

А. А. ШАГИНЯН

О ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ФУНКЦИЙ,  
ГАРМОНИЧЕСКИХ ВНУТРИ СФЕРЫ

## В в е д е н и е

Пусть  $S$  — сфера радиуса единица в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$ . Точка  $a \in S$  называется точкой неопределенности (ambiguous point) [1, 4] функции  $f$ , определенной в шаре  $\text{int } S$ , если существуют два пути  $l_{a; r_1}$  и  $l_{a; r_2}$ , лежащие в  $\text{int } S$  и оканчивающиеся в этой точке, вдоль которых  $f$  имеет асимптотические значения  $r_1$  и  $r_2$  соответственно, где  $r_1$  и  $r_2$  отличные друг от друга действительные числа.

В работе [1] Г. Пираяня доказал, что можно построить непрерывную в шаре  $\text{int } S$  функцию, для которой все точки  $S$  являются точками неопределенности.

Несуществование функции в круге с аналогичным поведением у граничной окружности следует из более раннего результата Ф. Бейджмила [2, 4] о том, что любая комплекснозначная в круге функция может иметь не более чем счетное множество точек неопределенности на граничной окружности.

В дальнейшем Ф. Бейджмил [3] доказал, существенно используя вышеуказанный результат Г. Пираяня, что можно построить гармоническую в  $\text{int } S$  функцию  $h$  такую, что для всякого числа  $r \in R^1$  и всякой точки  $a \in S$  существует путь  $l_{a; r} \subset \text{int } S$ , оканчивающийся в точке  $a$ , вдоль которого  $h$  имеет асимптотическое значение  $r$ .

В этих работах не оцениваются скорости роста построенных функций у  $S$ .

Настоящая работа посвящена доказательству следующего утверждения.

**Теорема.** *Существует гармоническая в  $\text{int } S$  функция  $H$  такая, что для любой точки  $a \in S$  и любого отрезка  $[A; B]$  (который может быть неограниченным как с одной, так и с другой стороны или превращаться в точку при  $A = B$ ) существует спрямляемый путь  $l_{a; [A; B]} \subset \text{int } S$ , оканчивающийся в  $a$ , ортогональный к  $S$  в точке  $a$ , по которому предельное множество [4] функции  $H$  равно  $[A; B]$ , т. е.*

$$C_{l_{a; [A; B]}}(H) = [A; B].$$

Кроме того, эту функцию можно построить таким образом, что-

бы внутри сферы  $S_i$  радиуса  $1 - \frac{1}{2^i}$ , концентрической с  $S$ , было  $H(P) \leq \exp \{ \exp \dots \{ \exp \text{const} \} \}$ , где количество  $\exp$  равно  $2i$ , а  $\text{const}$  — абсолютная постоянная.

Замечание 1. Вышеуказанный результат Ф. Бейджмила [3] следует из нашей теоремы при  $A = B = r$ .

Замечание 2. Пути  $l_{a;[A;B]}$  можно выбрать таким образом чтобы  $H: l_{a;[A;B]} \rightarrow [A; B]$ , т. е. значения  $H$  на  $l_{a;[A;B]}$  не выходят за пределы отрезка  $[A; B]$ .

Замечание 3. Условие теоремы, налагаемое на предельное множество быть отрезком, необходимо, так как предельное множество любой действительной непрерывной функции по любому пути является отрезком.

Замечание 4. Пусть  $\lambda$  — произвольная гладкая дуга, касательная к отрезку  $PQ$  в точке  $P$ . Вращая  $\lambda$  вокруг  $PQ$ , получим некоторое коническое острие  $K$  (рис. 1).

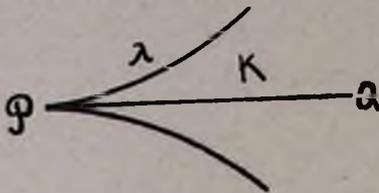


Рис. 1.

Утверждается, что функцию  $H$  можно построить таким образом, чтобы она обладала указанным в теореме предельным поведением внутри любого наперед заданного острия  $K_a$ , т. е. вышеуказанные пути  $l_{a;[A;B]} \subset \text{int } K_a$ , где  $K_a$  — острие  $K$  с вершиной в точке  $a$  и осью, направленной по радиусу  $S$  в этой точке. Однако в этом случае указанное в теореме ограничение на скорость роста  $H$  может не иметь места.

Физическая интерпретация. Если рассмотреть указанную в теореме функцию  $H$  как стационарное решение уравнения теплопроводности (в общем случае стационарное скалярное поле), то придем к следующей физической интерпретации полученного результата.

Пусть в центре шара имеется множество частиц  $\{M\}$ , каждая из которых имеет определенную тепловыносливость, которая определяется отрезком  $[A; B]$ , зависящим от  $M$ : при температуре в пределах  $A < t \leq B$  частица  $M$  существует, при  $t$  вне  $[A; B]$  частица  $M$  разрушается.

Утверждается, что существует такой стационарный тепловой режим внутри шара, который позволяет вывести любую частицу  $M$  без ее разрушения из центра к произвольной точке на сфере так, чтобы любая другая частица  $M'$  с иной выносливостью  $[A'; B']$ , не выносящая хотя бы некоторые температуры из  $[A; B]$ , т. е.  $[A'; B']/[A; B] \neq \mathbb{Q}$ , следующая за  $M$  по тому же пути, разрушилась.

При этом допускается теплоизоляция частиц внутри любой (зависящей от частицы) сферы, концентрической с  $S$  и лежащей строго внутри нее, таким образом при движении к точке  $a \in S$ , начиная с некоторого момента,  $M$  обязательно лишается теплоизоляции.

§ 1. Пусть  $S_i$   $i = 1; 2; \dots$  — концентрические с  $S$  сферы

$$\text{rad } S_i = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^i}.$$

На первом этапе наших конструкций мы будем строить внутри сферы  $S$  некоторое древоподобное образование, крона которого сильно разветвляется при переходе от каждой сферы  $S_i$  к соседней  $S_{i+1}$ , и становится сколько угодно плотной при  $i \rightarrow \infty$ .

При этом для достижения требуемых результатов нам надо будет эти конструкции проводить по определенной методике, позволяющей оценивать густоту упомянутой кроны на каждой сфере, приводящей в итоге к оценке роста строящейся гармонической функции при приближении к сфере  $S$ .

Вначале мы построим некоторую сеть  $\alpha$ -точек на сферах  $S_i$  с намерением провести в дальнейшем ветви строящегося древа через эти точки.

Для этого впишем в  $S_1$  тетраэдр с гранями параллельно координатным осям, будем строить определенную совокупность  $\alpha$ -точек на гранях этого тетраэдра и радиальным проектированием получим нужные нам  $\alpha$ -точки на соответствующих сферах  $S_i$ .

Обозначим грани тетраэдра через  $M_k^1$ , где  $K^1 = 1; \dots; 6$ . Возьмем одну из этих граней  $M_k^1$  (см. рис. 2), обозначим ее центр через  $\alpha_k^1$ .

Радиальным проектированием квадратов  $M_k^1$  и точек  $\alpha_k^1$  получим на сфере  $S_1$  шесть криволинейных квадратов  $N_k^1$  и их центры  $\alpha_k^1$ .

Разделим теперь каждый из квадратов  $M_k^1$  на четыре равных квадрата и обозначим их через  $M_{k^2}^2$ ,  $K^2 = 1; \dots; 6$ ,  $K^2 = 1; 2; 3; 4$ . Каждый квадрат  $M_{k^2}^2$ , в свою очередь, делим на четыре равные части, и обозначаем полученные квадраты через  $M_{k^2; i_2^2}$ , здесь индексы  $K^2; K^2; i_2^2$  пробегают независимо значения  $k^2 = 1; \dots; 6$ ,  $k^2 = 1; \dots; 4$ ,  $i_2^2 = 1; \dots; 4$ . Полученные квадраты  $M_{k^2; i_2^2}^2$  и их центры

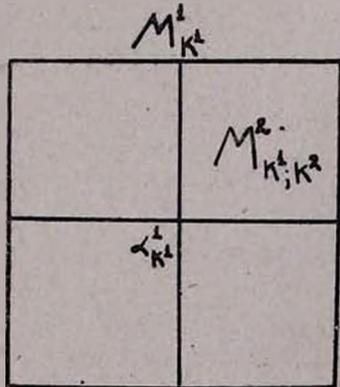


Рис. 2.

$\alpha_{k^2; i_2^2}^2$  радиальным проектированием переносим на сферу  $S_2$ . Таким образом, на сфере  $S_2$  получатся квадраты  $N_{k^2; i_2^2}^2$  и их центры  $\alpha_{k^2; i_2^2}^2$ .

Квадраты  $M_{k^2; i_2^2}^2$  и соответственно их образы  $N_{k^2; i_2^2}^2$  на сфере  $S_2$  будем называть квадратами второго ранга.

