для $\overline{v(\overline{t})}$.

Следовательно, если существует решение краевой задачи (8) на какой-нибудь прямой $\beta=\mathrm{const}$, то комплексно сопряженная к нему функция является аналитической в полосе $\beta_1<\operatorname{Im}t<\beta_2$ и не зависит от того, на какой прямой рассматривается краевая задача.

Сделаем теперь дополнительное к условию A предположение:

Условие Б. Предполагается, что все полюсы функции Грина задачи (7) *простые.*

Это позволяет применить теоремы 5.1 и 5.2 книги [3] и мы приходим к следующим выводам:

1. Краевые задачи (7) и (8), рассмотренные на какой-нибудь прямой $\beta=\mathrm{const}$, имеют счетные последовательности собственных чисел

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2,\cdots;\ \overline{\lambda}_1^2,\ \overline{\lambda}_2^2,\ \overline{\lambda}_3^2,\ \cdots$$

и биортогональные системы собственных функций

$$u_1(t),\ u_2(t),\ u_3(t),\cdots$$
$$v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t),\cdots,\quad t=s+i\beta.$$

2. Всякая непрерывная на отрезке $0\leqslant s\leqslant\pi$ функция $f(t)$ такая, что $f(t)\exp[i(l-\nu)t]$ представима равномерно сходящимся рядом Фурье, может быть разложена в равномерно сходящийся на нем ряд по собственным функциям задачи (7):

$$f(t)=\sum_{j=1}^{\infty}a_ju_j(t),\ \text{где}\ a_j=\int_0^{\pi}f(t)\overline{v_j(t)}\,dt,\ t=s+i\beta. \tag{9}$$

Возьмем функцию $\varphi(t)$, аналитическую в полосе $\beta_1<\operatorname{Im}t<\beta_2$ и удовлетворяющую в ней условию $\varphi(t+\pi)=\mu\varphi(t)$, $\mu=\exp[\pi i(\nu-l)]$. Функция $\varphi(t)\exp[i(l-\nu)t]=\Phi(t)$ π — периодическая и потому представима на любой прямой $\beta=\text{const}$, $\beta_1<\beta<\beta_2$ равномерно сходящимся рядом Фурье. Следовательно, функция $\varphi(t)$ может быть разложена в ряд (9), равномерно сходящийся на каждой прямой $\beta=\text{const}$, $\beta_1<\beta<\beta_2$. Докажем, что фактически разложение равномерно сходится в любом прямоугольнике Q: $0\leqslant s\leqslant\pi$, $\beta_1'\leqslant\beta\leqslant\beta_2'$, где $\beta_1<\beta_1'<\beta_2'<\beta_2$.

Рассмотрим ряд Фурье функции $\Phi(t)$ на какой-нибудь прямой $\beta=\text{const}$. Согласно теореме Лебега ([4], стр. 193),

$$|s_m(t)-\Phi(t)|\leqslant(3+\ln m)E_m,$$

где E_m — наилучшее приближение функции $\Phi(t)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше m. Согласно теореме Джексона для всякой непрерывной с периодом 2π функции справедлива оценка

$$E_m<12\,\omega\left(\frac{1}{m}\right),\quad ([4],\ \text{стр. } 117),$$

где ω — модуль непрерывности функции. На отрезке $0\leqslant s\leqslant\pi$, $\beta=\text{const}$ возьмем две произвольные точки $s_1+i\beta$ и $s_2+i\beta$. Имеем

$$\Phi(s_2+i\beta)-\Phi(s_1+i\beta)=\int_{s_1+i\beta}^{s_2+i\beta}\Phi'(t)\,dt.$$

Обозначая через $M_1=\max\limits_{t\in Q}|\Phi'(t)|$, получим

$$|\Phi(s_2+i\beta)-\Phi(s_1+i\beta)|\leqslant M_1|s_1-s_2|.$$

Таким образом, функция $\Phi(t)$ удовлетворяет условию Липшица с общей константой M_1 для всех прямых $\beta=\text{const}$, $\beta_1'\leqslant\beta\leqslant\beta_2'$. Итак, окончательно, для частных сумм $s_m(t)$ ряда Фурье получим следующую оценку, справедливую на всех прямых $\beta=\text{const}$, $\beta_1'\leqslant\beta\leqslant\beta_2'$:

$$|s_m(t)-\Phi(t)|\leqslant(3+\ln m)\,12\,M_1\frac{1}{m}.$$

Обозначим $M=\max\limits_{t\in Q}|\Phi(t)|$. Тогда

$$|s_m(t)| < M + \frac{12 M_1 (3 + \ln m)}{m}.$$

Отсюда следует, что $s_m(t)$ ограничены для всех m и $t \in Q$ одной константой.

