ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 5, 1969 Математика

В. С. ЗАХАРЯН

О РАДИАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ И РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Введение

Как известно [1], класс функций ограниченного вида N, введенный Р. Неванлинна, обладает следующими важными свойствами:

а) если $F(z) \in N$, то предел

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1-0} F(re^{i\theta}) \tag{1}$$

существует всюду на $[0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0,2\pi]$ линейной меры нуль;

б) для каждого значения a ряд $\sum\limits_1^\infty (1 - r_\nu(a))$ сходится, где $r_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, \cdots$ означают модули нулей функции $F(z) - a$.

В исследованиях М. М. Джрбашяна [2], [3] были введены новые классы $N_\alpha (-1 < \alpha < \infty)$ мероморфных в единичном круге функций и установлено их параметрическое представление.

Класс $N_\alpha (-1 < \alpha < \infty)$ определялся посредством α-характеристики $T_\alpha(r, F) = m_\alpha(r, F) + N_\alpha(r, F)$ как множество тех мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \{T_\alpha(r, F)\} < +\infty.$$

При этом функции $m_\alpha(r, F)$, $N_\alpha(r, F)$ и $T_\alpha(r, F)$ представляют собой своеобразные аналоги известных неванлинновских функций $m(r, F)$, $N(r, F)$ и $T(r, F)$, совпадая с ними при значении параметра $\alpha = 0$, так что класс N_0 совпадает с классом N.

Вместе с тем, важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1} \subset N_{\alpha_2}$ и, в частности,

$$N_\alpha \subset N_0 = N \qquad (-1 < \alpha < 0). \tag{2}$$

Пусть $D^{-\alpha}$ — оператор интегрирования (при $0 < \alpha < \infty$) или дифференцирования (при $-1 < \alpha < 0$) в смысле Римана-Лиувилля с началом в нулевой точке, т. е.

$$D^{-\alpha}\varphi(r)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r (r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt \qquad (0<\alpha<\infty)$$

и

$$D^{-\alpha}\varphi(r)\equiv\frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}\varphi(r) \qquad (-1<\alpha<0),$$

и пусть

$$D^{-\alpha}\varphi(r)|_{\alpha=0}=\varphi(r),\quad D^{-\alpha}_{(+)}\varphi(r)=\max\{D^{-\alpha}\varphi(r),\,0\}.$$

Обозначим через A_α класс *аналитических* в единичном круге функций $f(z)$, входящих в N_α. Таким образом, для функций класса A_α имеем

$$\sup_{0<r<1} T_\alpha(r, F)=\sup_{0<r<1}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} D^{-\alpha}_{(+)}\ln|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta\right\}<+\infty. \tag{3}$$

Из (2) очевидным образом следует, что

$$A_\alpha\subset N \qquad (-1<\alpha<0). \tag{4}$$

Далее известно, что класс A_α $(-1<\alpha<\infty)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих в круге $|z|<1$ представление вида

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha} z^\lambda B_\alpha(z, a_\mu)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\,d\psi(\vartheta)\right\}, \tag{5}$$

где

$$B_\alpha(z, a_\mu)=\prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)e^{-W_\alpha(z,\,a_\mu)}$$

сходящееся произведение типа Бляшке, и при $|z|<1$ и $|\varsigma|<1$ положено

$$W_\alpha(z,\varsigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\,V_\alpha(e^{i\vartheta},\varsigma)\,d\vartheta,$$

$$V_\alpha(re^{i\vartheta},\varsigma)=r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|1-\frac{re^{i\psi}}{\varsigma}\right|,$$

$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\},$$

$\psi(\vartheta)$ — вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi,\pi]$, $\lambda>0$ — произвольное целое число, γ — произвольное вещественное число, а $K_\alpha=\alpha\sum_1^\infty\frac{1}{n(n+\alpha)}$ ([3], стр. 655).

Замечание 1. Отметим, что из $f(z)\in A_\alpha$ следует, что

$$\sum_1^\infty(1-|a_k|)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{6}$$

где a_k — нули функции $f(z)$.