Разделим теперь каждый из квадратов  $M_{k^2; i_2^2}^2$  на четыре части и обозначим полученные квадраты через  $M_{k^3; i_2^2}^3$ ,  $K^3 = 1; \dots, 6$ ,  $k^3 = 1; \dots; 4$ ,

$k^3 = 1; \dots; 4$ . Каждый из этих квадратов, в свою очередь, делим на  $4 \cdot m_2$  частей, где  $m_2$  — число  $a_{k^1; k^2}^{3; i_3^1}$  точек внутри  $N_{k^1; k^2}^2$ . Обозначим полученные квадраты через  $M_{k^1; k^2; k^3}^{3; i_3^1}$ ,  $i_3^1 = 1; \dots; 4m_2$ ; эти последние квадраты также разделим теперь уже на  $m_2$  частей и обозначим их через  $M_{k^1; k^2; k^3}^{3; i_3^1; i_3^2}$ , где

$$k^1 = 1; \dots; 6, \quad i_3^1 = 1; \dots; 4m_2,$$

$$k^2 = 1; \dots; 4,$$

$$k^3 = 1; \dots; 4, \quad i_3^2 = 1; \dots; m_2.$$

Квадраты  $M_{k^1; k^2; k^3}^3$ ,  $M_{k^1; k^2; k^3}^{3; i_3^1}$  и  $M_{k^1; k^2; k^3}^{3; i_3^1; i_3^2}$  будем называть соответственно квадратами первого, второго и третьего рангов при третьем разбиении.

Радиальным проектированием на сферу  $S_3$  получим криволинейные квадраты всех трех рангов на  $S_3$ ,

$$N_{k^1; k^2; k^3}^3, \quad N_{k^1; k^2; k^3}^{3; i_3^1} \quad \text{и} \quad N_{k^1; k^2; k^3}^{3; i_3^1; i_3^2}$$

Обозначим центры квадратов  $M_{k^1; k^2; k^3}^{3; i_3^1; i_3^2}$  через  $\alpha_{k^1; k^2; k^3}^{3; i_3^1; i_3^2}$ , а центры квадратов  $N_{k^1; k^2; k^3}^{3; i_3^1; i_3^2}$  на сфере  $S_3$  через  $\alpha_{k^1; k^2; k^3}^{3; i_3^1; i_3^2}$ . Продолжая таким образом дальше, допустим, что уже построены квадраты трех рангов  $(n-1)$ -го разбиения на тетраэдре:

$$M_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1}, \quad M_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1} \quad \text{и} \quad M_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1; i_{n-1}^2}$$

$\alpha_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1; i_{n-1}^2}$  — центр квадрата  $M_{k^1; k^2; \dots; k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1; i_{n-1}^2}$ .

Радиальным проектированием на сфере  $S_{n-1}$  получены криволинейные квадраты

$$N_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1}, \quad N_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1}, \quad N_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1; i_{n-1}^2}$$

и точки  $\alpha_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1; i_{n-1}^2}$  — центры квадратов  $N_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1; i_{n-1}^2}$ .

Построения, связанные с  $n$ -ым разбиением, проведем следующим образом. Обозначим через  $m_{n-1}$  число  $\alpha_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1; i_{n-1}^2}$  точек на  $N_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1}$ . Разбиваем каждый из квадратов  $M_{k^1; \dots; k^{n-1}}^{n-1}$  на 4 части, и обозначаем через  $M_{k^1; \dots; k^n}^n$ , это — квадраты первого ранга  $n$ -го разбиения. Деля каждый из этих квадратов на 4  $m_{n-1}$  частей, получим квадраты второго ранга  $M_{k^1; \dots; k^n}^{n; i_n^1}$ , а разбивая эти последние на  $m_{n-1}$  частей, получим квадраты третьего ранга  $M_{k^1; \dots; k^n}^{n; i_n^1; i_n^2}$ , центры которых обозначим  $\alpha_{k^1; \dots; k^n}^{n; i_n^1; i_n^2}$ .

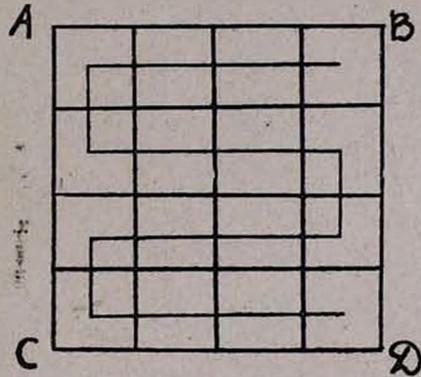
Радиально проектируя эти образования на  $S_n$ , получим соответствующие криволинейные квадраты и  $a_{k^1, \dots, k^n}^{n; i_n^1; i_n^2}$  — точки на сфере  $S_n$ . Будем считать этот процесс бесконечно продолженным.

Таким образом, получим бесконечное множество  $\alpha$ -точек, расположенных на концентрических сферах  $S_n$ . На следующем шагу наших построений мы сконструируем некоторое тело, проходящее через  $\alpha$ -точки, и определим на ее оси некоторую непрерывную функцию  $f$ , обладающую асимптотическими свойствами искомой гармонической функции  $H$ : для всякой точки  $a \in S$  и отрезка  $[A; B]$  существует путь  $l_{a; [A; B]}$ , составленный из ветвей этой оси  $L$  такой, что

$$C_{l_{a; [A; B]}}(f) = [A; B].$$

Параллельно с введенной нумерацией  $\alpha$  и  $\alpha$ -точек нам нужно будет ввести также единую нумерацию для этих точек, входящих в квадраты первого ранга.

Пусть  $ABCD$  (рис. 3) — квадрат, соответствующий некоторому набору значений индексов  $k^1; \dots; k^n$ . Условно наименьшие квадраты на этом рисунке будем считать квадратами третьего ранга, и пусть  $a_{k^1, \dots, k^n}^{n; i_n^1; i_n^2}$  — точки в



центрах этих квадратов. Перенумеруем  $\alpha$ -точки по строкам, начиная с верхнего правого угла  $A$ , в порядке, указанном на рисунке.  $\alpha$ -точки при таком расположении обозначим  $a_{k^1, \dots, k^n}^{n; (j_n)}$ , где, при заданном наборе значений  $k^1; \dots; k^n$   $j_n$  пробегает значения  $1; 2; \dots; m_n = 4 \cdot m_{n-1}^2$ . Аналогичная нумерация вводится для  $\alpha$ -точек на сфере  $S_n$ .

Рис. 3.

Заметим, наконец, что  $\alpha$ -точки, как и  $\alpha$ -точки, полученные на всех этапах наших разбиений, различны.

§ 2. Перенумеруем совокупность всех рациональных чисел, расположив их в последовательность  $p_1; p_2; \dots; p_n; \dots$ .

Положим  $f(a_{k^1, \dots, k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1; i_{n-1}^2}) = p_{i_{n-1}^1}$ , т. е. припишем функции  $f$  во всех точках третьего ранга, окружающих точку второго ранга  $a_{k^1, \dots, k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1}$ , одно и то же рациональное значение  $p_{i_{n-1}^1}$  (рац. число с номером  $i_{n-1}^1$ ).

Таким образом, при переходе от сферы  $S_{n-1}$  к  $S_n$  новые квадраты первого ранга будут уменьшаться, число  $\alpha$ -точек второго ранга

будет возрастать и в этих точках функция  $f$  будет принимать больше рациональных значений, чем в  $\alpha$ -точках предыдущей сферы, с повторением значений, полученных ранее.

Для построения упомянутого выше древоподобного тела покажем предварительно схему соединения его ветвей и лишь после укажем их форму и расположение.

Схема древа будет такой, что оно соединит каждую точку  $a_{k^1, \dots, k^{n-1}}^{n-1; (j_{n-1})}$  со всеми точками  $a_{k^1, \dots, k^n}^n; i_n^1; j_n^1$  при  $k^{n+1} = 1; \dots; 4; i_n^1 = 1; 2; \dots; 4; m_{n-1}$ .

Таким образом, начиная с шести  $\alpha$ -точек сферы  $S_1$ , переходя от одной сферы к другой, мы получим систему дуг, напоминающую скелет дерева, так как, двигаясь по любым построенным ветвям, мы имеем возможность идти к внешней сфере  $S$ , не проходя дважды через одну и ту же точку.

Уточним несколько форму соединяющих дуг и будем называть на них кусочно призматические трубки, что и приведет к некоторому односвязному объемному телу, во всем подобному дереву. Некоторое уточнение формы соединяющих ветвей нам нужно для определенных количественных оценок, необходимых для дальнейших построений.

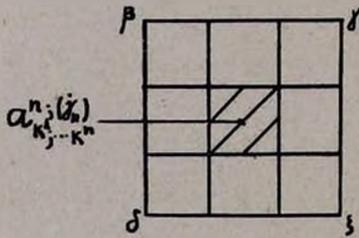


Рис. 4.

Обозначим через  $S_{n-1}^{m_{n-1}}$  сферу радиуса  $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$ . Проведем между  $S_{n-1}$  и  $S_{n-1}^{m_{n-1}}$  концентрические к ним сферы  $S_{n-1}^1; \dots; S_{n-1}^{m_{n-1}-1}$  радиусов  $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{k}{m_{n-1}} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$ ,  $k = 1; 2; \dots; m_{n-1} - 1$ , разбивающие

слой между  $S_{n-1}$  и  $S_{n-1}^{m_{n-1}}$  на  $m_{n-1}$  слоев равной толщины  $\frac{1}{m_{n-1} \cdot 2^{n+1}}$ .