Пользуясь обозначениями из [3], имеем для частных сумм ряда (9)

$$|S_m(t)| \leqslant |s_m(t)| + |\sigma_m(t) - s_m(t)| + |S_m(t) - \sigma_m(t)|.$$

Если проследить за доказательством теоремы 3.2 из [3], то можно убедиться, что приведенная там оценка для $|s_m(t) - \sigma_m(t)|$ может быть сделана независящей от того, на какой прямой $\beta = \mathrm{const}$, $\beta_1' \leqslant \beta < \beta_2'$, мы производим оценки.

Окончательно заключаем, что суммы $S_m(t)$ ограничены для всех m и $t \in Q$ одной константой, и, следовательно, по теореме Витали ряд (9) сходится равномерно в Q.

Остается перейти к разложению функций, аналитических в двусвязной области $D(L_1, L_2)$. Пусть $f(z)$ такая функция. Образуем вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = \frac{f[\Phi(t)]}{\gamma[\Phi(t)]}.$$

Очевидно она аналитическая в полосе $\beta_1 < \operatorname{Im} t < \beta_2$ и удовлетворяет условию $\varphi(t + \pi) = \mu\varphi(t)$. Следовательно, справедливо разложение (9). Переходя к переменной z, получим

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j(t) \gamma(z),$$

где t определяется равенством (2′).

Заметим, что согласно (3) произведение $u_j(t)\gamma(z)$ есть решение уравнения (1), аналитическое в области $D(L_1, L_2)$ и соответствующее собственному числу $\lambda^2 = \lambda_j^2$. Окончательно получим

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j(z), \tag{10}$$

где, согласно (9), после замены (2′) коэффициент a_j выражается так: $a_j = \int\limits_L f(z)\, \overline{v_j(t)} \frac{dz}{\gamma(z) \sqrt{p_0(z)}}$. Нетрудно убедиться, что функция

$x_j(z) = \dfrac{\overline{v_j(t)}}{\gamma(z) \sqrt{p_0(z)}}$, аналитическая в $D(L_1, L_2)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$p_0(z) y'' + [2p_0'(z) p_1(z)] y' + [p_0''(z) - p_1'(z) + p_2(z)] y + \lambda_j^2 y = 0. \tag{11}$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов a_j разложения (10) необходимо знать аналитические в $D(L_1, L_2)$ решения $x_j(z)$ дифференциального уравнения (11). Полезно отметить, что функции $x_j(z)$ можно выразить через решения дифференциального уравнения (1). Именно, сделав замену

$$x_j(z) = N(z)\, X_j(z), \text{ где } N(z) = \frac{1}{p_0(z)} \exp\left[\int_{z_0}^{z} \frac{p_1(\tau)}{p_0(\tau)}\, d\tau\right], \tag{12}$$

можно убедиться, что $X_j(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при $\lambda^2 = \lambda_j^2$. Так как в равенстве (12) левая часть аналитическая в $D(L_1, L_2)$ функция, а $N(z)$ при обходе контура L один раз против часовой стрелки помножается на $\exp[2\pi i\nu]$, то $X_j(z)$ такое решение дифференциального уравнения (1), которое после обхода контура L один раз против часовой стрелки умножается на $\exp[-2\pi i\nu]$.