Обозначим через A_α^* множество тех функций из A_α, в представлении (5) которых функция $\psi(\gamma)$ не возрастающая, т. е. множество функций, имеющих представление вида

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda K_\alpha} z^\lambda B_\alpha(z, a_\mu) \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z)\, d\psi(\theta)\right\},\ d\psi(\theta)\geqslant 0. \tag{7}$$

Так как при $-1<\alpha<0$ имеем $\operatorname{Re} S_\alpha(z)>0$, а также [4]

$$|B_\alpha(z, a_\mu)|\leqslant |B_0(z, a_\mu)|<1 \quad (|z|<1), \tag{8}$$

то легко убедиться в справедливости следующих двух замечаний:

Замечание 2. Если $f(z)\in A_\alpha^*$ $(-1<\alpha<0)$, то

$$|f(z)|\leqslant 1,\ |z|<1.$$

Замечание 3. Любую функцию класса N_α $(-1<\alpha<0)$ можно представить как частное двух функций класса A_α^*.

Приведем одно хорошо известное определение [5], которое понадобится нам в дальнейшем.

Пусть E — ограниченное борелево множество на комплексной плоскости и $\gamma\cdot(0<\gamma<2)$—фиксированное число. Если существует такое положительное распределение масс μ на E, что $\mu(E)=1$ и интеграл

$$\int_E \frac{d\mu(\zeta)}{|z-\zeta|^\gamma}$$

равномерно ограничен для всех z, то говорят, что множество E имеет положительную γ-емкость, в противном случае говорят, что γ-емкость множества E равна нулю и пишут $C_\gamma(E)=0$. Отметим, что если γ-емкость некоторого компактного множества E равна нулю, то всякая h-хаусдорфова мера множества E также равна нулю, если функция меры $h(r)$ удовлетворяет условию

$$\int_0 \frac{h(r)}{r^{1+\gamma}}\,dr<+\infty.$$

В связи со свойством (4) классов A_α и свойствами а) и б) класса N естественно возникают две задачи.

1. Охарактеризовать в зависимости от параметра α то исключительное множество, где для функций класса A_α^* $(-1<\alpha<0)$ предел (1) не существует.

Решение этой задачи дается следующей теоремой, доказанной в работе [4].

Теорема А. Если $F(z)\in N_\alpha$ $(-1<\alpha<0)$, то предел

$$F(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta})$$

существует для любого $\gamma\in[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E\subset[0, 2\pi]$, γ-емкость которого (где γ—любое число из интервала $(1+\alpha, 1)$) равна нулю.

2. Густота нулей произвольной функции класса A_α^* характеризуется условием (6). Что можно сказать о густоте произвольных a-точек ($|a|<1$) функций этого класса?

В § 1 настоящей работы доказывается теорема о конечности радиальной вариации функций класса A_α^*, откуда, в частности, будет вытекать и результат теоремы А для классов A_α^* и, согласно замечанию 3, и для классов N_α.

Теорема 6, доказанная в § 2, решает вопрос о распределении a-точек функций класса A_α^*.

§ 1. Радиальные изменения функций класса A_α^*

Говорят, что функция, голоморфная в открытом единичном круге D, имеет конечное радиальное изменение в точке $e^{i\varphi}$, если радиус с концом в $e^{i\varphi}$ отображается посредством этой функции на спрямляемую кривую. Ясно, что в данной точке из конечности радиального изменения вытекает существование конечного радиального предела для данной функции в этой точке.

Заметим сразу, что из теоремы 2 работы [6] и теоремы 2 работы [7] следует

Теорема 1. *При* $-1<\alpha<0$ *и*

$$\sum_1^\infty (1-|a_k|)^{1+\alpha}<+\infty$$

функция $B_\alpha(z, a_\mu)$ *всюду на единичной окружности имеет конечное радиальное изменение, кроме, быть может, некоторого исключительного множества* $E\subset[0,2\pi]$, $(1+\alpha)$*—емкость которого равна нулю.*

Следовательно, если обозначим

$$V(B_\alpha, \vartheta)=\int_0^1 |B_\alpha'(re^{i\vartheta}, a_\mu)|\,dr,$$

то теорема 1 утверждает, что $V(B_\alpha, \vartheta)<+\infty$ для всех ϑ, кроме, быть может, некоторого множества $E\subset[0,2\pi]$, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть интегрируемая на* $[0,1]$ *функция* $\omega(r)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)}{1-r}\,dr<\infty, \quad 0\leqslant\omega(r)\leqslant 1.$$

Тогда, если $f(z)\in A_\alpha^*$ $(-1<\alpha<0)$, *то*

$$\int_0^1 \omega(r)|f'(re^{i\varphi})|\,dr < +\infty,$$

кроме, быть может, некоторого множества E, $(1+\alpha)$*-емкость которого равна нулю.*