Пусть  $\beta\gamma\delta\epsilon$  — одна из ячеек третьего ранга  $N_{k^1, \dots, k^n}^n; i_n^1; j_n^2$  на сфере  $S_n$ ; центр этой ячейки — точка  $a_{k^1, \dots, k^n}^n; (j_n)$ .

Разбиваем эту ячейку на девять равных квадратов и центральную заштрихованную часть проектируем на все промежуточные сферы  $S_{n-1}^k$ ,  $k = 1; \dots; m_{n-1}$ . То же самое производим со всеми ячейками третьего ранга внутри квадрата первого ранга  $N_{k^1, \dots, k^n}^n$ . Таким образом, на каждой промежуточной сфере получим такие заштрихованные квадраты, число которых равно  $16 \cdot m_{n-1}^2$ . Эти квадраты будем называть **запретными**. Возьмем также ячейки такой же величины с центрами в точках  $a_{k^1, \dots, k^{n-1}}^{n-1; (j_{n-1})}$ . Эти ячейки назовем **опорными**. Проекции опорных квадратов на те же промежуточные сферы также будем называть **запретными**.

Пользуясь нумерацией  $(j_{n-1})$  точек  $a$  в  $N_{k^1, \dots, k^{n-1}}^{n-1}$ , возведем радиальным проектированием на опорном квадрате, содержащем  $a$ -точку, соответствующую значению  $j_{n-1} = 1$ , призматическую трубку до сферы  $S_{n-1}$ .

Отметим на  $S_{n-1}^1$  те запретные квадраты, проекции которых содержат точки сферы  $S_n$ , которые должны быть соединены с точкой  $a_{k^1, \dots, k^{n-1}}^{n-1; (j_{n-1})}$  согласно вышеприведенной схеме. От части построенной нами трубочки между  $S_{n-1}$  и  $S_{n-1}^1$  протянем в слое между  $S_{n-1}$  и  $S_{n-1}^1$  кри-волинейные призматические трубочки между запретными ячейками к соответствующим отмеченным ячейкам, с которыми она должна быть соединена по указанной схеме. Дойдя до указанных ячеек, продолжим от них трубочки до соответствующих квадратов на  $S_n$  уже радиальным проектированием. Таким образом, точка  $a_{k^1, \dots, k^{n-1}}^{n-1; (j_{n-1})}$  при  $(j_{n-1}) = 1$  будет соединена со всеми соответствующими ей точками на сфере  $S_n$  трубчатыми ветвями, которые имеют радиальные куски между  $S_{n-1}$ ;  $S_{n-1}^1$  и  $S_{n-1}^1$ ;  $S$ , соединенные между собой кусочно призматическими трубками в слое  $S_{n-1}$ ;  $S_{n-1}^1$ , проложенными в проходах между запретными квадратами.

Аналогично прокладываем кусочно призматическую трубку от опорного квадрата на  $S_{n-1}$ , содержащего точку  $a_{k^1, \dots, k^{n-1}}^{n-1; (j_{n-1})}$ , где  $(j_{n-1}) = 2$ , к соответствующим ей точкам на сфере  $S_n$ , радиальными кусками от  $S_{n-1}$  до  $S_{n-1}^2$  и от  $S_{n-1}^2$  до  $S_n$ , соединенными друг с другом трубками, проложенными в слое  $S_{n-1}^1$  в проходах между остальными запретными квадратами. Построенные таким образом трубки соединяют  $a_{k^1, \dots, k^{n-1}}^{n-1; (j_{n-1})}$  — точки с соответствующими им точками на сфере  $S_n$ , идя по радиальному направлению до определенной промежуточной сферы, где, разветвляясь в сферическом слое, заканчиваются в конце радиальной трубкой. Ветви полученного трубчатого тела соприкасаются друг с другом. Сузив его наполовину вокруг системы осевых линий (скелета), которую обозначим  $L$ , получим трубчатое тело, уже лишенное этого недостатка. Обозначим разветвленную трубчатую поверхность, полученную из последнего сглаживанием, через  $T$ .

Каждая точка  $a_{k^1, \dots, k^{n-1}}^{n-1; i_{n-1}^1; i_{n-1}^2}$  сферы  $S_{n-1}$  соединяется при помощи ветвей  $L$  с  $4 \cdot 4 \cdot m_{n-1}$  соответствующими ей точками в квадратах второго ранга. Пусть  $a_{k^1, \dots, k^n}^{i_n^1; i_n^2}$  — одна из этих точек.

Мы намеревались построить на  $L$  непрерывную функцию со значениями  $f(a_{k^1, \dots, k^n}^{i_n^1; i_n^2}) = p_{i_n^1}$ , где  $p_{i_n^1} = e - i_n^1$  — рациональное число с указанными асимптотическими свойствами. Для этого возьмем ветвь  $L$ ,

соединяющую указанные точки  $a_{k_1^1, \dots, k_{n-1}^1; k_{n-1}^2}$  и  $a_{k_1^1, \dots, k_n^2}$ ,  $f$  продолжим на эту ветвь линейным интерполированием значений  $p_{i_{n-1}^1}$  и  $p_{i_n^1}$  в этих точках так, чтобы на радиальной части этой ветви, лежащей выше соответствующего сферического слоя ветвления,  $f$  изменялась линейно, а на нижних ветвях, перпендикулярных радиусу, и ниже дуги  $S_{n-1}$  оставалась постоянной.

Покажем теперь, что  $L$  и построенная на ней функция  $f$  обладают в окрестности сферы  $S$  асимптотическими свойствами, о которых говорилось в § 1, т. е. для любой точки  $a \in S$  и любого отрезка  $[A; B]$  можно выбрать из ветвей  $L$  спрямляемый путь  $l_{a; [A; B]}$ , идущий из центра сферы к точке  $a$  такой, что  $l_{a; [A; B]}$  перпендикулярна к сфере в точке  $a$  и предельная совокупность значений функции при движении по пути  $l_{a; [A; B]}$  к точке  $a$  совпадает с  $[A; B]$ ,

$$C_{l_{a; [A; B]}}(f) = [A; B].$$

Итак, пусть  $a \in S$  и задан отрезок  $[A; B]$ . Укажем как выбрать путь  $l_{a; [A; B]}$  из  $L$ .

Допустим, что радиальная проекция точки  $a$  на  $S_1$  попадает в  $N_{k_0^1}$ , где  $k_0^1$  — определенное значение  $k^1$ . Первым отрезком  $l_{a; [A; B]}$  будем считать радиус, идущий от центра шара к точке  $a_{k_0^1}$ . Если проекция  $a$  на  $S_2$  попадет в  $N_{k_0^2; k_0^2}$ , где  $k_0^2$  — некоторое численное значение  $k^2$ , то точкой пересечения  $l_{a; [A; B]}$  с  $S_2$  берем ту из  $a$ -точек, пусть это будет  $a_{k_0^1; k_0^2}^{(0)}$ , в которой значение  $f$  наиболее близко к  $A$ .

Вторым отрезком дуги  $l_{a; [A; B]}$  считаем ту дугу из  $L$ , которая соединяет выбранные нами точки  $a_{k_0^1}$  и  $a_{k_0^1; k_0^2}^{(0)}$ .

Пусть проекция точки  $a$  на сфере  $S_3$  попадает в  $N_{k_0^1; k_0^2; k_0^3}$ ; в точку пересечения  $l_{a; [A; B]} \cap S_3$  берем ту из точек  $a_{k_0^1; k_0^2; k_0^3}^{(0)}$ , в которой значение  $f$  наиболее близко к  $B$ ; пусть это будет точка  $a_{k_0^1; k_0^2; k_0^3}^{(0)}$ . Третьим отрезком дуги  $l_{a; [A; B]}$  будем считать ту дугу из  $L$ , которая соединяет  $a_{k_0^1; k_0^2}^{(0)}$  с  $a_{k_0^1; k_0^2; k_0^3}^{(0)}$ . Продолжая таким образом дальше, допустим, что проекция точки на сферу  $S_n$  попадает в некоторый квадрат  $N_{k_0^1; \dots; k_0^n}$ . Если  $n$  четно, то берем за точку пересечения  $l_{a; [A; B]}$  с  $S_n$  ближайшую к этой проекции  $a_{k_0^1; \dots; k_0^n}^{(0)}$  — точку сферы  $S_n$ , где значение  $f$  наиболее близко к  $A$ , если  $n$  нечетно, то берем ближайшую к проекции  $a$ -точку

\* Речь идет о радиальных проекциях точки.

ку, где  $f$  наиболее близка к  $B$ . Пусть выбранная точка будет  $a_{\alpha_0^0, \dots, \alpha_0^n}^{n; \binom{j}{n}}$ .

За  $n$ -ый отрезок дуги  $l_{a; [A; B]}$  примем дугу из  $L$ , соединяющую  $a_{\alpha_0^0, \dots, \alpha_0^{n-1}}^{n-1; \binom{j}{n-1}}$  с  $a_{\alpha_0^0, \dots, \alpha_0^n}^{n; \binom{j}{n}}$ .