Таким образом, нами получена

Теорема. *При выполнении условий А и Б существуют:*
1) *счетная последовательность чисел*

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2, \cdots,$$

2) *соответствующая последовательность аналитических в двусвязной области $D(L_1, L_2)$ решений при $\lambda^2 = \lambda_j^2$, $j = 1, 2, \cdots$ уравнения* (1):

$$y_1(z),\ y_2(z),\ y_3(z), \cdots,$$

3) *последовательность решений уравнения* (1) *при* $\lambda^2 = \lambda_j^2$, $j = 1, 2, \cdots$

$$X_1(z),\ X_2(z),\ X_3(z), \cdots$$

такая, что системы $\{y_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{N(z)\, X_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ *биортогональны на любом контуре L.*

Кроме того, всякую аналитическую в области $D(L_1, L_2)$ функцию $f(z)$ можно разложить, и притом единственным способом, в равномерно сходящийся в области ряд

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j(z),\quad a_j = \int_L f(z)\, N(z)\, X_j(z)\, dz.$$

* * *

Рассмотрим в качестве примера дифференциальное уравнение

$$(1-z^2)\, y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)\, z]\, y' + \left[\lambda^2 - \frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}\right] y = 0, \tag{13}$$

где α и β—произвольные комплексные числа такие, что $\alpha+\beta$ не равно целому числу.

Переход на плоскость t осуществляется в этом случае с помощью следующей замены переменных:

$$t = \frac{1}{2} \arcsin z,\ y(z) = u(t)\, (1+z)^{-\frac{1+2\beta}{4}}\, (1-z)^{-\frac{1+2\alpha}{4}}.$$

Нетрудно видеть, что условие A выполняется. Действительно, $\eta = 2\int\limits_{-1}^{1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\pi$, а в качестве контуров L следует взять произвольные эллипсы с фокусами в точках -1 и 1—образы прямых, параллельных действительной оси плоскости t при отображении $z = \sin 2t$.

Проверим выполнение условия $Б$. Полюсы функции Грина являются собственными числами краевой задачи

$$
\begin{gathered}
u''(t) + \left[\frac{1-2\alpha^2-2\beta^2+2(\beta^2-\alpha^2)\sin 2t}{\cos^2 2t} + \rho^2\right] u(t) = 0, \\
u'(\pi) = \exp\left[\pi i(1+\alpha+\beta)\right] u'(0), \qquad (14) \\
u(\pi) = \exp\left[\pi i(1+\alpha+\beta)\right] u(0),
\end{gathered}
$$

где $\rho^2 = 4\lambda^2$.

Легко убедиться, что они являются корнями уравнения

$$
\cos \pi\rho - \cos\pi(\alpha+\beta+1) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0. \qquad (15)
$$

Отсюда получаем асимптотические значения для собственных чисел

$$
\begin{gathered}
\rho_j' = 2j+1+\alpha+\beta+\varepsilon_j', \quad \rho_j'' = 2j-1-\alpha-\beta+\varepsilon_j'', \qquad (16) \\
\varepsilon_j', \ \varepsilon_j'' \to 0 \quad \text{при } j\to\infty.
\end{gathered}
$$

Собственные числа можно найти также, исходя из другого соображения. Это будут такие значения параметра λ^2, при которых уравнение (13) имеет однозначное решение в окрестности бесконечно удаленной точки. Для исследования характера решения в ее окрестности в уравнении (13) сделаем замену переменной $z = \frac{1}{z_1}$ и для полученного уравнения

$$
z_1^2(z_1^2-1)y'' + [2z_1^3 + (\alpha-\beta)z_1^2 + (\alpha+\beta)z_1]y' + \left[\lambda^2 - \frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}\right]y = 0 \qquad (17)
$$

будем искать решение, аналитическое в окрестности начала координат, в виде ряда

$$
y(z_1) = z_1^{\gamma}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_1^k\right]. \qquad (18)
$$

Подставляя (18) в дифференциальное уравнение (17) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях z_1, получим рекуррентные формулы для определения коэффициентов a_k и, так называемое, определяющее уравнение для показателя γ:

$$
\gamma^2 - \gamma(\alpha+\beta+1) + \frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4} - \lambda^2 = 0.
$$

Корни его равны:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha+\beta+1}{2} + \lambda, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha+\beta+1}{2} - \lambda.$$