Доказательство. Пусть $f(z) \in A_\alpha^*$ $(-1 < \alpha < 0)$, тогда согласно (7) имеем

$$f(z) = e^{i\gamma + \lambda K_\alpha} z^\lambda B_\alpha(z, a_\mu) \cdot f_1(z),$$

где

$$f_1(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\theta}z)\,d\psi(\theta)\right\}, \quad d\psi(\theta) \geqslant 0. \tag{9}$$

Дифференцируя $f(z)$, получим

$$f'(z) = [e^{i\gamma + \lambda K_\alpha} z^\lambda B_\alpha(z, a_\mu)]' f_1(z) + [e^{i\gamma + \lambda K_\alpha} z^\lambda B_\alpha(z, a_\mu)] f_1'(z).$$

Имея в виду (8) и неравенство $|f_1(z)| \leqslant 1$ при $|z| < 1$, получим оценку

$$|f'(z)| \leqslant c\lambda + |B_\alpha'(z, a_\mu)| + |f_1'(z)|. \tag{10}$$

Из оценки (10) ясно, что для доказательства теоремы надо показать, что вне некоторого множества $E \subset [0, 2\pi]$, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю, следующие два интеграла конечны:

$$V_\omega(B_\alpha, \theta) = \int_0^1 \omega(r)\,|B_\alpha'(re^{i\theta}, a_\mu)|\,dr$$

и

$$V_\omega(f_1, \theta) = \int_0^1 \omega(r)\,|f_1'(re^{i\theta})|\,dr.$$

Так как $V_\omega(B_\alpha, \theta) \leqslant V(B_\alpha, \theta)$, то из теоремы 1 заключаем, что $V_\omega(B_\alpha, \theta) < +\infty$ для всех θ, кроме, быть может, некоторого множества E, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю.

Для оценки $V_\omega(f_1, \theta)$ заметим, что из представления (9) следует, что

$$|f_1'(re^{i\varphi})| \leqslant c \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi(\theta)}{|1 - re^{i(\varphi-\theta)}|^{2+\alpha}}.$$

Возьмем теперь произвольное замкнутое борелево множество $E \subset [0, 2\pi]$, $(1+\alpha)$-емкость которого положительна. Согласно определению тогда существует такое положительное распределение единичной массы μ на E, для которого функция

$$U(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\varphi)}{|1 - re^{i(\theta-\varphi)}|^{1+\alpha}}$$

остается равномерно ограниченной по θ при $r \to 1-0$.

Следовательно, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} V_\omega(f_1, \vartheta)\, d\mu(\vartheta) = \int_0^{2\pi} d\mu(\vartheta) \int_0^1 \omega(r)\, |f_1'(re^{i\vartheta})|\, dr \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^1 \omega(r) dr \int_0^{2\pi} d\mu(\vartheta) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi(\varphi)}{|1 - re^{i(\vartheta-\varphi)}|^{2+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^1 \frac{\omega(r)}{1-r} dr \int_{-\pi}^{\pi} d\psi(\varphi) \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\vartheta)}{|1 - re^{i(\vartheta-\varphi)}|^{1+\alpha}} < \infty. \tag{11}$$

Отсюда вытекает, что ни на каком множестве E с положительной $(1+\alpha)$-емкостью функция $V_\omega(f_1, \vartheta)$ не может стать бесконечностью, чем и завершается доказательство теоремы 1.

Доказанная теорема устанавливает ограниченность радиальной вариации при наличии некоторого веса $\omega(r)$. Заметим однако, что аналогичным образом можно доказать ограниченность радиальной вариации функции класса A_α^*, правда уже на более редком множестве. Именно, имеет место

Теорема 3. *Если* $f(z) \in A_\alpha^*$ $(-1 < \alpha < 0)$, *то*

$$V(f, \vartheta) = \int_0^1 |f'(re^{i\vartheta})|\, dr < +\infty,$$

кроме, быть может, некоторого множества E, γ-*емкость которого равна нулю, где* γ—*любое число из интервала* $(1+\alpha, 1)$.