Выбранные таким образом отрезки дуг из  $L$  составят вместе спрямляемую кривую  $l_{a; [A; B]}$  с началом в центре сферы и с концом в  $a$ . Благодаря тому, что в начальных и конечных точках выбранных отрезков этой кривой  $f$  соответственно близка к числам  $A$  и  $B$ , а между этими точками принимает всевозможные промежуточные значения, то  $[A; B]$  есть предельное множество значений  $f$  вдоль пути  $l_{a; [A; B]}$ , т. е.

$$C_{l_{a; [A; B]}}(f) = [A; B].$$

Сравнение размеров квадрата первого ранга на  $S_n$  с расстоянием  $S_n$  до  $S$  показывает, что  $l_{a; [A; B]}$  перпендикулярна к  $S$  в точке  $a$ .

§ 3. Обозначим через  $q_n$  число точек пересечения  $L$  с  $S_n$ , т. е. число  $a$ -точек на  $S_n$ . Легко подсчитать, что

$$q_n = 6 \cdot 4^{n-2} \cdot 4^{2^n}. \tag{1}$$

Для дальнейших построений ветви  $T$  неудобны тем, что на сферических поверхностях, диаметры трубок  $T$  вдоль  $L$  недостаточно тонки. Поэтому сузим  $T$  вдоль  $L$  таким образом, чтобы у полученной трубки  $T_1$  компоненты  $\sigma_i^n$  пересечения  $\text{int } T_1 \cap S_n$  имели

$$\text{mes } \sigma_i^n = \frac{1}{(q_n)^n}. \tag{2}$$

Во всех радиальных частях линии  $L$  перенесем значения функции  $f$  с  $L$  на  $T_1$  по перпендикулярам к  $L$ . А в частях  $L$ , находящихся на сферах либо в узловых точках,  $f$  постоянна. Будем переносить эти постоянные значения на части  $T_1$ , охватывающие эти части  $L$ .

Таким образом, на  $T_1$  будет определена функция  $f^1$ .

Очевидно функция  $f^1$  вдоль трубок, охватывающих пути  $l_{a; [A; B]}$ , обладает теми же асимптотическими свойствами, что и  $f$  вдоль нее.

Лемма 1. Существует решение задачи Дирихле в  $\text{int } T_1$  по граничным значениям  $f_1$ .

Доказательство. Пусть  $P \in \text{int } T_1$ . Обозначим через  $M_i$   $\max |f(Q)|$  при  $Q \in \text{int } S_i \cap L$  (см. рис. 4).

В установленном ранее соответствии рациональных чисел и точек можно это соответствие установить так, чтобы было

$$M_i < i. \tag{3}$$

Для этого достаточно будет некоторые рациональные числа использовать повторно.

Возьмем часть поверхности  $T_1$ , отсекаемую сферой  $S_i$ , обозначим эту часть через  $T_1^i$ :

$$T_1^i = T_1 \cap \text{int } S_i.$$

Поверхность  $T^i$  упирается в  $S_i$  некоторыми прямоугольниками  $\sigma_n^i$ . Решим в области  $\text{int } T_1^i$ , ограниченной поверхностью  $T_1^i$  и прямоугольниками  $\sigma_n^i$  задачу Дирихле, беря граничную функцию, равную нулю на прямоугольниках  $\sigma_n^i$  и равную  $f^i$  на  $T_1^i$ .

Это решение представится в виде

$$\begin{aligned} f_i(P) &= \\ &= \int_{Q \in T_1^i} f^i(Q) d\omega(P; \alpha(Q); \text{int } T_1^i), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $Q$  — переменная точка на поверхности  $T_1^i$ ,  $\alpha(Q)$  — локальный параметр,  $\omega$  — гармоническая мера элемента поверхности, покрывающего точку  $Q$  в области  $\text{int } T_1^i$ .

Решая задачу Дирихле для областей  $\text{int } T_1^i$ , при всех возможных значениях  $i$  получим последовательность гармонических функций  $\{f_i\}$ . Докажем, что последовательность  $\{f_i\}$  сходится в любой фиксированной области  $\Omega$  внутри  $T_1$ .

Предположим  $i$  настолько большим, чтобы  $\Omega$  находилась строго внутри  $T_1^i$ . Считая  $j > i$ , оценим  $|f_j(P) - f_i(P)|$  при  $P \in \Omega$ .

Получим

$$\begin{aligned} |f_j(P) - f_i(P)| &= \left| \int_{Q \in T_1^j} f^j(Q) d\omega(P; \alpha(Q); \text{int } T_1^j) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{Q \in T_1^i} f^i(Q) d\omega(P; \alpha(Q); \text{int } T_1^i) \right|. \end{aligned} \quad (5)$$

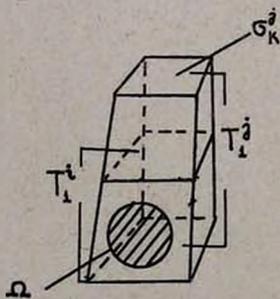


Рис. 6.

На рис. 6 условно на одной призме указаны взаимоотношения величин  $T_1^i$ ,  $T_1^j$ ,  $\Omega$  и  $\sigma^i$ ,  $\sigma^j$ , где через  $\sigma^i$  обозначена совокупность квадратов, высекаемых  $T_1^i$  на  $S_i$ .

Для  $P \in \Omega$ , очевидно, можно представить первый интеграл в (5) в виде

$$\begin{aligned} &\int_{Q \in T_1^j} f^j(Q) d\omega(P; \alpha(Q); \text{int } T_1^j) + \\ &+ \int_{Q \in \sigma^i} f_j(Q) d\omega(P; \alpha(Q); \text{int } T_1^i). \end{aligned}$$

Поэтому

$$|f_i(P) - f_j(P)| = \left| \int_{Q \in \sigma^i} f_j(Q) d\omega(P; \alpha(Q); \text{int } T_1^i) \right|. \quad (6)$$

Оценим  $|f_j(Q)|$  при  $Q \in \sigma^i$ .

При этих значениях  $Q$  имеем

$$\begin{aligned} |f_j(Q)| &= \left| \int_{L \in T_1^i} f^j(L) d\omega(Q; \alpha(L); \text{int } T_1^i) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{j-1} \int_{L \in T_1^{k+1}, T_1^k} f^j(L) d\omega(Q; \alpha(L); \text{int } T_1^i) \right| + \\ &+ \left| \int_{L \in T_1^i} f^j(L) d\omega(Q; \alpha(L); \text{int } T_1^i) \right| \leq \\ &\leq i + \sum_{k=1}^{j-1} (k+1) \int_{L \in T_1^{k+1}, T_1^k} d\omega(Q; \alpha(L); \text{int } T_1^i). \end{aligned} \quad (7)$$

По принципу расширения области Карлемана

$$\int_{L \in T_1^{k+1}, T_1^k} d\omega(Q; \alpha(L); \text{int } T_1^i) \leq \int_{L \in S_k} d\omega(Q; \alpha(L); \text{int } S_k).$$

Воспользовавшись представлением Пуассона решения задачи Дирихле в шаре, получим

$$\begin{aligned} &\int_{L \in \sigma^k} d\omega(Q; \alpha(L); \text{int } S_k) = \\ &= \frac{1}{4\pi \cdot \text{rad } S_k} \cdot \int_{L \in \sigma^k} \frac{\text{rad}^3 S_k - \rho^3(Q; O)}{\rho^3(Q; L)} dS_L = \\ &= \frac{1}{4\pi \text{rad } S_k} \cdot \int_{L \in \sigma^k} \frac{(\text{rad } S_k - \rho(Q; O))(\text{rad } S_k + \rho(Q; O))}{\rho^3(Q; L)} dS_L < \\ &\leq C \cdot \frac{\text{mes } \sigma^k}{\rho^3(Q; L)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее неравенство следует из того, что  $\text{rad } S_k - \rho(Q; O) < \rho(Q; L)$ .

Таким образом, при  $Q \in \sigma^i$

$$|f_k(Q)| \leq i + C \cdot \sum_{k=1}^{j-1} (k+1) \cdot \frac{\text{mes } \sigma^k}{\rho^3(Q; S_k)}, \quad (9)$$

что следует из (7) и (8).

Сумма, фигурирующая в (9), сходится из-за большой скорости убывания  $\text{mes } \sigma^k$ , обеспечиваемой неравенством (2): следовательно

$$|f_j(Q)| < C \cdot i \quad \text{при } Q \in \sigma^i. \quad (10)$$

Подставляя в (6) оценку (10), получим

$$|f_i(P) - f_j(P)| \leq C \cdot i \int_{Q \in \sigma^i} d\omega(P; \alpha(Q); \text{int } T_1^i).$$

Воспользовавшись такими же рассуждениями, как при получении неравенства (8), получим

$$|f_i(P) - f_j(P)| \leq C \cdot i \cdot \frac{\text{mes } \sigma^i}{\rho^2(P; S_i)}.$$

Так как  $\rho(P; S_i)$  ограничено снизу, а  $\text{mes } \sigma^i \rightarrow 0$  в соответствии с (2), то выполняется критерий Коши сходимости последовательности  $f_i(P)$  равномерно в области  $\mathcal{Q}$ .

Функция  $f^1(P) = \lim f_i(P)$  является решением вышеуказанной задачи Дирихле в области  $\text{int } T_1$ .

§ 4. Лемма 2.  $|f^1(P) - f(P)| \rightarrow 0$  при стремлении  $P$  к  $S$  по  $L$ .  
Доказательство. Оценим  $|f^1(P) - f(P)|$ , когда  $P$  находится на части  $L$  между  $S_{i+1}$  и  $S_i$ .