Поскольку решение (18) будет однозначным в окрестности точки $z_1=0$ только при γ равном целому числу, то отсюда следует, что

$$\lambda_j^2 = \left(j - \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2,$$

где $j=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Так как $\rho^2 = 4\lambda^2$, то

$$\rho_j = 2j \pm (\alpha+\beta+1), \ j=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \cdots.$$

Сравнивая эти значения с ранее полученными асимптотическими значениями (16), заключаем, что все числа $\varepsilon_j = \varepsilon'_j = 0$. Следовательно, фактически уравнение (15) имеет вид

$$\cos \pi\rho - \cos \pi(\alpha+\beta+1) = 0. \qquad (19)$$

Поскольку $\alpha+\beta$ отлично от целого числа, то $\rho_j = 2j+\alpha+\beta+1$, $j=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ являются простыми корнями уравнения (19). Итак, полюсы функции Грина задачи (14) простые.

Мы получили счетную последовательность собственных чисел $\lambda_j^2 = \left(j - \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2$, $j=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, при каждом λ_j^2 уравнение (13) имеет два линейно независимых решения, из которых одно, соответствующее показателю $\gamma_1 = j$, $j=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ является аналитической функцией $y_j(z)$, а второе, соответствующее показателю $\gamma_2 = -j + (\alpha+\beta+1)$, $j=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ — будет многозначной функцией $X_j(z)$.

Для коэффициентов $a_k^{(j)}$ функции

$$y_j(z) = z^j \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^j z_1^j\right], \quad z = \frac{1}{z_1}$$

получается следующая рекуррентная формула:

$$a_k^{(j)} k(\alpha+\beta+1-k-2j) + a_{k-1}^{(j)} (\alpha-\beta)(j+k-1) +$$
$$+ a_{k-2}^{(j)} (j+k-2)(j+k-1) = 0. \qquad (20)$$

При $j=0, -1, -2, \cdots$ получаем, что $y_j(z)$ есть полином $-j$-ой степени относительно z, так как из (20) следует, что $a_{-j+1}^{(j)}, a_{-j+2}^{(j)}$ равны нулю. Следовательно, с точностью до постоянных множителей, получили известные полиномы Якоби $p_j^{(\alpha,\beta)}(z)$ (см., например, [5]). Функции же $X_j(z)$ являются функциями Якоби второго рода $Q_j^{(\alpha,\beta)}(z)$.

При $j=1, 2, 3, \cdots$, собственная функция $y_j(z) = \frac{1}{z^j}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(j)} \frac{1}{z^k}\right]$ аналитическая вне отрезка $[-1, 1]$; в этом случае нам удобнее найти не $X_j(z)$, а $\chi_j(z) = N(z) X_j(z)$.

Функция $x_j(z)$, согласно общей теории, является аналитическим в эллиптическом кольце решением дифференциального уравнения (11), которое в настоящем случае имеет вид

$$(1-z^2)\,y''+[\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)\,z]\,y'+\left[\alpha+\beta-\frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}+\lambda_j^2\right]y=0. \quad (21)$$

Решение $x_j(z)$ мы будем отыскивать таким же образом, как и $y_j(z)$: сделаем замену переменной $z=\frac{1}{z_1}$ и для полученного уравнения

$$z_1^2\,(z_1^2-1)\,y''+[2z_1^3+(\beta-\alpha)\,z_1^2-(\alpha+\beta)\,z_1]\,y'+$$
$$+\left[\alpha+\beta-\frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}+\lambda_j^2\right]y=0 \quad (22)$$

будем искать решение, аналитическое в окрестности начала координат.

Таким образом, получим $x_j(z)=z_1^{-j+1}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}b_k^{(j)}\,z_1^k\right]$, $z=\frac{1}{z_1}$, где $b_k^{(j)}$ вычисляются с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$b_k^{(j)}\,k\,(2j-1-k-\alpha-\beta)+b_{k-1}^{(j)}\,(\beta-\alpha)(k-j)+b_{k-2}^{(j)}(k-1-j)(k-j)=$$
$$=0,\ j=1,\ 2,\ 3,\cdots.$$

Нетрудно видеть, что $x_j(z)$ является полиномом $j-1$ степени относительно z.