Доказательство проводится так же, как и в теореме 2, но вместо оценок (11) надо воспользоваться следующими оценками:

$$\int_0^{2\pi} V(f_1, \vartheta)\, d\mu(\vartheta) = \int_0^{2\pi} d\mu(\vartheta) \int_0^1 |f_1'(re^{i\vartheta})|\, dr \leqslant c \int_0^1 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\psi(\varphi) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\vartheta)}{|1 - re^{i(\vartheta-\varphi)}|^{2+\alpha}} \leqslant \int_0^1 \frac{dr}{(1-r)^{2+\alpha-\gamma}} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi(\varphi) \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\vartheta)}{|1 - re^{i(\vartheta-\varphi)}|^{\gamma}} < +\infty.$$

Заметим, что, как уже было отмечено, из теоремы 3 вытекает, что радиальные предельные значения функции $f(z) \in A_\alpha^*$ (и следовательно, согласно замечанию 3, любой функции класса N_α) могут не существовать только на множестве E, γ-емкость которого равна нулю, где $\gamma \in (1+\alpha, 1)$—произвольное число.

§ 2. Распределение значений функции класса A_α^*

Предположим, что функция $w(z) \in A_\alpha^*$. Нас интересует следующий вопрос: при каких условиях функция $w(z) - \zeta$, $|\zeta| < 1$ будет принадлежать некоторому классу A_β, где $\alpha \leqslant \beta < 1$? С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$V_\alpha(w(z), \varsigma) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |w(re^{i\varphi}) - \varsigma|.$$

Используя ход рассуждений, приведенный в работе [3], мы установим интегральное представление для функции $V_\alpha(w(re^{i\varphi}), \varsigma)$.

Пусть функция $w(z)$ принимает значение C в точке $z = ce^{i\varphi}$ и пусть $a < c < b$. Предположим, что $w(te^{i\varphi}) - C$ как функция от t в интервале $[a, b]$ не обращается в нуль при $t \neq c$.

Тогда

$$\text{V.p. Re} \int_a^b \frac{dw(te^{i\varphi})}{w(te^{i\varphi}) - C} = \lim_{\varepsilon \to 0} \text{Re} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dw}{w - C} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dw}{w - C} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\log \left| \frac{w((c-\varepsilon)e^{i\varphi}) - C}{w(ae^{i\varphi}) - C} \right| + \log \left| \frac{w(be^{i\varphi}) - C}{w((c+\varepsilon)e^{i\varphi}) - C} \right| \right],$$

откуда следует, что

$$\text{V.p. Re} \int_a^b \frac{dw(te^{i\varphi})}{w(te^{i\varphi}) - C} = \log \left| \frac{w(be^{i\varphi}) - C}{w(ae^{i\varphi}) - C} \right|. \tag{12}$$

Предположим теперь, что функция $\psi(x) \in L(a, b)$ и в некоторой окрестности $(c - \delta, c + \delta)$ точки $x = c$ удовлетворяет условию Гельдера $|\psi(x) - \psi(c)| \leqslant A|x - c|^\lambda$, где $A > 0$ и λ $(0 < \lambda \leqslant 1)$ — постоянные.

В этих условиях очевидно имеем

$$\text{Re} \frac{\psi(t) - \psi(c)}{w(te^{i\varphi}) - C} w'(te^{i\varphi}) \in L(a, b)$$

и следовательно, применяя (12), получаем формулу

$$\text{V.p. Re} \int_a^b \frac{\psi(t)\, dw(te^{i\varphi})}{w(te^{i\varphi}) - C} = \text{Re} \int_a^b \frac{\psi(t) - \psi(c)}{w(te^{i\varphi}) - C} dw(te^{i\varphi}) +$$

$$+ \varphi(c) \log \left| \frac{w(be^{i\varphi}) - C}{w(ae^{i\varphi}) - C} \right|. \tag{13}$$

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 1. *При любых фиксированных* r $(0 \leqslant r < 1)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *и* ς $(0 < |\varsigma| < 1)$ *справедливы формулы*

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}), \varsigma) = \text{Re} \frac{re^{i\varphi}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha w'(rte^{i\varphi})}{\varsigma - w(rte^{i\varphi})} dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \log |\varsigma - w(0)|, \quad 0 < \alpha < +\infty, \tag{14}$$

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}), \varsigma) = \operatorname{Re} \frac{re^{i\varphi}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha w'(rte^{i\varphi})}{\varsigma - w(rte^{i\varphi})} dt, \quad -1<\alpha<0, \tag{15}$$

причем в случае, когда на луче φ $w(rte^{i\varphi})=\varsigma$, *то интегралы в формулах* (14) *и* (15) *следует понимать в смысле главного значения.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $0<\alpha<\infty$. По определению имеем