Обозначим через  $\omega_i(\delta)$  модуль непрерывности функции  $f^1(Q)$  на множестве  $T_1^{i+2}/T_1^{i-1}$ ,  $\omega_i(\delta) = C \cdot (i+1) \cdot \delta \cdot 2^{i+2}$ , так как отрезок, на котором  $f^1(Q)$  изменяется линейно, меньше, чем на  $2(i+2)$ , не короче, чем  $\frac{1}{2 \cdot 2^{i+2}}$ .

Для того чтобы  $\omega_i(\delta) = \frac{1}{i+1}$ , достаточно брать

$$\delta = C \cdot \frac{1}{(i+2)^2 \cdot 2^{i+2}}. \quad (1)$$

Имеем

$$f^1(P) - f(P) = f^1(P) - f^1(Q_0), \quad (2)$$

где  $Q_0 \in T_1$  — некоторый прообраз точки  $P$  при проектировании  $T_1 \rightarrow L$ , при помощи которой была построена функция  $f^1$ .

Имеем

$$f^1(P) = \int_{Q \in G} f^1(Q) d\omega(P; \alpha(Q); G), \quad (3)$$

где  $G$  — компонента  $\text{int } T_1^{i+1}/\text{int } T_1^i$ , содержащая точку  $P$ .

Кроме того

$$f_1(Q_0) = \int_{Q \in G} f^1(Q_0) d\omega(P; \alpha(Q); G), \quad (4)$$

так как гармоническая функция с постоянными граничными значениями — постоянна.

Воспользовавшись (2), (3) и (4), получим

$$\begin{aligned} & |f^i(P) - f(P)| = |f^i(P) - f^i(Q_0)| \leq \\ & \leq \int_{Q \in \delta_0} |f^i(Q) - f^i(Q_0)| d\omega(P; \alpha(Q); G) \leq \quad (5) \\ & \leq \int_{Q \in \delta^i(Q_0)} |f^i(Q) - f^i(Q_0)| d\omega(P; \alpha(Q); G) + \\ & + \int_{Q \in \partial\alpha^i(Q_0)} |f^i(Q) - f^i(Q_0)| d\omega(P; \alpha(Q); G), \end{aligned}$$

где  $\delta(Q_0)$  — сумма  $\delta$ -окрестностей всех прообразов  $P$  на  $T_1$ .

Из-за выбора  $\delta$  по (1)

$$\int_{Q \in \delta^i(Q_0)} |f^i(Q) - f^i(Q_0)| d\omega(P; \alpha(Q); G) \leq \frac{1}{i+1}, \quad (6)$$

а

$$\begin{aligned} \int_{Q \in \partial\alpha^i(Q_0)} |f^i(Q) - f^i(Q_0)| d\omega(P; \alpha(Q); G) & \leq C \cdot \frac{(i+2) \cdot m_{i+2} \cdot \text{mes } \sigma_j^{i-1}}{\delta^2(Q_0)} = \\ & = C \cdot (i+2) \cdot \text{mes } \sigma_j^{i-1} \cdot (2^{i+2} \cdot (i+2)^2)^2 \cdot m_{i+2}. \quad (7) \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо в силу того, что  $\text{mes } \{\partial G/\delta(Q_0)\} \leq C \cdot \text{mes } \sigma_j^{i-1} \cdot m_{i+2}$ , а расстояние от  $P$  до  $\{\partial G/\delta(Q_0)\}$  больше чем  $\delta(Q_0)$ . Правая часть неравенства (7) стремится к нулю при  $i \rightarrow \infty$ .

Воспользовавшись этим и (5), (6), получим, что

$$|f^i(P) - f(P)| \rightarrow 0 \text{ при } P \rightarrow S \text{ по } L.$$

Таким образом,  $f^i(P)$  на  $L$  обладает таким же асимптотическим поведением, что и  $f(P)$  на  $L$ .

§ 5. Обозначим через  $T_2$  сглаженную трубку, получающуюся из  $T_1$  сжатием вдвое.

Лемма 3. Для  $f^i(P)$  при  $P \in \text{int } T_2$  имеет место формула Грина

$$f^i_1(P) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{Q \in T_2} \left\{ f^i(Q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}} - \frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial}{\partial n} f^i(Q) \right\} dS_Q. \quad (1)$$

Доказательство. Для  $f^i(P)$  при  $P \in \text{int } T_2^{i-1}$  верна формула Грина

$$f^i(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{Q \in T_2} \left\{ f^i(Q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}} - \frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial}{\partial n} f^i(Q) \right\} dS_Q +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{Q \in \sigma^{2;l}} \left\{ f^1(Q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}} - \frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial}{\partial n} f^1(Q) \right\} dS_Q, \quad (2)$$

где  $\sigma^{2;l} = \text{int } T_2 \cap S_l$ .

Для доказательства леммы 3 достаточно доказать, что второй интеграл в (2) стремится к нулю при  $l \rightarrow \infty$  и неизменном  $P$ .

1°. Докажем, что  $\int_{Q \in \sigma^{2;l}} |f^1(Q)| dS_Q \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$ .

Из (10) § 3 имеем при этих значениях  $Q$   $|f^1(Q)| < C \cdot l$ , следовательно

$$\int_{Q \in \sigma^{2;l}} |f^1(Q)| dS_Q \leq C \cdot l \cdot \text{mes } \sigma^{2;l},$$

а последнее выражение стремится к нулю, в силу (2) § 3.

2°. Покажем, что  $\int_{Q \in \sigma^{2;l}} \left| \frac{\partial}{\partial n} f^1(Q) \right| dS_Q \rightarrow 0$ .

Воспользовавшись (10) § 3 и оценками производных гармонических функций в центре шара, получим

$$\left| \frac{\partial}{\partial n} f^1(Q) \right|_{Q \in \sigma^{2;l}} \leq C \cdot \frac{l}{\sqrt{\text{mes } \sigma_k^{2;l}}},$$

отсюда

$$\int_{Q \in \sigma^{2;l}} \left| \frac{\partial}{\partial n} f^1(Q) \right| dS_Q \leq C \cdot \frac{l}{\sqrt{\text{mes } \sigma_k^{2;l}}} \cdot \text{mes } \sigma^{2;l}.$$

Стремление последнего выражения к нулю следует из тех же соображений.

Так как при фиксированном  $P$   $\frac{1}{r_{PQ}}$  и  $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}}$  равномерно ограничены, то из 1° и 2° следует стремление второго интеграла в (2) к нулю.

Таким образом, лемма 3 доказана.

§ 6. В § 4 мы показали, что решение задачи Дирихле  $f^1(P)$  в  $\text{int } T_1$  приближает с касанием  $f(P)$  на  $L$  и, следовательно, обладает нужным нам граничным поведением у  $S$ . В следующем параграфе мы будем приближать с касанием  $f_1(P)$  на  $L$ , производя вывод полюсов в формуле Грина, которой представляется  $f_1(P)$  в  $\text{int } T_2$ , в силу § 5. Для этого нам понадобятся гармонические в  $\text{int } S$  функции, приближающие с касанием  $\frac{1}{r_{PQ}}$  при фиксированных  $Q \in T_2$  и стремлении  $P$

к  $S$  по  $L$ , кроме того, будет приближаться производная  $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}}$  функ-

функции  $\frac{1}{r_{PQ}}$  по  $P$ , по направлению к нормали к  $T_2$  в точке  $Q$ . Эти

функции  $H_Q(P)$  и  $\dot{H}_Q(P)$  будут построены нами в этом параграфе. Кроме указанных свойств они будут еще измеримы по  $Q$  при фиксированных  $P$  и будут обладать свойством интегрируемости по  $Q$ .

Кроме того, будут получены некоторые оценки роста этих функций.

Функции  $H_Q(P)$  мы будем строить в виде суммы  $\sum_{i=1}^{\infty} H_Q^i(P)$ , отдельные слагаемые которой гармоничны в  $\text{int } S$ .

1°. Построение  $H_Q^1(P)$ . Обозначим через  $T_2$  трубку, получаемую из  $T_2$  сужением наполовину. Далее мы будем пользоваться методом вывода полюсов М. В. Келдыша ([6], стр. 15). С его помощью построим гармонические по  $P$  в  $\text{int } S$  функции  $H_Q(P)$ ,  $Q \in T_2$ ,

приближающие с точностью  $\frac{1}{2} \varepsilon_1 = \frac{1}{2^2} \frac{1}{PQ}$  в  $\text{int } T_1^{0,2} = \text{int } T_1 \cap \text{int } S_2$ . Из

соображений непрерывности следует, что  $H_Q^1(P)$  можно считать кусочно постоянной, измеримой по  $Q$ . Полюса  $Q$  будем выводить через  $\text{int } S^0 / \{\text{int } T_2 \cap \text{int } S_2\}$  на concentрическую с  $S$  сферу  $S^c$  радиуса два по некоторым кривым  $l_Q = \{Q(s) : Q(0) = Q; Q(\tau_Q) \in S^0\}$ .