Итак, если $f(z)$—функция, аналитическая в эллиптическом кольце, образованном софокусными эллипсами, с фокусами ± 1, то ее можно разложить единственным образом в равномерно сходящийся в этом кольце ряд

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j\,P_j^{(\alpha,\beta)}(z)+\sum_{j=1}^{\infty}B_j\,y_j(z),$$

где

$$A_j=\int_L f(z)\,(z-1)^{\alpha}\,(z+1)^{\beta}\,Q_j^{(\alpha,\beta)}(z)\,dz,$$

$$B_j=\int_L f(z)\,x_j(z)\,dz,$$

где в качестве контура L можно взять эллипс с фокусами ± 1, лежащий в области аналитичности $f(z)$, а $(z-1)^{\alpha}\,(z+1)^{\beta}$ играет роль $N(z)$ в формуле (12).

Если же $f(z)$ аналитична всюду внутри эллипса с фокусами ± 1, то очевидно $B_j=0$, и мы получим разложение аналитической функции в ряд по полиномам Якоби. Аналогично получается разложение функции $f(z)$, аналитической вне отрезка $[-1,\ 1]$.

Можно рассматривать дифференциальное уравнение (21) как исходное и получить аналогичные результаты. Например, для функции $f(z)$, аналитической вне отрезка $[-1, 1]$ и обращающейся в нуль на бесконечности, получим

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} C_j N(z) Q_j^{(\alpha,\beta)}(z), \quad C_j=\int\limits_{l} f(z) P_j^{(\alpha,\beta)}(z)\,dz.$$

Этот результат пересекается с указанным в книге [5]. Именно в ней приведены вышеуказанные разложения для произвольных действительных значений $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Ростовский государственный
университет

Поступило 1.VII. 1968

Բ. Ի. ՕՐԵԽՈՎ, Մ. Գ. ԽԱՊԼԱՆՈՎ. Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներով առաջացած անալիտիկ ֆունկցիաների տարածության բազիսների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում բերված են պայմաններ, որոնց դեպքում $p_0(z)y''+p_1(z)y'+p_2(z)y+\lambda^2y=0$ *դիֆերենցիալ հավասարումը ունի* $p_0(z)$*-ի զրոները չպարունակող ինչ-որ մի երկկապ տիրույթում անալիտիկ սեփական ֆունկցիաների սիստեմ, որոնք բազիս են կազմում այդ տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիաներ տարածության մեջ։ Մասնավորապես ապացուցված է, որ Յակոբիի բազմանդամները կամայական կոմպլեքս* α*-ի և* β*-ի համար, որոնց* $\alpha+\beta$ *գումարը ամբողջ չէ կազմում են բազիս* ± 1 *ֆոկուսները ունեցող ակամայական ֆիքսած էլիպսում անալիտիկ ֆունկցիաների տարածության մեջ։ Այս արդյունքը հայտնի էր կամայական* $\alpha>-1$ *և* $\beta>-1$ *իրական թվերի համար։*

B. I. ORECHOV and M. G. KCHAPLANOV. *On the bases in the spaces of analytical functions formed by the solutions of the differential equation of the second order* (summary)

The conditions are pointed out under which the equation

$$p_0(z)\,y'' + p_1(z)\,y' + p_2(z)\,y + \lambda^2 y = 0$$

possesses a system of eigenfunctions which are analytical in a doubly-connected, free from the zeroes of $p_0(z)$ domain, the system itself constituting a basis in the space of the functions, analytical in the domain. In particular, Jakoby polinomials for arbitrary complex α and β, such that $\alpha+\beta$ is not an integer are shown to constitute a basis in the space of functions, analytical in every fixed ellipce, with foci in ± 1. This result was known previously for every real $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Г. Уиттекер, Дж. Ватсон.* Курс современного анализа, ч. II, издание 2, М. 1963.
2. *O. Volk.* Über die Entwicklung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen nach Funktionen die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem Parameter genügen, Math. Ann., 86, 1922, 296—316.
3. *Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1958.
4. *И. П. Натансон.* Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.
5. *Г. Сеге.* Ортогональные многочлены, М., 1962.