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}), \varsigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} r^{-\alpha} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \log|\varsigma - w(te^{i\varphi})|\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \log|\varsigma - w(rte^{i\varphi})|\, dt. \tag{16}$$

Если на луче φ $w(rte^{i\varphi}) \neq \zeta$, то с помощью интегрирования по частям из (16) получим

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}), \varsigma) = -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \operatorname{Re} \int_0^1 \log(\varsigma - w(rte^{i\varphi}))\, d(1-t)^\alpha =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \log|\varsigma - w(0)| + \operatorname{Re} \frac{re^{i\varphi}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha w'(rte^{i\varphi})}{\zeta - w(rte^{i\varphi})} dt.$$

Если на луче $\arg z = \varphi$ есть такая точка, где $w(z) = \varsigma$, то интеграл следует понимать в смысле главного значения. Пусть $w(a_1 re^{i\varphi}) = \varsigma$ $(0<a_1<1)$ и a_1—единственное значение t из интервала $(0,1)$, где $w(tre^{i\varphi}) = \varsigma$.

Тогда из (16) имеем

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}), \varsigma) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{a_1-\varepsilon} (1-t)^{\alpha-1} \log|\varsigma - w(rte^{i\varphi})|\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a_1+\varepsilon}^1 (1-t)^{\alpha-1} \log|\varsigma - w(rte^{i\varphi})|\, dt \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} [(1-a_1-\varepsilon)^\alpha \log|\varsigma - w((a_1+\varepsilon) re^{i\varphi})] -$$

$$-(1-a_1+\varepsilon)^\alpha \log|\varsigma - w((a_1-\varepsilon) re^{i\varphi})|] + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \log|\varsigma - w(0)| +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left[\int_0^{a_1-\varepsilon} \frac{(1-t)^\alpha w'(rte^{i\varphi}) re^{i\varphi}}{\varsigma - w(rte^{i\varphi})} dt + \right.$$

$$+\int\limits_{a_1+\varepsilon}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha}\,w'(rte^{i\varphi})\,re^{i\varphi}}{\varsigma-w(rte^{i\varphi})}dt\Bigg]. \tag{17}$$

Так как имеем

$$(1-a_1-\varepsilon)^{\alpha}\log|\varsigma-w((a_1+\varepsilon)\,re^{i\varphi})|-(1-a_1+\varepsilon)^{\alpha}\log|\varsigma-w((a_1-\varepsilon)\,re^{i\varphi})|=$$
$$=[\log|\varsigma-w((a_1+\varepsilon)\,re^{i\varphi})|-\log|\varsigma-w((a_1-\varepsilon)\,re^{i\varphi})|]\,(1-a_1-\varepsilon)^{\alpha}-$$
$$-[(1-a_1+\varepsilon)^{\alpha}-(1-a_1-\varepsilon)^{\alpha}]\log|\varsigma-w((a_1-\varepsilon)\,re^{i\varphi})|,$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg\{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[(1-a_1-\varepsilon)^{\alpha}\log|\varsigma-w((a_1+\varepsilon)\,re^{i\varphi})|-$$
$$-(1-a_1+\varepsilon)^{\alpha}\log|\varsigma-w((a_1-\varepsilon)\,re^{i\varphi})|\Bigg\}=0.$$

Таким образом, из (17) мы получаем

$$V_{\alpha}(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=\mathrm{V.p.}\,\frac{re^{i\varphi}}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha}\,w'(rte^{i\varphi})}{\varsigma-w(rte^{i\varphi})}dt+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\log|\varsigma-w(0)|,$$

что эквивалентно формуле (14) леммы для рассматриваемого нами случая.

Если на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$ есть конечное число значений $0<a_1<a_2<\cdots<a_n<1$, для которых $w(a_k\,re^{i\varphi})=\varsigma$, то для каждого a_k мы должны выбирать $\varepsilon_k>0$ так, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$, и главное значение интеграла понимать в известном смысле.

Рассмотрим теперь случай $-1<\alpha<0$. Тогда по определению имеем

$$V_{\alpha}(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=r^{-\alpha}\frac{d}{dr}\{D^{-(1+\alpha)}\log|\varsigma-w(re^{i\varphi})|\}=$$
$$=r^{-\alpha}\,\frac{d}{dr}\,\{r^{1+\alpha}\,V_{1+\alpha}(re^{i\varphi},\,\varsigma)\}.$$

Так как $1+\alpha>0$, то из формулы (14) получим

$$V_{\alpha}(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=r^{-\alpha}\frac{d}{dr}\Bigg\{\mathrm{Re}\,\frac{r^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-t)^{1+\alpha}\,w'(rte^{i\varphi})re^{i\varphi}}{\varsigma-w(rte^{i\varphi})}dt\Bigg\}. \tag{18}$$

При этом, если на радиусе φ $w(re^{i\varphi})=\varsigma$, то интеграл следует понимать в смысле главного значения.