Имеет место оценка ([6], стр. 15)

$$\max_{P \in \text{int } S} |H_Q^1(P)| \leq C_1 \cdot \exp \left\{ C_1 \cdot \left[ 1 + \ln \frac{2}{\rho(0) \cdot \varepsilon_1} \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ (1 + \alpha) \cdot \int_0^{\tau_Q} \frac{dt}{\rho(t)} \right] \right\},$$

где  $\tau_Q$  — длина кривой  $l_Q$ , а  $\rho(t)$  — расстояние от точки  $Q(t)$  до  $\text{int } T_2 \cap \text{int } S_2$ ; так как  $\rho(t) > \frac{1}{8} \text{rad } \sigma_i^2$ , где  $\sigma_i^2$  — некоторая компонента

$\text{int } T_1 \cap S_2$ , а  $\tau_Q$  равномерно ограничена величиной  $\tau$  при всех  $Q \in T_2$ , то

$$\max_{P \in \text{int } S} |H_Q^1(P)| \leq C_1 \cdot \exp \left\{ \frac{2^4 \cdot C_1}{\varepsilon_1 \cdot \text{rad } \sigma_i^2} \cdot \exp \left\{ (1 + \alpha) \frac{2^4 \cdot C_1 \cdot \tau}{\text{rad } \sigma_i^2} \right\} \right\}. \quad (1)$$

Положим  $C_0 = 2^{10} \cdot \Pi \cdot (1 + \alpha) \cdot \tau \cdot \max \{C; C_1; 1\}$ , где  $C$  — константа, участвующая в неравенствах до § 5,  $C_1$  — константа из леммы ([6], стр. 15), а  $\Pi$  — площадь  $T_1$ . Обозначим также  $M_1 = C_0 \cdot \exp \{C_0 \exp C_0\}$ .

2°. Построение  $H_Q^2(P)$ . Обозначим через  $S_1^0$  сферу, равноудаленную от  $S_1$  и  $S_2$ , concentрическую с ними. Гладкую, усеченную, разветвленную трубчатую поверхность  $T_4^{1,4}$  определим следующими условиями:

$$\text{int } T_4^{1;4} \cap \text{int } S_1 = \text{int } S_3; \quad T_4^{1;4} \cap S_1 = T_3 \cap S_1,$$

а между  $S_1$  и  $S_1^0$  она гладко сужается, оставаясь внутри  $T_3$  и имея осью  $L$  так, что

$$\text{mes} \{ \text{int } T_4^{1;4} \cap S_1^0 \} = \frac{1}{C_0 \cdot M_1} \quad (2)$$

и с такой толщиной продолжается до  $S_4$ , где и заканчивается.

Обозначим через  $H_Q^{1;4}(P)$  решение задачи Дирихле в  $\text{int } T_4^{1;4}$  по граничным значениям: нуль на  $T_4^{1;4} \cap \text{int } S_1^0$  и  $\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P)$  — на  $T_4^{1;4} / \text{int } S_1^0$ . Пусть  $P \in \text{int } T_4^{1;4} \cap \{ \text{int } S_4 / \text{int } S_1^0 \}$ .  $\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{1;4}(P)$  гармоничны по  $P$  при фиксированных  $Q \in T_3$ .

В компоненте указанного множества, содержащей  $P$ , это выражение меньше решения задачи Дирихле в этой компоненте по граничным условиям:  $\frac{8}{\text{rad } \sigma_i^2} + \max_{P \in \text{int } S} |H_Q^1(P)|$  на нижнем основании и нуль — на остальной части границы.

Следовательно, воспользовавшись принципом максимума и оценками § 3, для гармонической меры получим

$$\begin{aligned} & \max_{P \in \text{int } T_4^{1;4} \cap \{ \text{int } S_4 / \text{int } S_1^0 \}} \left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{1;4}(P) \right| \leq \\ & \leq C \cdot \frac{\max_{P \in \text{int } S} |H_Q^1(P)| + \frac{8}{\text{rad } \sigma^2}}{(\text{rad } S_2 - \text{rad } S_1^0)^2} \cdot \text{mes} \{ \text{int } T_4^{1;4} \cap S_1^0 \} < \\ & \leq C \cdot \frac{M_1}{(\text{rad } S_2 - \text{rad } S_1^0)^2} \cdot \frac{1}{C_0 \cdot M_1} < \frac{1}{2^4}. \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее неравенство получилось в силу определения  $C_0$ , а предпоследнее — при помощи (2) и (1).

Так как  $H_Q^{1;4}(P)$  гармонична в  $\text{int } T_4^{1;4} \cap \text{int } S_1^0$  на всех частях границы этого множества, кроме частей на  $S_1^0$ , равна нулю, а там меньше  $\frac{8}{\text{rad } \sigma_i^2} + \max_{P \in \text{int } S} |H_Q^1(P)|$ , то, воспользовавшись такими же рассуждениями, как выше, получим

$$|H_Q^{1;4}(P)| \leq C \cdot \frac{M_1}{(\text{rad } S_1^0 - \text{rad } S_2)^2} \cdot \frac{1}{C_0 \cdot M_1} < \frac{1}{2^4}. \quad (4)$$

И, наконец, воспользуемся тем, что  $\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{1;4}(P)$  гармонична в  $\text{int } T_4^{1;4} \cap \{ \text{int } S_4 / \text{int } S_1 \}$ ; на основаниях этого множества,

лежащих на  $S_1$ ,  $\left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) \right| < \frac{1}{2^2}$ , а также  $|H_Q^{1;4}(P)| \leq \frac{1}{2^4}$ , в силу (4), следовательно на них

$$\left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{1;4}(P) \right| \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} < \frac{1}{2},$$

а на верхних основаниях, в силу (3), это выражение меньше  $\frac{1}{2^4}$ .

Таким образом, в  $\text{int } T_4^{1;4} \cap \{\text{int } S_2 / \text{int } S_1\}$

$$\left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{1;4}(P) \right| \leq \frac{1}{2}, \quad (5)$$

так как на остальных частях указанного множества это выражение меньше  $\varepsilon_1$ .

Обозначим через  $*T_4^{1;4}$  гладкую трубчатую поверхность, лежащую в  $T_4^{1;4}$  и подобную ей так, что ширина щели между ними равна половине наименьшей толщины  $T_4^{1;4}$ . Напишем формулу Грина в области  $\text{int } *T_4^{1;4}$  для функции  $H_Q^{1;4}(P)$  ( $Q$  — считается фиксированным на  $T_2$ )

$$H_Q^{1;4}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{L \in T_4^{1;4}} \left\{ H_Q^{1;4}(L) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{LP}} - \frac{1}{r_{LP}} \frac{\partial}{\partial n} H_Q^{1;4}(P) \right\} dS_L. \quad (6)$$

По лемме, ([6], стр. 15) существуют гармонические по  $P$  в  $\text{int } S$  функции  $\tilde{H}_L^{1;3}(P)$  и  $\bar{H}_L^{1;3}(P)$ , приближающие с точностью  $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^4 \cdot (C_0 \cdot M_1)^2}$

соответственно  $\frac{1}{r_{LP}}$  и  $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{LP}}$  в  $\text{int } *T_4^{1;3} = \text{int } *T_4^{1;4} \cap \text{int } S_2$ . Из соображений непрерывности можно считать, что среди них только конечное число различных.

Обозначим

$$H_Q^2(P) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{L \in T_4^{1;4}} \left\{ H_Q^{1;4}(L) \cdot \tilde{H}_L^{1;3}(P) - \bar{H}_L^{1;3}(P) \cdot \frac{\partial}{\partial n} H_Q^{1;4}(P) \right\} dS_L, \quad (7)$$

$H_Q^2$  гармонична по  $P$  в  $\text{int } S$ .

Из (6) и (7) следует, что при  $P \in \text{int } *T_4^{1;3}$

$$\begin{aligned} |H_Q^2(P) - H_Q^{1;4}(P)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{L \in T_4^{1;4}} \left\{ |H_Q^{1;4}(L)| \cdot \left| \tilde{H}_L^{1;3}(P) - \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{LP}} \right| + \right. \\ &\left. + \left| \frac{\partial}{\partial n} H_Q^{1;4}(L) \right| \cdot \left| \bar{H}_L^{1;3}(P) - \frac{1}{r_{LP}} \right| \right\} \cdot dS_L \leq \end{aligned}$$

$$\leq \Pi \cdot \{M_1 \cdot \varepsilon_2 + 2 \cdot \tilde{\varepsilon}_2 \cdot C_0 \cdot M_1^2\}. \quad (8)$$

Оценим теперь  $\max_{P \in \text{int } S} |H_Q^2(P)|$ .

По лемме ([6], стр. 15) имеем

$$\begin{aligned} & \max_{P \in \text{int } S} |\tilde{H}_L^{i;3}(P)|; \max_{P \in \text{int } S} |\tilde{H}_L^{i;3}(P)| \leq \\ & \leq C \cdot \exp \left\{ \frac{2C}{\varepsilon_2} \cdot q_4 \cdot \sqrt{C_0 \cdot M_1} \cdot \exp q_4 \cdot C_0 \cdot \sqrt{C_0 \cdot M_1} \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

что получается подстановкой (2) и использованием того, что радиус пропорционален квадратному корню из площади. Воспользовавшись (7), (9) и значением  $\tilde{\varepsilon}_2$ , получим

$$\begin{aligned} & \max_{P \in \text{int } S} |H_Q^2(P)| \leq \Pi \cdot \left\{ \max |H_Q^{i;4}(P)| \cdot \max |\tilde{H}_L^{i;3}(P)| + \right. \\ & \left. + \max |\tilde{H}_L^{i;3}(P)| \cdot \frac{\max |H_L^{i;4}(P)|}{\text{rad } *T_4^{i;3}} \right\} \leq \\ & \leq \Pi \cdot \{M_1 \cdot 2 \cdot M_1 \cdot \sqrt{C_0 \cdot M_1} \cdot q_4\} \cdot C \cdot \exp \{2C \cdot 2^4 \cdot (C_0 \cdot M_1)^2 \times \\ & \times q_4 \cdot \sqrt{C_0 \cdot M_1} \cdot \exp q_4 \cdot C_0 \sqrt{C_0 \cdot M_1}\} \leq \exp \{\exp M_1\}, \end{aligned} \quad (10)$$

так как  $M_1$  достаточно велико. Положим  $M_2 = \exp \{\exp M_1\}$ .

Окончательно в этом пункте мы получили гармонические в  $\text{int } S$  функции  $H_Q^2(P)$  со следующими свойствами:

а) в  $\text{int } *T_4^{i;3} \cap \{\text{int } S_2 / \text{int } S_1\}$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^2(P) \right| \leq \left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{i;4}(P) \right| + \\ & + |H_Q^{i;4}(P) - H_Q^2(P)| \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2} = \varepsilon_1; \end{aligned}$$

б) в  $\text{int } *T_4^{i;3} \cap \text{int } S_1$

$$|H_Q^2(P)| < |H_Q^2(P) - H_Q^{i;4}(P)| + |H_Q^{i;4}(P)| \leq \frac{1}{2^2} = \varepsilon_2;$$

в) в  $\text{int } *T_4^{i;3} \cap \{\text{int } S_2 / \text{int } S_2\}$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^2(P) \right| < \left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{i;4}(P) \right| + \\ & + |H_Q^2(P) - H_Q^{i;4}(P)| < \frac{1}{2^2} = \varepsilon_2 \end{aligned}$$

и

$$\max_{P \in \text{int } S} |H_Q^2(P)| \leq \exp(\exp M_1). \quad (11)$$

В 1° мы заметили, что  $H_Q^1(P)$  можно считать кусочно постоянной функцией  $Q$ . Аналогично можно считать, что  $H_Q^2(P)$  удовлетворяет условиям (а), (б), (в), (11) и является кусочно постоянной функцией  $Q$ .

п°. Построение  $H_Q^n(P)$ . Это построение будет аналогично 2°. Обозначим через  $S_{n-1}^0$  сферу, расположенную между  $S_{n-1}$  и  $S_n$  и равноудаленную от них.

Сейчас роль  $T_4^1$  играет поверхность  $T_{n+2}^{n-1; n+2}$ , построенная следующим образом:  $\text{int } T_{n+2}^{n-1; n+2} \cap S_{n-1} = \text{int } *T_{n+1}^{n-2; n} \cap \text{int } S_{n-1}$ . Между  $S_{n-1}$  и  $S_{n-1}^0$  она сужается внутри  $*T_{n+1}^{n-2; n}$  так, что

$$\text{mes} \{ \text{int } T_{n+2}^{n-1; n+2} \cap S_{n-1}^0 \} = \frac{1}{C_0 \cdot M_{n-1}} \quad (12)$$

и с такой толщиной продолжается до  $S_{n+2}$ , имея осью  $L$ .

Обозначим через  $H_Q^{n-1; n+2}$  решение задачи Дирихле в  $\text{int } T_{n+2}^{n-1; n+2}$  по граничным условиям: нуль на  $T_{n+2}^{n-1; n+2} \cap \text{int } S_{n-1}$

$$\text{и } \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - \dots - H_Q^{n-1}(P) \text{ на } T_{n+2}^{n-1; n+2} / \text{int } S_{n-1}.$$

Повторяя рассуждения, проведенные в 2°, получим

$$\max_{P \in \text{int } S_{n-1}} |H_Q^{n-1; n+2}(P)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon_n = \frac{1}{2^{n+1}} \quad (13)$$

и

$$\left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - \dots - H_Q^{n-1; n+2}(P) \right| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad (14)$$

в  $\{ \text{int } S_{n+1} / \text{int } S_n \}$ . Далее строим трубку  $*T_{n+2}^{n-1; n+1}$ , лежащую внутри  $T_{n+2}^{n-1; n+2}$  и удаленную от нее на половину ее наименьшей толщины  $\frac{1}{2} \text{rad } \sigma_l^{n-1; n+2}$ .

Запишем формулу Грина в области  $\text{int } T_{n+2}^{n-1; n+2}$  для  $H_Q^{n-1; n+2}(P)$ :

$$H_Q^{n-1; n+2}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{L \in T_{n+2}^{n-1; n+2}} \left\{ H_Q^{n-1; n+2}(L) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{LP}} - \frac{1}{r_{LP}} \frac{\partial}{\partial n} H_Q^{n-1; n+2}(L) \right\} dS_L. \quad (15)$$

По лемме ([6], стр. 15) существуют гармонические в  $\text{int } S$  по  $P$  функции  $\tilde{H}_L^{n-1; n+2}(P)$  и  $\tilde{H}_L^{n-1; n+2}(P)$ , приближающие с точностью

$$\varepsilon_n = \frac{1}{(C_0 \cdot M_{n-1})^2} \quad (16)$$

$\frac{1}{r_L} \Big|_P$  и  $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{LP}}$  в  $\text{int } *T_{n+2}^{n-1; n+1}$ .

Определим

$$H_Q^n(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{L \in T_{n+2}^{n-1; n+2}} \left\{ H_Q^{n-1; n+1}(L) \cdot \tilde{H}_L^{n-1; n+2}(P) - \tilde{H}_L^{n-1; n+2}(P) \frac{\partial}{\partial n} H_Q^{n-1; n+2}(L) \right\} dS_L. \quad (17)$$

$H_Q^n(P)$  гармонична в  $\text{int } S$  по  $P$ .

При  $P \in \text{int } *T_{n+2}^{n-1; n+1}$ , в силу (15), (16) и (17)

$$\begin{aligned} |H_Q^n(P) - H_Q^{n-1; n+2}(P)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{L \in T_{n+2}^{n-1; n+2}} \left\{ H_Q^{n-1; n+2}(L) \times \right. \\ &\times \left[ \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{LP}} - \tilde{H}_L^{n-1; n+2}(P) \right] + \left| \frac{\partial}{\partial n} H_Q^{n-1; n+2}(L) \right| \times \\ &\times \left[ \tilde{H}_L^{n-1; n+2}(P) - \frac{1}{r_{LP}} \right] \Big\} dS_L \leq \Pi \cdot \left\{ M_1 + \dots + M_{n-1} \right\} \times \\ &\times \left( 1 + \frac{1}{\text{rad } \sigma_i^{n-1; n+2}} \right) \Big\} \varepsilon_n \ll \frac{1}{2^{n+2}}, \end{aligned} \quad (18)$$

ввиду быстрого роста  $M_k$ .

Таким образом, выполняются условия

а) при  $P \in \text{int } S_{n-1}$ ,  $|H_Q^n(P)| \leq \frac{1}{2^n}$ ;

б) при  $P \in \text{int } S_n / \text{int } S_{n-1}$

$$\left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - \dots - H_Q^n(P) \right| \leq \frac{1}{2^{n-1}};$$

в) при  $P \in \text{int } S_{n+1} / \text{int } S_n$

$$\left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - \dots - H_Q^n(P) \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

По лемме (6, стр. 15) имеем

$$\begin{aligned} \max_{P \in \text{int } S} |\tilde{H}_L^{n-1; n+2}(P)|; \max |\tilde{H}_L^{n-1; n+2}(P)| &\leq \\ &\leq C_0 \cdot \exp \left\{ \frac{C_0}{\varepsilon_n \cdot \text{rad } \sigma_i^{n-1; n+2}} \cdot \exp \frac{C_0}{\text{rad } \sigma_i^{n-1; n+2}} \right\} \leq \\ &\leq C_0 \cdot \exp \{ C_0 \cdot (C_0 \cdot M_{n-1})^2 \cdot q_{n-1} \cdot \sqrt{C_0 \cdot M_{n-1}} \cdot \exp q_{n-1} \cdot C_0 \cdot \sqrt{C_0 \cdot M_{n-1}} \}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подстановка (19) в (17) дает

$$\max_{P \in \text{int } S} |H_Q^n(P)| \leq \Pi \cdot \frac{M_{n-1}}{\text{rad } \sigma_i^{n-1; n+2}} \cdot C_0 \cdot \exp \{ q_{n-1} \cdot C_0 \times$$

$$\times \times (C_0 \cdot M_{n-1})^2 \cdot \sqrt{C_0 \cdot M_{n-1}} \cdot \exp q_{n-1} \cdot C_0 \cdot \sqrt{C_0 \cdot M_{n-1}} \ll \exp \{ \exp M_{n-1} \}, \quad (20)$$

так как  $M_{n-1}$  существенно велико.