Если на луче φ $w(re^{i\varphi})\neq\varsigma$, то из (18) имеем

$$V_{\alpha}(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=r^{-\alpha}\,\frac{d}{dr}\Bigg\{\mathrm{Re}\,\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\int\limits_{0}^{r}\frac{(r-t)^{1+\alpha}\,w'(te^{i\varphi})\,e^{i\varphi}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}\,dt\Bigg\}=$$

$$=r^{-\alpha}\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^r \frac{(r-t)^\alpha w'(te^{i\varphi})\,e^{i\varphi}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}\,dt=$$

$$=\mathrm{Re}\,\frac{re^{i\varphi}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha w'(rte^{i\varphi})}{\varsigma-w(rte^{i\varphi})}\,dt.$$

Если же имеются значения t такие, что $w(tre^{i\varphi})=\varsigma$, то формула (13) принимает следующий вид:

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=r^{-\alpha}\,\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\left[\mathrm{V.p.\,Re}\int_0^r \frac{(r-t)^{1+\alpha}w'(te^{i\varphi})\,e^{i\varphi}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}\,dt\right]\right\}.$$

Тогда, согласно формуле (13), получим

$$\mathrm{V.p.\,Re}\int_0^r \frac{(r-t)^{1+\alpha}w'(te^{i\varphi})\,e^{i\varphi}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}\,dt=\mathrm{V.p.\,Re}\int_0^r \frac{(r-t)^{1+\alpha}dw(te^{i\varphi})}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}=$$

$$=\mathrm{Re}\int_0^r \frac{(r-t)^{1+\alpha}-(r-c)^{1+\alpha}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}\,dw(te^{i\varphi})+(r-c)^{1+\alpha}\log\left|\frac{w(re^{i\varphi})-\varsigma}{w(0)-\varsigma}\right|.$$

Поэтому мы можем функцию V_α переписать в следующем виде:

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\frac{d}{dr}\,\mathrm{Re}\int_0^r \frac{(r-t)^{1+\alpha}-(r-c)^{1+\alpha}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}\,dw(te^{i\varphi})+$$

$$+\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\frac{d}{dr}\left\{(r-c)^{1+\alpha}\log\left|\frac{w(re)^{i\varphi}-\varsigma}{w(0)-\varsigma}\right|\right\}=$$

$$=\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\,\mathrm{Re}\,\frac{-(r-c)^{1+\alpha}w'(re^{i\varphi})\,e^{i\varphi}}{\varsigma-w(re^{i\varphi})}+\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\times$$

$$\times\,\mathrm{Re}\int_0^r \frac{(r-t)^\alpha-(r-c)^\alpha}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}\,dw(te^{i\varphi})+\frac{r^{-\alpha}(r-c)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\log\left|\frac{w(re^{i\varphi})-\varsigma}{w(0)-\varsigma}\right|+$$

$$+\mathrm{Re}\,\frac{r^{-\alpha}(r-c)^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\,\frac{w'(re^{i\varphi})\,e^{i\varphi}}{w(re^{i\varphi})-\varsigma}=\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\times$$

$$\times\,\mathrm{Re}\int_0^r \frac{(r-t)^\alpha-(r-c)^\alpha}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}\,dw(te^{i\varphi})+\frac{r^{-\alpha}(r-c)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\log\left|\frac{w(re^{i\varphi})-\varsigma}{w(0)-\varsigma}\right|. \tag{19}$$

С другой стороны, имеем также

$$\mathrm{Re}\int_0^r \frac{(r-t)^\alpha-(r-c)^\alpha}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}\,dw(te^{i\varphi})=\mathrm{V.p.\,Re}\int_0^r \frac{(r-t)^\alpha w'(te^{i\varphi})\,e^{i\varphi}\,dt}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}-$$

$$-(r-c)^\alpha\log\left|\frac{w(re^{i\varphi})-\varsigma}{w(0)-\varsigma}\right|. \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}), \varsigma) = \frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \text{ V.p. Re} \int_0^r \frac{(r-t)^\alpha w'(te^{i\varphi}) e^{i\varphi}}{\varsigma - w(te^{i\varphi})} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \text{ V.p. Re} \int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha w'(rxe^{i\varphi}) re^{i\varphi}}{\varsigma - w(rxe^{i\varphi})} dx,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Интеграл*

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|1 - re^{i\varphi}|^\beta}$$

допускает оценки

$$J \leqslant \begin{cases} \dfrac{c}{(1-r)^{\beta-1}}, & \beta > 1 \\ c \ln \dfrac{1}{1-r}, & \beta = 1, \end{cases}$$

где c — абсолютная константа, зависящая только от β.

Действительно, имеем при $0 < \varphi \leqslant \pi$

$$|1 - re^{i\varphi}| = \left[(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right]^{1/2} \geqslant \left[(1-r)^2 + r\frac{4}{\pi^2}\varphi^2\right]^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant c(1 - r + \varphi).$$

Следовательно

$$J \leqslant c \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1 - r + \varphi)^\beta},$$

откуда и следует справедливость утверждения леммы.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Если $w(z) \in \overset{*}{A}_\alpha$, $-1 < \alpha < 0$, то для любого β из интервала $(\alpha, 0)$ функция $w(z) - \varsigma$ принадлежит классу A_β для всех ς $(|\varsigma| < 1)$, кроме, быть может, некоторого множества E значений ς, $\gamma = 1-$емкость которого равна нулю.*

Доказательство. Пусть $w(z) \in \overset{*}{A}_\alpha$, тогда из представления (7) и неравенства (10) имеем

$$|w'(z)| \leqslant \lambda + |B'_\alpha(z, a_\mu)| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S'_\alpha(e^{-i\vartheta} z)| \, d\psi(\vartheta),$$

откуда согласно лемме 1 получим

$$|V_\beta(w(re^{i\varphi}), \varsigma)| \leqslant \frac{r\lambda}{\Gamma(1+\beta)} \int_0^1 \frac{(1-t)^\beta \, dt}{|\varsigma - w(rte^{i\varphi})|} +$$

$$+\frac{r}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \frac{(1-t)^\beta |B'_\alpha(rte^{i\varphi},a_\mu)|}{|\varsigma-w(rte^{i\varphi})|}dt+$$

$$+\frac{r}{2\pi\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \frac{(1-t)^\beta\, dt}{|\varsigma-w(rte^{i\varphi})|}\int_{-\pi}^{\pi}|S'_\alpha(e^{-i\theta}rte^{i\varphi})|\,d\psi(\theta). \tag{21}$$

Для того чтобы показать, что функция $w(z)-\varsigma$ принадлежит классу A_β, согласно (3) достаточно доказать равномерную ограниченность интеграла

$$\int_0^{2\pi} D^{-\beta}_{(+)}\log|\varsigma-w(re^{i\varphi})|\,d\varphi \tag{22}$$

для $r\in(0,1)$. Но согласно (21) имеем

$$\int_0^{2\pi} D^{-\beta}_{(+)}\log|\varsigma-w(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant\frac{r\lambda}{\Gamma(1+\beta)}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{(1-t)^\beta\,dt}{|\varsigma-w(rte^{i\varphi})|}+$$

$$+\frac{r}{\Gamma(1+\beta)}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{(1-t)^\beta|B'_\alpha(rte^{i\varphi})|\,dt}{|\varsigma-w(rte^{i\varphi})|}+\frac{r}{2\pi\Gamma(1+\beta)}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{(1-t)^\beta\,dt}{|\varsigma-w(rte^{i\varphi})|}\int_{-\pi}^{\pi}|S'_\alpha(e^{-i\theta}rte^{i\varphi})|\,d\psi(\theta)=J_1(\varsigma)+J_2(\varsigma)+J_3(\varsigma). \tag{23}$$

Пусть $\gamma=1$-емкость множества E положительна, тогда найдется такое положительное распределение единичной массы на E, что

$$\int_E\frac{d\mu(\varsigma)}{|\varsigma-w|}<\text{const} \tag{24}$$

равномерно для всех w.

Если мы покажем, что на всем множестве E интеграл (22) не может быть бесконечностью, то теорема будет доказана.