Так как  $H_Q^1(P), \dots, H_Q^{n-1}(P)$  кусочно непрерывные функции  $Q$ , то из соображений непрерывности из  $H_Q^n(P)$  можно выбрать счетное число функций так, чтобы удовлетворялись (а), (б), (в) и (20). Таким образом,  $H_Q^n(P)$  также можно считать кусочно постоянной функцией.

Ряд  $\sum_1^n H_Q^i(P)$  сходится внутри любой сферы  $S_i$ , так как в силу условия (а)

$$\max_{P \in \text{int } S} |H_Q^{n+1}(P)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Функция  $H_Q(P)$  как сумма равномерно сходящегося ряда гармонических функций является гармонической функцией [8]. Так как каждая  $H_Q^i(P)$  является измеримой функцией  $Q$ , то  $H_Q(P)$  также является измеримой функцией  $Q$  [9].

Покажем, что  $\left| H_Q(P) - \frac{1}{r_{PQ}} \right| \rightarrow 0$  при стремлении  $P$  к  $S$  по  $L$ .

Действительно, при  $P \in L \cap \{ \text{int } S_{n+1} / \text{int } S_n \}$ , в силу (а), (б), (в)

$$|H_Q^{n+2+i}(P)| \leq \frac{1}{2^{n+2+i}}, \quad \left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - \dots - H_Q^{n+1}(P) \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

следовательно

$$\begin{aligned} \left| H_Q(P) - \frac{1}{r_{PQ}} \right| &\leq \left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - \dots - H_Q^{n+1}(P) \right| + \\ &+ |H_Q^{n+2}(P)| + \dots \leq \frac{1}{2^n}. \end{aligned} \quad (21)$$

Совершенно так же, как мы приблизили  $\frac{1}{r_{PQ}}$ , мы можем приблизить

$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}}$  с касанием у  $S$  функцией  $\dot{H}_Q(P)$ , гармонической в  $\text{int } S$ .

Для  $H_Q(P)$  и  $\dot{H}_Q(P)$  имеют место неравенства

$$\max_{P \in \text{int } S_i} |H_Q(P)|; \max_{P \in \text{int } S_i} |\dot{H}_Q(P)| < \exp \{ \exp \{ \dots \exp \text{const} \} \}, \quad (22)$$

где число  $\exp$  возрастает как  $2i$ ; это следует из (20) и аналогичного

неравенства для  $\dot{H}_Q^i(P)$ , так как в силу (а) в  $\sum_1^n H_Q^i(P)$  члены  $H_Q^{i+1+i}$

малы в  $\text{int } S_i$ , а

$$\max_{P \in \text{int } S_i} |H_Q^i(P)| + \dots + \max_{P \in \text{int } S_i} |H_Q^{i+1}(P)| < M_{i+2}.$$

§ 7. В этом параграфе мы построим функцию  $H(P)$ , о которой говорится в основной теореме работы. Она будет гармоничной в  $\text{int } S$ , приближать с касанием  $f(P)$  на  $L$  и, следовательно, будет удовлетворять условиям теоремы.

Определим

$$H(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{Q \in \Gamma} |f^1(Q) \dot{H}_Q(P) - H_Q(P) \cdot \frac{\partial}{\partial n} f^1(Q)| dS_Q,$$

где  $f^1(Q)$ ,  $H_Q(P)$  и  $\dot{H}_Q(P)$  — измеримые функции  $Q$ . Интеграл сходится равномерно, так как в любой точке  $P \in L$   $H_Q(P)$  и  $\dot{H}_Q(P)$  ограничены равномерно по  $\zeta$ , так как приближают  $\frac{1}{r_{PQ}}$  и  $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}}$ , которые ограничены, а интегралы  $\int_{Q \in \Gamma} |f^1(Q)| dS_Q$  и  $\int_{Q \in \Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial n} f^1(Q) \right| dS_Q$  сходятся, как показано в §§ 5, 6.  $H(P)$  является гармонической функцией в  $\text{int } S$ .

Лемма 4.  $|H(P) - f^1(P)| \rightarrow 0$  при стремлении  $P$  к  $S$  по  $L$ .

Доказательство. Действительно, пусть  $P \in L$ , тогда

$$\begin{aligned} |H(P) - f^1(P)| &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_{Q \in \Gamma} \left\{ f^1(Q) \cdot \left\{ \dot{H}_Q(P) - \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}} \right\} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial n} f^1(Q) \left\{ H_Q(P) - \frac{1}{r_{PQ}} \right\} \right\} dS_Q \right| \leq \\ &\leq \max_{Q \in \Gamma} \left| H_Q(P) - \frac{1}{r_{PQ}} \right| \cdot \int_{Q \in \Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial n} f^1(Q) \right| dS_Q + \\ &+ \max_{Q \in \Gamma} \left| \dot{H}_Q(P) - \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}} \right| \cdot \int_{Q \in \Gamma} |f^1(Q)| dS_Q. \end{aligned}$$

Но так как

$$\max_{Q \in \Gamma} \left| H_Q(P) - \frac{1}{r_{PQ}} \right| \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \max_{Q \in \Gamma} \left| \dot{H}_Q(P) - \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}} \right| \rightarrow 0$$

при стремлении  $P$  к  $S$  по  $L$ , то лемма доказана.

Таким образом,  $H(P)$  удовлетворяет всем условиям основной теоремы. Оценим рост  $H(P)$  у  $S$ .

$$\begin{aligned} \max_{P \in \text{int } S} |H(P)| &< \max_{P \in \text{int } S} \{ |H_Q(P)|; |\dot{H}_Q(P)| \} \cdot \int_{Q \in \Gamma} \{ |f^1(Q)| + \\ &+ \left| \frac{\partial}{\partial n} f^1(Q) \right| \} dS_Q < \exp \{ \exp \dots \{ \exp \text{ const} \} \}, \end{aligned} \quad (23)$$

где число  $\exp$  равно  $2i$ , в силу (22).

**Замечание.** Если брать достаточно много  $\alpha$ -точек на сферах  $S_i$  и достаточно тонкие трубки  $T$ , то все предыдущее остается в силе и, следовательно, можно строить функцию, гармоническую в  $\text{int } S$  с таким же поведением, как  $H(P)$ , но уже внутри произвольного наперед заданного острия, о чем говорилось во введении.

В заключение, выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю чл.-корр. АН СССР С. Н. Мергеляну за постановку задачи и ценные указания.

Ереванский

государственным университет

Поступило 10.VI.1969

Ա. Ա. ՇԱՀԻՆԻԱՆ. Սֆերայի ներսում հարմոնիկ ֆունկցիաների սահմանային բազմաթյունների մասին (ամփոփում)

Նշանակենք  $S$ -ով  $R^3$  եռաչափ եզրվորյալ տարածության միավոր սֆերան,

Աշխատանքը նվիրված է հետևյալ արդյունքի ազատացմանը.

**Քերտեմ.** Գոյություն ունի  $\text{int } S$  զնդում որոշված այնպիսի հարմոնիկ ֆունկցիա  $H(P)$ , որ յուրաքանչյուր  $a \in S$  կետի և  $[A; B]$  հատվածի համար գոյություն ունի ուղղելի,  $a$  կետում  $S$ -ին ուղղահայաց  $I_a; [A; B]$  կտր, որով

$$C_{I_a; [A; B]}(H) = [A; B],$$

ուր  $C_{I_\gamma}(f) - I_\gamma$  կտրի վրա  $f$  ֆունկցիայի ընդունած արժեքների սահմանային բազմությունն է: Այդ  $H(P)$  ֆունկցիան կարելի է կառուցել այնպես, որ  $S$ -ի հետ համակենտրոն  $1 - \frac{1}{2^l}$  շառավիղ-ներով սֆերաների ներսում տեղի ունենան հետևյալ անհավասարությունները համապատասխանաբար

$$|H(P)| < \exp \{ \exp \dots \{ \exp \text{ const} \} \},$$

ուր  $\exp$ -երի քանակը հավասար է  $2l$ , իսկ  $\text{const}$ - արտյուղտ հաստատուն է:

A. A. SHAHINIAN. On the cluster sets of harmonic in a sphere functions (summary)

Let  $S$  be the unit sphere in Euclid space  $R^3$ .

**Theorem.** There exists harmonic in the interior of  $S$  function  $H(P)$  such that for every point  $a \in S$  and every segment  $[A; B]$ , a strickbar path  $I_a; [A; B]$  orthogonal to  $S$  in  $a$  does exist, such that

$$C_{I_a; [A; B]}(H) = [A; B],$$

where  $C$  is the cluster set of the function  $f$  along  $I_\gamma$ .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. C. Pirantian. Ambiguous points of a functions continuous inside a sphere, The Mich. Math. Jour., 4, No. 2, 1957.
2. F. Bagemihl. Curvilinear cluster sets of a arbitrary functions, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 41, 1955.
3. F. Bagemihl. Ambiguous points of a function harmonic inside a sphere, The Mich. Math. Jour., 4, No. 2, 1957.

4. Носиро. Предельные множества, ИЛ, 1963.
5. С. Н. Мерелян. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.
6. С. Н. Мерелян. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши, УМН, XI, вып. 5 (71), 1956, 3—26.
7. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, 1941.
8. Р. Курант. Уравнения с частными производными, „Мир“, 1964.
9. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, ОГИЗ, 1957.