Действительно, имеем

$$\int_E d\mu(\varsigma)\int_0^{2\pi} D^{-\beta}_{(+)}\log|\varsigma-w(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant\int_E J_1(\varsigma)\,d\mu(\varsigma)+\int_E J_2(\varsigma)\,d\mu(\varsigma)+$$

$$+\int_E J_3(\varsigma)\,d\mu(\varsigma)=A_1+A_2+A_3. \tag{25}$$

Из неравенства (24) и из того, что $\beta\in(\alpha,0)$, $\alpha>-1$, очевидным образом следует ограниченность интеграла A_1.

Перейдем к оценке интеграла A_2. Известно [6], что

$$|B'_\alpha(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{c}{|1-re^{-i\varphi}|^{2+\alpha}}.$$

Подставляя эту оценку в значение I_2, получим, что

$$A_2 \leqslant c \int_0^1 (1-t)^\beta \, dt \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|1-rte^{i\varphi}|^{2+\alpha}} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - w(rte^{i\varphi})|}. \tag{26}$$

Согласно (24) и лемме 2 из (26) следует

$$A_2 \leqslant c \int_0^1 \frac{(1-t)^\beta}{(1-rt)^{1+\alpha}} \, dt < \text{const},$$

так как $\beta \in (\alpha, 0)$.

Остается оценить интеграл A_3. Поскольку очевидно

$$|S'_\alpha(z)| \leqslant \frac{c}{|1-z|^{2+\alpha}},$$

то интеграл A_3 оценивается так же, как A_2.

Таким образом, из (25) имеем

$$\int_E d\mu(\zeta) \int_0^{2\pi} D^{-\beta}_{(+)} \log|\zeta - w(re^{i\varphi})| \, d\varphi < \text{const},$$

что и доказывает теорему.

Из теоремы 4 и свойства (6) классов A_β непосредственно следует результат, который мы сформулируем в виде отдельной теоремы.

Теорема 5. *Если* $w(z) \in A^*_\alpha$ $(-1 < \alpha < 0)$ *и* $\beta \in (\alpha, 0)$ — *любое число, то ряд*

$$\sum_1^\infty (1 - r_\nu(a))^{1+\beta}$$

сходится для всех a $(|a| < 1)$, *кроме, быть может, некоторого множества* E *значений* a, $\gamma = 1$*-емкость которого равна нулю.*

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 23.IV.1969

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ. Միավոր շրջանում անալիտիկ և սահմանափակ ֆունկցիաների մի դասի շառավղային փոփոխությունը և արժեքների բաշխումը *(ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանի աշխատանքներում [2], [3] ներմուծված էին միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների նոր դասեր N_α և ստացված էին այդ դասերի ֆունկցիաների պարամետրական ներկայացումները։

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ այդ դասի անալիտիկ և սահմանափակ ֆունկցիաները, երբ $-1<\alpha<0$ ամենուրեք միավոր շառավղով շրջանագծի վրա ունեն վերջավոր շառավղային փոփոխություն, բացի գուցե մի E բազմությունից, որի γ ունակությունը զերո է, որտեղ γ-ն կամայական թիվ է $(1+\alpha,1)$ ինտերվալից։

N_α դասի անալիտիկ և սահմանափակ ֆունկցիաների որոշ A^*_α ենթադասի համար ապացուցվում է նաև թեորեմ, այդ ենթադասի ֆունկցիաների a—կետերի բաշխման մասին։

V. S. ZAKARIAN. *On radial variation and distribution of the values of a class of analytical and bounded functions* (summary)

It is proved in the paper that bounded analytical functions from N_α (a class introduced by Djrbashian in [2], [3]) everywhere in the unit circle display finite radial variance, with exception, may be, of a set of vanishing γ—capacity, $\gamma \in (1+\alpha, 1)$ being chosen arbitrarily. A theorem on distribution of a-points of functions from a subclass $A_\alpha^* \subset N_\alpha$ is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М., 1957.
2. *М. М. Джрбашян*. О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
3. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966, гл. IX.
4. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*. Граничные свойства мероморфных функций класса N_α, Изв. АН АрмССР, „Математика", 2, № 5, 1967, 275—294.
5. *L. Carleson*. On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets, Thesis University of Uppsala, 1950.
6. *В. С. Захарян*. Радиальные пределы и радиальные изменения произведения B_α, Изв АН АрмССР, „Математика", 3, № 1, 1968, 38—51.
7. *В. С. Захарян*. О радиальных предельных значениях функции B_α, Изв. АН АрмССР, „Математика", 3, №№ 4—5, 1968, 287—300.